Φύλλο 1

6

Κβαντική Ι

Τεστ 6

19/11/14

Όνομα: ....Παπισκιώτης Γρηγόριος..

ΑΜ: ..6995.....

1. Δίνεται ο τελεστής: $A \equiv \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$. Γράψτε την Hamiltonian του αρμονικού ταλαντωτή και δείξτε πώς εκφράζεται συναρτήσει του τελεστή A κσι του συζηγούς του. Βρείτε τον μεταθέτη του A με την Hamiltonian. Εξετάστε την δράση του A σε ιδιοκαταστάσεις της Hamiltonian.(+++)
2. Βρείτε τις αναμενόμενες τιμές $<x^2>$, $<x>$ και $<p>$ σε ιδιοκατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή. (+++)

1) για τον αρμονικό ταλαντωτή η Hamiltonian είναι

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + (m\omega\hat{x})^2\right] \quad (1)$$

$$\hat{A} = \frac{m\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$, ο ερμιτιανός συζυγής του $$\hat{A}^+ = \frac{m\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$$

$$\hat{A}^+\hat{A} = \frac{1}{2m\omega\hbar}\left[(m\omega\hat{x} + i\hat{p})(m\omega\hat{x} - i\hat{p})\right]$$

$$\hat{A}^+\hat{A} = \frac{1}{2m\omega\hbar}\left[(m\omega\hat{x})^2 - im\omega\hat{x}\hat{p} + m\omega i\hat{p}\hat{x} + \hat{p}^2\right]$$

$$\hat{A}^+\hat{A} = \frac{1}{2m\omega\hbar}\left[(m\omega\hat{x})^2 + \hat{p}^2 + m\omega i[\hat{p}, \hat{x}]\right]$$

με $[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$ επομένως $\hat{A}^+\hat{A} = \frac{1}{2m\omega\hbar}\left[(m\omega\hat{x})^2 + \hat{p}^2 - m\omega\hbar\right]$

οπότε δεδομένης της (1) ο $\hat{A}^+\hat{A}$ γράφεται

$$\hat{A}^+\hat{A} = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{A}^+\hat{A} + \frac{1}{2}\right)}$$

↳ Hamiltonian εκπεφρασμένη συναρτήσει των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής

• $[\hat{A},\hat{H}] = [\hat{A}, \hbar\omega(\hat{A}\hat{A}^+ + \tfrac{1}{2})] = \hbar\omega[\hat{A},\hat{A}\hat{A}^+] + \cancel{\hbar\omega[\hat{A},\tfrac{1}{2}]}^{\,0}$

$[\hat{A},\hat{H}] = \hbar\omega[\hat{A},\hat{A}\hat{A}^+]$

ο μεταθέτης $[\hat{A},\hat{A}\hat{A}^+] = \cancelto{0}{[\hat{A},\hat{A}]}\hat{A}^+ + \hat{A}[\hat{A},A^+]$

επομένως $[\hat{A},\hat{A}\hat{A}^+] = \hat{A}(\hat{A}\hat{A}^+ - \hat{A}^+\hat{A})$

με $\hat{A}^+\hat{A} = \dfrac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \dfrac{1}{2}$, κάνοντας όμοια διαδικασία για το $\hat{A}\hat{A}^+$ έχουμε για το $\hat{A}\hat{A}^+$:

$$\hat{A}\hat{A}^+ = \frac{1}{2m\omega\hbar}[(m\omega\hat{x})^2 + \hat{p}^2 - im[\hat{x},\hat{p}]]$$ με $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$

$$\hat{A}\hat{A}^+ = \frac{1}{2m\omega\hbar}[(m\omega\hat{x})^2 + \hat{p}^2 + m\omega\hbar] = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}$$

επομένως $[\hat{A},\hat{A}\hat{A}^+] = \hat{A}\left(\dfrac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \dfrac{1}{2}\right) = \hat{A}$

οπότε $\boxed{[\hat{A},\hat{H}] = \hbar\omega\hat{A}}$

όταν ο τελεστής καταστροφής δρα σε ιδιοκαταστάσεις της H έχουμε:

• $\hat{A}|n\rangle = C_{n-1}|n-1\rangle \Rightarrow |n-1\rangle = \dfrac{1}{C_{n-1}}\hat{A}|n\rangle$

$\langle n-1| = \dfrac{1}{C^*_{n-1}}\langle n|\hat{A}^+$, από την συνθήκη κανονικοποίησης

