Κολλα 1η

6

Κβαντική Ι

Τεστ 7

26/11/14

Όνομα: ...Κατερινα Συριμου...

ΑΜ: ...6903...

1. Βρείτε την θεμελιώδη και την 1η διεγερμένη ιδιοσυνάρτηση του αρμονικού ταλαντωτή. Δίνεται $A \equiv \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$. (+++)
2. Δείξτε ότι οι γεννήτορες μοναδιακών μετασχηματισμών είναι ερμητειανοί τελεστές. Δείξτε ότι για απειροστούς μετασχηματισμούς ισχύει ότι $i\frac{\partial|\psi'\rangle}{\partial\theta} = \tau|\psi'\rangle$ όπου τ ο γεννήτορας του μετασχηματισμού, θ η παράμετρος του μετασχηματισμού και |ψ'> η μετασχηματισμένη κατάσταση. (+++)

1. Γνωρίζουμε ότι όταν ο τελεστής καταστροφής δράσει στη θεμελιώδη κατάσταση δίνει μηδέν. $A|0\rangle = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{m\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\right)|0\rangle = 0 \Rightarrow \frac{m\omega\hat{x}|0\rangle + i\hat{p}|0\rangle}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = 0$$

στην αναπαράσταση της θέσης

$$\Longrightarrow \frac{m\omega\langle x|\hat{x}|0\rangle + i\langle x|\hat{p}|0\rangle}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = 0 \Rightarrow \frac{m\omega x\langle x|0\rangle + i\left(-i\hbar\frac{\partial\langle x|0\rangle}{\partial x}\right)}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m\omega x u_0 + \hbar\frac{\partial}{\partial x}u_0}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = 0 \Rightarrow \hbar\frac{\partial}{\partial x}u_0 = -m\omega x u_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\partial u_0}{\partial x}}{u_0} = -\frac{m\omega x}{\hbar} \to \frac{\partial u_0}{u_0} = -\frac{m\omega x}{\hbar}\partial x \Rightarrow \int\frac{du_0}{u_0} = -\int\frac{m\omega x\,dx}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \ln u_0 = -\frac{m\omega x^2}{2\hbar} \Rightarrow e^{\ln u_0} = Ae^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \Rightarrow \boxed{u_0(x) = Ae^{-x^2/4\ell^2}}$$

αφού $\frac{m\omega}{2\hbar} = \frac{2m\omega}{4\hbar} = \frac{1}{4\ell^2}$ όπου $\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$

$u_0(x) = A \cdot e^{-x^2/4\ell^2}$ Για να βρω την A χρησιμοποιώ την κανονικοποίηση. $\int_{-\infty}^{+\infty} |u_0(x)|^2 dx = 1$.

Άρα $\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) u_0^*(x)\, dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-x^2/2\ell^2} dx = 1$

Έστω $\frac{x^2}{2\ell^2} = z^2$ $dz = \frac{1}{\sqrt{2}\ell} dx$

άρα έχω $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2}\ell \cdot A^2 \cdot e^{-z^2} dz = \sqrt{2}\ell A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{2\pi}\ell A^2$

$\Rightarrow A^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ell} \Rightarrow A = \left(\frac{1}{2\pi\ell^2}\right)^{1/4}$

Άρα τελικά $\boxed{u_0(x) = \frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\ell^2}}$

ο συζυγής του A είναι ο $A^+ = \frac{m\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$

όταν ο A^+ δράσει στη θεμελιώδη μας δίνει την πρώτη διεγερμένη. $A^+ u_0(x) = u_1(x)$

Τον A^+ μπορώ να τον γράψω ως

$$A^+ = \sqrt{\frac{m^2\omega^2}{2m\hbar\omega}}\hat{x} - \frac{i\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\hat{x}}\right)}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = \sqrt{\frac{2m\omega}{4\hbar}}\hat{x} - \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\hbar\omega}}\frac{\partial}{\partial\hat{x}} =$$

$$= \frac{1}{2\ell}\hat{x} - \ell\frac{\partial}{\partial\hat{x}} = \frac{1}{2\ell}x - \ell\frac{\partial}{\partial x}.$$

Άρα $A^+\left(\frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\ell^2}\right) = u_1(x)$

$$\Rightarrow u_1(x) = \frac{1}{2\ell} x \frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\ell^2} + \frac{\ell}{(2\pi\ell^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\ell^2}\left(\frac{2x}{4\ell^2}\right)$$

$$u_1(x) = \frac{e^{-x^2/4\ell^2}}{(2\pi\ell^2)^{1/4}}\left[\frac{x}{2\ell} + \frac{2x\ell}{4\ell^2}\right] = \frac{x}{\ell}\frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\ell^2}$$