έχουμε $\langle n-1|n-1\rangle = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|C_{n-1}|^2}\langle n|\hat{A}^+\hat{A}|n\rangle = 1$

επομένως $|C_{n-1}|^2 = \langle n|\hat{A}^+\hat{A}|n\rangle$ με $\hat{A}^+\hat{A} = \dfrac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \dfrac{1}{2}$

οπότε $|C_{n-1}|^2 = \dfrac{\langle n|\hat{H}|n\rangle}{\hbar\omega} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{E_n}{\hbar\omega} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{(n+1/2)\hbar\omega}{\hbar\omega} - \dfrac{1}{2}$

$|C_{n-1}|^2 = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = n$ οπότε $|C_{n-1}| = \sqrt{n}$

οπότε αυθαίρετα $C_{n-1} = \sqrt{n}$ επομένως

$$\boxed{\hat{A}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle}$$

Φύλλο 2.

Κβαντική Ι

Τεστ 6

19/11/14

Όνομα: Παπαδιώτης Γρηγόριος

ΑΜ: 6995

1. Δίνεται ο τελεστής: $A \equiv \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$. Γράψτε την Hamiltonian του αρμονικού ταλαντωτή και δείξτε πώς εκφράζεται συναρτήσει του τελεστή Α κσι του συζηγούς του. Βρείτε τον μεταθέτη του Α με την Hamiltonian. Εξετάστε την δράση του Α σε ιδιοκαταστάσεις της Hamiltonian.(+++)
2. Βρείτε τις αναμενόμενες τιμές $<x^2>$, $<x>$ και $<p>$ σε ιδιοκατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή. (+++)

2) $\hat{A} = \frac{m\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$ (1)

$\hat{A}^+ = \frac{m\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$ (2)

$\xRightarrow{1+2} \hat{A} + \hat{A}^+ = \frac{2m\omega}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\hat{x} \Rightarrow$

$\boxed{\hat{x} = \ell(\hat{A} + \hat{A}^+)}$, με $\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$

Σε ιδιοκαταστάσεις της $\hat{H}$ έχουμε:

$<x> = <n|\hat{x}|n> = \ell <n|\hat{A} + \hat{A}^+|n> = 0$ αφού

- $\hat{A}|n> = \sqrt{n}\,|n-1> \Rightarrow <n|\hat{A}|n> = \sqrt{n}<n|n-1> = 0$
- $\hat{A}^+|n> = \sqrt{n+1}\,|n+1> \Rightarrow <n|\hat{A}^+|n> = \sqrt{n+1}<n|n+1> = 0$

λόγω ορθογωνιότητας

$<x^2> = <n|\hat{x}\hat{x}|n> = \ell^2 <n|(\hat{A}+\hat{A}^+)(\hat{A}+\hat{A}^+)|n>$

$<x^2> = \ell^2 <n|(\hat{A}\hat{A} + A\hat{A}^+ + \hat{A}^+\hat{A} + \hat{A}^+\hat{A}^+)|n>$

- $\hat{A}|n> = \sqrt{n}|n-1> \Rightarrow \hat{A}(\hat{A}|n>) = \sqrt{n}\sqrt{n-1}\,|n-2> \Rightarrow$

$<n|\hat{A}\hat{A}|n> = \sqrt{n}\sqrt{n-1}<n|n-2> = 0$ λόγω ορθογωνιότητας

- $\hat{A}^+|n> = \sqrt{n+1}\,|n+1> \Rightarrow \hat{A}^+(\hat{A}^+|n>) = \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\,|n+2>$

$<n|\hat{A}^+(\hat{A}^+|n>)|n> = \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}<n|n+2> = 0$ λόγω ορθογωνιότητας

Συνεπώς $\boxed{<x^2> = \ell^2 <n|\hat{A}\hat{A}^+ + \hat{A}^+\hat{A}|n>}$

αλλα $\hat{A}^+\hat{A} = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$, $\quad \hat{A}\hat{A}^+ = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}$

οπότε $\langle x^2\rangle = \ell^2 \langle n | \frac{2\hat{H}}{\hbar\omega} | n\rangle = \frac{2\ell^2}{\hbar\omega} E_n$, $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$

$$\langle x^2\rangle = \frac{2\ell^2}{\cancel{\hbar\omega}}(n+\tfrac{1}{2})\cancel{\hbar\omega} = (2n+1)\ell^2$$

αφαιρώντας κατά μέλη τις (1), (2) έχουμε:

$$\hat{A} - \hat{A}^+ = \frac{2i\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \Rightarrow \hat{p} = \frac{i\sqrt{2m\omega\hbar}}{2}(\hat{A}^+ - \hat{A})$$

$\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \Rightarrow \ell^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \Rightarrow m\omega = \frac{\hbar}{2\ell^2}$ οπότε ο τελεστής της ορμής συναρτήσει των $\hat{A}$, $\hat{A}^+$ γράφεται

$$\hat{p} = \frac{i\sqrt{2\frac{\hbar^2}{2\ell^2}}}{2}(\hat{A}^+ - \hat{A}) = \frac{i\hbar}{2\ell}(\hat{A}^+ - \hat{A})$$

$$\langle p\rangle = \langle n|\hat{p}|n\rangle = \frac{i\hbar}{2\ell}\langle n|(\hat{A}^+ - \hat{A})|n\rangle$$

$$\langle p\rangle = \frac{i\hbar}{2\ell}\left(\langle n|\hat{A}^+|n\rangle - \langle n|\hat{A}|n\rangle\right)$$

αλλα όπως υπολογίστηκε για την $\langle x\rangle$ οι παράγοντες

$$\langle n|\hat{A}|n\rangle = \sqrt{n}\langle n|n-1\rangle = 0$$
$$\langle n|\hat{A}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\langle n|n+1\rangle = 0$$

επομένως σε ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας

$$\boxed{\langle p\rangle = 0}$$

Κολλα 1η

6

Κβαντική Ι

Τεστ 6

19/11/14

Όνομα: ......Κατερινα Ζυριλιου......

ΑΜ: ...6903...

1. Δίνεται ο τελεστής: $A \equiv \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$. Γράψτε την Hamiltonian του αρμονικού ταλαντωτή και δείξτε πώς εκφράζεται συναρτήσει του τελεστή Α κσι του συζηγούς του. Βρείτε τον μεταθέτη του Α με την Hamiltonian. Εξετάστε την δράση του Α σε ιδιοκαταστάσεις της Hamiltonian.(+++)
2. Βρείτε τις αναμενόμενες τιμές $<x^2>$, $<x>$ και $<p>$ σε ιδιοκατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή. (+++)

1. $A = \frac{m\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$ ο συζυγής είναι $A^+ = \frac{m\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$

Η Hamiltonian ορίζεται ως $H = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2\right)$

$$A^+A = \frac{(m\omega\hat{x} - i\hat{p})(m\omega\hat{x} + i\hat{p})}{2m\hbar\omega} = \frac{m^2\omega^2\hat{x}^2 + \hat{p}^2 - im\omega\hat{p}\hat{x} + im\omega\hat{x}\hat{p}}{2m\hbar\omega}$$

$$A^+A = \frac{(m^2\omega^2\hat{x}^2 + \hat{p}^2)}{2m\hbar\omega} + \frac{im\omega}{2m\hbar\omega}\left(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}\right) = \frac{H}{\hbar\omega} + \frac{i}{2\hbar}([\hat{x},\hat{p}])$$

$$A^+A = \frac{H}{\hbar\omega} + \frac{i}{2\hbar}(i\hbar) = \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \longrightarrow \text{και } AA^+ = \frac{H}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}$$

άρα $\boxed{H = \left(A^+A + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega} \longrightarrow \boxed{\text{Επίσης } H = \left(AA^+ - \frac{1}{2}\right)\hbar\omega}$

$$[A,H] = [A, A^+A\hbar\omega] = \hbar\omega[A, A^+A] \xrightarrow{[A,BC] = B[A,C] + [A,B]C}$$

$$= \hbar\omega\left(A^+\underbrace{[A,A]}_{0} + [A,A^+]A\right) = \hbar\omega[A,A^+]A$$

όμως $[A,A^+] = AA^+ - A^+A = \cancel{\frac{H}{\hbar\omega}} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{H}{\hbar\omega}} + \frac{1}{2} = +\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Άρα $[A,H] = \hbar\omega \cdot 1 \cdot A = \hbar\omega A$

Ο τελεστής A όταν δρα σε ιδιοκαταστάσεις δίνει νέες ιδιοκαταστάσεις με μειωμένες ιδιοτιμές.