Κολλα 2η

Κβαντική Ι

Τεστ 7

26/11/14

Όνομα: ΚΑΤΕΡΙΝΑ ΖΥΡΙΛΙΟΥ

ΑΜ: 6903

1. Βρείτε την θεμελιώδη και την 1η διεγερμένη ιδιοσυνάρτηση του αρμονικού ταλαντωτή. Δίνεται $A \equiv \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$. (+++)
2. Δείξτε ότι οι γεννήτορες μοναδιακών μετασχηματισμών είναι ερμητειανοί τελεστές. Δείξτε ότι για απειροστούς μετασχηματισμούς ισχύει ότι $i\frac{\partial|\psi'\rangle}{\partial\theta} = \tau|\psi'\rangle$ όπου τ ο γεννήτορας του μετασχηματισμού, θ η παράμετρος του μετασχηματισμού και |ψ'> η μετασχηματισμένη κατάσταση. (+++)

Άρα η πρώτη διεγερμένη κατάσταση είναι η

$u_1(x) = \frac{x}{\ell}\frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\ell^2}$ όπου $\left(\frac{x}{\ell}\frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}}\right)$ = πολ/μο Hermite

2. όταν ένας τελεστής λέμε ότι είναι μοναδιακός ισχύει ότι $\boxed{U^+U = I}$

Έστω ο τελεστής $U(\delta\theta) = I - i\delta\theta\tau + \cancel{O(\delta\theta)^2}$ για απειροστούς μετασχηματισμούς ($O(\delta\theta)^2 <<$ άρα 0)

άρα $U^+U = (I + i\delta\theta\tau^+)(I - i\delta\theta\tau) = I$

$\Rightarrow I^2 - i\delta\theta I\tau + i\delta\theta\tau^+ I + \cancel{(\delta\theta)^2\tau^+\tau} = I$ οι τάξεις του $(\delta\theta)^2$ είναι πολύ μικρές.

$\Rightarrow \cancel{I} \quad + i\delta\theta\tau^+ = \cancel{I}$

$\Rightarrow i\delta\theta\tau^+ = i\delta\theta\tau \Rightarrow \boxed{\tau^+ = \tau}$: τ ερμητειανός

Ισχύει ότι $|\psi'\rangle = U(\delta\theta)|\psi\rangle$

$$\Rightarrow |\psi'\rangle = [I - i\delta\theta\tau]|\psi\rangle = I|\psi\rangle - i\delta\theta\tau|\psi\rangle = |\psi\rangle - i\delta\theta\tau|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow (|\psi'\rangle - |\psi\rangle) = -i\delta\theta\tau|\psi\rangle \Rightarrow \frac{|\psi'\rangle - |\psi\rangle}{\delta\theta} = -i\tau|\psi\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial|\psi'\rangle}{\partial\theta} = -i\tau|\psi\rangle \Rightarrow i\frac{\partial|\psi'\rangle}{\partial\theta} = \tau|\psi\rangle$$

όμως επειδή το $|\psi'\rangle$ με το $|\psi\rangle$ απέχουν κατά πολύ μικρό $\delta\theta$ μπορώ να γράψω

$$\boxed{i\frac{\partial|\psi'\rangle}{\partial\theta} = \tau|\psi'\rangle}$$

Ηομα 1

6

Κβαντική Ι

Τεστ 7

26/11/14

Όνομα: ....Παπισκιώτης Γρηγοριος..

AM: ...6995...

1. Βρείτε την θεμελιώδη και την $1^η$ διεγερμένη ιδιοσυνάρτηση του αρμονικού ταλαντωτή. Δίνεται $A = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$. (+++)
2. Δείξτε ότι οι γεννήτορες μοναδιακών μετασχηματισμών είναι ερμητειανοί τελεστές. Δείξτε ότι για απειροστούς μετασχηματισμούς ισχύει ότι $$i\frac{\partial|\psi'\rangle}{\partial\theta} = \tau|\psi'\rangle$$ όπου τ ο γεννήτορας του μετασχηματισμού, θ η παράμετρος του μετασχηματισμού και |ψ'> η μετασχηματισμένη κατάσταση. (+++)

Θεμα 1

1) εστω $|0\rangle$ η θεμελιωδης ενεργειακή κατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή.