Για την ενέργεια ισχύει ότι: $H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle \xrightarrow{A}$

$$AH|E_n\rangle = E_n A|E_n\rangle \Rightarrow E_n(A|E_n\rangle) = (\underbrace{AH + HA - HA}) |E_n\rangle$$

$$= ([A,H] + HA)|E_n\rangle = (\hbar\omega A + HA)(|E_n\rangle) = (\hbar\omega + H)(A|E_n\rangle)$$

$$\Rightarrow H(A|E_n\rangle) = (E_n - \hbar\omega)(A|E_n\rangle)$$

το ket $|b\rangle = (A|E_n\rangle)$ είναι ιδιοκατάσταση της H με ιδιοτιμή $E_n - \hbar\omega$ (μειωμένη δηλαδή κατά $\hbar\omega$)

2. Για τους τελεστές A, A^+ ισχύει:

$$\alpha A^+|n\rangle = |n+1\rangle \quad \text{και} \quad \beta A|n\rangle = |n-1\rangle$$

ισχύει ότι $|A^+|E_n\rangle|^2 = \langle E_n|AA^+|E_n\rangle = \langle E_n|\frac{H}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}|E_n\rangle$

$$= \frac{E_n}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} \xrightarrow{E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega} \frac{(n+\frac{1}{2})\hbar\omega}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} = n+1$$

όμως $\langle n+1|n+1\rangle = \langle n|\alpha A A^+ \alpha|n\rangle = \alpha^2\langle n|AA^+|n\rangle$

$$= \alpha^2(n+1) \xrightarrow[\text{κανονικοποίηση}]{\langle n+1|n+1\rangle = 1} 1 = \alpha^2(n+1) \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{n+1}}}$$

Άρα $$\boxed{|n+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} A^+|n\rangle}$$

όμοια για τον A

$$|A|E_n\rangle|^2 = \langle E_n|A^+A|E_n\rangle = \langle E_n|\frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}|E_n\rangle = \frac{E_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{(n+\frac{1}{2})\hbar\omega}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} = n$$

Κολλα 2η

Κβαντική Ι

Τεστ 6

19/11/14

Όνομα: ....Κατερινα Ζυριμιου....

ΑΜ: ....6903....

1. Δίνεται ο τελεστής: $A \equiv \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$. Γράψτε την Hamiltonian του αρμονικού ταλαντωτή και δείξτε πώς εκφράζεται συναρτήσει του τελεστή A κσι του συζηγούς του. Βρείτε τον μεταθέτη του A με την Hamiltonian. Εξετάστε την δράση του A σε ιδιοκαταστάσεις της Hamiltonian.(+++)
2. Βρείτε τις αναμενόμενες τιμές $<x^2>$, $<x>$ και $<p>$ σε ιδιοκατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή. (+++)

$|A|E_n\rangle|^2 = n$ άρα $\langle n-1|n-1\rangle = 1$ κανονικοποίηση

$\Rightarrow \langle n|\beta A^+ A \beta|n\rangle = 1 \Rightarrow \beta^2 \langle n|A^+ A|n\rangle = 1$

$\Rightarrow \beta^2 n = 1 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{\sqrt{n}}}$

οπότε $\boxed{|n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} A|n\rangle}$

Ξέρω ότι $A = \frac{m\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$, $A^+ = \frac{m\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$ $\xrightarrow{\oplus}$ $A + A^+ = \frac{m\omega\hat{x} + \cancel{i\hat{p}} + m\omega\hat{x} - \cancel{i\hat{p}}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$

$A + A^+ = \frac{2m\omega\hat{x}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$

θεωρώ το $\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$

άρα $A + A^+ = 2\frac{\sqrt{m^2\omega^2}\hat{x}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x}$

$A + A^+ = 2\sqrt{\frac{2m\omega}{4\hbar}}\hat{x} = 2\frac{\ell^{-1}}{\sqrt{4}}\hat{x} = \ell^{-1}\hat{x}$

Άρα $\boxed{\hat{x} = \ell(A + A^+)}$

Αν τα αφαιρέσω έχω

$$A - A^{+} = \frac{m\omega\hat{x} + i\hat{p} - m\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = \frac{2i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \Rightarrow \hat{p} = \frac{\sqrt{2m\hbar\omega}}{2i}(A - A^{+})$$