οταν $\hat{A}|0\rangle = 0 \Rightarrow m\omega\hat{x}|0\rangle + i\hat{p}|0\rangle = 0$ ①

στην αναπαράσταση του χωρου, δρώντας απο αριστερα στην ① με το $\langle x|$ έχουμε: $m\omega\langle x|\hat{x}|0\rangle + i\langle x|\hat{p}|0\rangle = 0$

$$\Rightarrow m\omega x\langle x|0\rangle + i(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x}\langle x|0\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$m\omega x\langle x|0\rangle + \hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|0\rangle = 0$$

εστω $\langle x|0\rangle = \psi_0(x)$ θεμελιώδης ιδιοσυναρτηση του Α.Τ

$$\frac{\partial\psi_0(x)}{\partial x} = -\frac{m\omega x}{\hbar}\psi_0(x) \Rightarrow \frac{d\psi_0(x)}{\psi_0(x)} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\,dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{d\psi_0(x)}{\psi_0(x)} = -\int\frac{m\omega x}{\hbar}dx + c \Rightarrow \ln\psi_0(x) = -\frac{m\omega x^2}{2\hbar} + c$$

$$\Rightarrow \psi_0(x) = e^c e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} = A e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

έστω $\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \Rightarrow \ell^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \Rightarrow \boxed{m\omega = \frac{\hbar}{2\ell^2}}$

επομένως $\psi_0(x) = A e^{-\frac{\hbar x^2}{2\hbar(2\ell^2)}} = A e^{-x^2/4\ell^2}$

για τον προσδιορισμό της σταθεράς κανονικοποίησης A

πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = 1 \Rightarrow |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2\ell^2} dx = 1$

θέτω $\frac{x}{\sqrt{2}\ell} = \xi \Rightarrow d\xi = \frac{dx}{\sqrt{2}\ell} \Rightarrow \boxed{dx = \sqrt{2}\ell\, d\xi}$

$|A|^2 \sqrt{2}\ell \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 1 \Rightarrow |A|^2 \sqrt{2\pi}\sqrt{\ell^2} = 1 \Rightarrow$

$|A|^2 = \frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/2}} \Rightarrow |A| = \frac{1\, e^{i\varphi}}{(2\pi\ell^2)^{1/4}} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}}}$

για $\varphi = 0$ αυθαίρετα

επομένως $\boxed{\langle x|0\rangle = \psi_0(x) = \frac{1}{(2\pi\ell^2)^{1/4}} e^{-x^2/4\ell^2}}$

- για την εύρεση της πρώτης διεγερμένης ιδιοσυνάρτησης

$\hat{A}^+|0\rangle = 1\,|1\rangle \Rightarrow \frac{m\omega\hat{x}|0\rangle - i\hat{p}|0\rangle}{\sqrt{2m\omega\hbar}} = |1\rangle \Rightarrow$

$\frac{m\omega\langle x|\hat{x}|0\rangle - i\langle x|\hat{p}|0\rangle}{\sqrt{2m\omega\hbar}} = \langle x|1\rangle = \psi_1(x)$

$\frac{m\omega x\langle x|0\rangle - i(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x}\langle x|0\rangle}{\sqrt{2m\omega\hbar}} = \psi_1(x)$

Νότα 2

Κβαντική I

Τεστ 7

26/11/14

Όνομα: Παπιγκιώτης Γρηγόριος

AM: 6995

1. Βρείτε την θεμελιώδη και την $1^η$ διεγερμένη ιδιοσυνάρτηση του αρμονικού ταλαντωτή. Δίνεται $A \equiv \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$. (+++)
2. Δείξτε ότι οι γεννήτορες μοναδιακών μετασχηματισμών είναι ερμητειανοί τελεστές. Δείξτε ότι για απειροστούς μετασχηματισμούς ισχύει ότι

$$i\frac{\partial|\psi'\rangle}{\partial\theta} = \tau|\psi'\rangle$$

όπου τ ο γεννήτορας του μετασχηματισμού, θ η παράμετρος του μετασχηματισμού και |ψ'> η μετασχηματισμένη κατάσταση. (+++)

1) $\psi_1(x) = \frac{m\omega x \langle x|0\rangle}{\sqrt{2m\omega\hbar}} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \frac{\partial}{\partial x}\langle x|0\rangle$

$\frac{\partial}{\partial x}\langle x|0\rangle = \frac{1}{(2\pi b^2)^{1/4}} \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-x^2/4b^2}\right] = \frac{1}{(2\pi b^2)^{1/4}}\left(-\frac{x}{2b^2}\right) e^{-x^2/4b^2}$