Η μέση τιμή του x είναι :

$$\langle x \rangle = \langle n|\hat{x}|n\rangle = \langle n|\ell(A+A^{+})|n\rangle = \ell\langle n|A|n\rangle + \ell\langle n|A^{+}|n\rangle$$

$$= \ell\langle n|\left(\sqrt{n}\,|n-1\rangle\right) + \ell\langle n|\left(\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right)$$

$$= \ell\sqrt{n}\,\underbrace{\langle n|n-1\rangle}_{0} + \ell\sqrt{n+1}\,\underbrace{\langle n|n+1\rangle}_{0} = 0$$

αφού $\langle n|n+1\rangle = 0$, $\langle n|n-1\rangle = 0$ από ορθογωνιότητα.

$$\langle x^{2}\rangle = \langle n|\hat{x}^{2}|n\rangle = \langle n|\ell^{2}(A+A^{+})^{2}|n\rangle = \ell^{2}\langle n|(A+A^{+})^{2}|n\rangle$$

$$= \ell^{2}\left[\underbrace{\langle n|A^{2}|n\rangle}_{0} + \underbrace{\langle n|A^{+2}|n\rangle}_{0} + \langle n|AA^{+}|n\rangle + \langle n|A^{+}A|n\rangle\right]$$

το $\langle n|AA|n\rangle = \langle n|A\left(\sqrt{n}\,|n-1\rangle\right) = \sqrt{n}\,\langle n|A|n-1\rangle =$

$$= \sqrt{n}\,\langle n|\left(\sqrt{n-1}\,|n-2\rangle\right) = \sqrt{n-1}\sqrt{n}\,\langle n|n-2\rangle = 0$$

ορθογωνιότητα

όμοια για $\langle n|A^{+2}|n\rangle = 0$

Άρα έχω ότι $\langle x^{2}\rangle = \left[\langle n|AA^{+}|n\rangle + \langle n|A^{+}A|n\rangle\right]\ell^{2}$

$$= \left[\langle n|A\left(\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right) + \langle n|A^{+}\left(\sqrt{n}\,|n-1\rangle\right)\right]\ell^{2}$$

$$= \left[\sqrt{n+1}\,\langle n|A|n+1\rangle + \sqrt{n}\,\langle n|A^{+}|n-1\rangle\right]\ell^{2} = \left[\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\,\langle n|n+1-1\rangle + \sqrt{n}\sqrt{n}\,\langle n|n+1-1\rangle\right]\ell^{2}$$

$$\Rightarrow \langle x^{2}\rangle = \left[(n+1)\langle n|n\rangle + (n)\langle n|n\rangle\right]\ell^{2} = [n+1+n]\ell^{2} = (2n+1)\ell^{2}$$

όμως $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega \Rightarrow \dfrac{2E_n}{\hbar\omega} = 2n+1$

άρα $\langle x^{2}\rangle = \dfrac{2E_n\ell^{2}}{\hbar\omega}$

Κολλα 3η

Κβαντική Ι

Τεστ 6

19/11/14

Όνομα: ……ΚΑΤΕΡΙΝΑ ΖΥΡΙΛΙΟΥ……

ΑΜ: ……6903……

1. Δίνεται ο τελεστής: $A \equiv \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$. Γράψτε την Hamiltonian του αρμονικού ταλαντωτή και δείξτε πώς εκφράζεται συναρτήσει του τελεστή Α κσι του συζηγούς του. Βρείτε τον μεταθέτη του Α με την Hamiltonian. Εξετάστε την δράση του Α σε ιδιοκαταστάσεις της Hamiltonian.(+++)
2. Βρείτε τις αναμενόμενες τιμές $<x^2>$, $<x>$ και $<p>$ σε ιδιοκατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή. (+++)

Για τη μέση τιμή του $<p>$ έχω

$$\langle n|p|n\rangle = \frac{\sqrt{2m\hbar\omega}}{2i}\left[\langle n|A|n\rangle - \langle n|\hat{A}|n\rangle\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2m\hbar\omega}}{2i}\left[\langle n|\left(\sqrt{n}\,|n-1\rangle\right) - \langle n|\left(\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{2m\hbar\omega}}{2i}\sqrt{n}\,\underbrace{\left[\cancel{\langle n|n-1\rangle}\right]}_{0} + \frac{\sqrt{2m\hbar\omega}}{2i}\sqrt{n+1}\,\underbrace{\left[\cancel{\langle n|n+1\rangle}\right]}_{0}$$

$$\langle p\rangle = 0$$