$\psi_1(x) = \frac{\sqrt{m^2\omega^2}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \times \frac{1}{(2\pi b^2)^{1/4}} e^{-x^2/4b^2} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \frac{1}{(2\pi b^2)^{1/4}}\left(\frac{x}{2b^2}\right) e^{-x^2/4b^2}$

$\psi_1(x) = \frac{\sqrt{m\omega}}{\sqrt{2\hbar}} \times \frac{1}{(2\pi b^2)^{1/4}} e^{-x^2/4b^2} + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{1}{(2\pi b^2)^{1/4}}\left(\frac{x}{2b^2}\right) e^{-x^2/4b^2}$

• $m\omega = \frac{\hbar}{2b^2}$

$\psi_1(x) = \frac{x}{2b} \frac{1}{(2\pi b^2)^{1/4}} e^{-x^2/4b^2} + \frac{b}{(2\pi b^2)^{1/4}}\left(\frac{x}{2b^2}\right) e^{-x^2/4b^2}$

$\psi_1(x) = \frac{2x}{2b} \frac{1}{(2\pi b^2)^{1/4}} e^{-x^2/4b^2} = \frac{1}{(2\pi b^2)^{1/4}}\left(\frac{x}{b}\right) e^{-x^2/4b^2}$

με $b = \sqrt{\hbar/2m\omega}$

με $\psi_1(x)$ να αποτελεί την 1η διεγερμένη ιδιοσυνάρτηση του Α.Τ.

$$\cancel{\psi_1(x) = \frac{m\omega x\langle x|0\rangle - \hbar\frac{\partial}{\partial x}\langle x|0\rangle}{\sqrt{2m\omega\hbar}} = \frac{m\omega x}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\langle x|0\rangle - \frac{\hbar\frac{\partial\langle x|0\rangle}{\partial x}}{\sqrt{2m\omega\hbar}}}$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\langle x|0\rangle = \frac{1}{2\pi\sigma^2}}$$

<u>Θεμα 2</u> : για απειροστούς μετασχηματισμούς

$$\hat{U}(\delta\theta) = I - i\hat{\tau}\delta\theta + \cancel{O(\delta\theta^2)}^{\to 0}$$

πολύ μικρές παράμετροι, θεωρούνται αμελητέες

~~για να~~ Γνωρίζω ότι για να είναι οι μετασχηματισμοί μοναδιακοί ισχύει

$$U^{+}(\delta\theta)U(\delta\theta) = I \Rightarrow (I + i\hat{\tau}^{+}\delta\theta)(I - i\hat{\tau}\delta\theta) = I$$

$$\Rightarrow I - Ii\hat{\tau}\delta\theta + iI\hat{\tau}^{+}\delta\theta + \cancel{\hat{\tau}^{+}\hat{\tau}(\delta\theta)^2}^{\to 0} = I$$

$$\Rightarrow iI\hat{\tau}^{+}\delta\theta = i\hat{\tau}I\delta\theta \Rightarrow \boxed{\hat{\tau}^{+} = \hat{\tau}}$$ επομένως οι γεννήτορες των μοναδιακών μετασχηματισμών είναι ερμιτιανοί τελεστές.

- Εστω απειροστός μετασχηματισμός $|\psi'\rangle = U(\delta\theta)|\psi\rangle \Rightarrow$

$$|\psi'\rangle = (I - i\hat{\tau}\delta\theta)|\psi\rangle \Rightarrow |\psi'\rangle = |\psi\rangle - i\hat{\tau}\delta\theta|\psi\rangle \Rightarrow$$

$$|\psi'\rangle - |\psi\rangle = -i\hat{\tau}\delta\theta|\psi\rangle \Rightarrow \frac{|\psi'\rangle - |\psi\rangle}{-i\delta\theta} = \hat{\tau}|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{\delta|\psi'\rangle}{-i\delta\theta} = \hat{\tau}|\psi\rangle \Rightarrow i\frac{\delta|\psi'\rangle}{\delta\theta} = \hat{\tau}|\psi\rangle$$

για $\delta\theta \to 0$, $|\psi'\rangle \equiv |\psi\rangle$ αφού $U(\delta\theta = 0) = I$

και $\frac{\delta}{\delta\theta} \to \frac{\partial}{\partial\theta}$ <u>επομένως</u>:

$$\boxed{i\frac{\partial|\psi'\rangle}{\partial\theta} = \hat{\tau}|\psi'\rangle}$$