6

Κβαντική Ι

Τεστ 8

4/12/14

Όνομα: Νάκας Θεόδωρος

ΑΜ: 6557

1. Δείξτε ότι ο τελεστής **απειροστών** μετατοπίσεων μετασχηματίζει τον τελεστή της θέσης ως εξής $U^\dagger(\mathbf{a})\,\mathbf{x}\,U(\mathbf{a}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$. Θεωρείστε απειροστά μικρό διάνυσμα μετατόπισης. (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τον μεταθέτη θέσης-ορμής).. (+++)
2. Δείξτε ότι η χρονικά εξελιγμένη κυματοσυνάρτηση κβαντικού συστήματος μπορεί να γραφεί ως: $\psi(x,t) = \int dx_0\, U(x,t;x_0,t_0)\,\psi(x_0,t_0)$. Βρείτε την μορφή του διαδότη U. (+++)

1) $U(\delta\vec{a}) = e^{-i\,\delta\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}/\hbar}$ (για $\delta\vec{a}\to 0$)

Όμως για $\delta\vec{a}\to 0$ μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor την $U(\delta\vec{a})$ γύρω από το δα ίσο με μηδέν.

$$U(\delta\vec{a}) = e^{-i\,\delta\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}/\hbar} = e^{-i\,\delta a\,\hat{a}\cdot\hat{\vec{p}}/\hbar}$$

$$U(\delta\vec{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta a^n}{n!}\left[\left(\frac{d}{d(\delta a)}\right)^n U(\delta\vec{a})\right]_{\delta a=0} = 1 + \frac{\delta a}{1!}\left[\frac{d}{d(\delta a)}\, e^{-i\,\delta a\,\hat{a}\cdot\hat{\vec{p}}/\hbar}\right]_{\delta a=0} + \dots$$

$$= 1 - i\,\delta a\,\frac{\hat{a}\cdot\hat{\vec{p}}}{\hbar} + \overbrace{O(\delta a^2)}^{0} = 1 - i\frac{\delta\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}}{\hbar}$$

$$U^\dagger(\delta\vec{a}) = 1 + i\frac{\delta\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}}{\hbar}$$

$$U^\dagger(\delta\vec{a})\,\vec{r}\,U(\delta\vec{a}) = \left(1 + i\frac{\delta\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}}{\hbar}\right)\vec{r}\left(1 - i\frac{\delta\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}}{\hbar}\right) = \left(\vec{r} + i\frac{\delta\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}}{\hbar}\vec{r}\right)\left(1 - i\frac{\delta\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}}{\hbar}\right) \Rightarrow$$

$$U^\dagger(\delta\vec{a})\,\vec{r}\,U(\delta\vec{a}) = \vec{r} - i\,\vec{r}\,\frac{\delta\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}}{\hbar} + i\,\frac{\delta\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}}{\hbar}\,\vec{r} + \underbrace{\frac{(\delta\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}})^2}{\hbar^2}}_{0\ (\text{διότι είναι όρος με } \delta a^2)} \Rightarrow$$

$$U^\dagger(\delta\vec{a})\,\vec{r}\,U(\delta\vec{a}) = \vec{r} - \frac{i}{\hbar}\left[\vec{r}, \delta\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}\right]$$

$$\left[\vec{r}, \delta\vec{a}\cdot\hat{\vec{p}}\right] = \left[\sum_{i=1}^{3} x_i, \sum_{j=1}^{3} \delta a_j \hat{p}_j\right] = \sum_{i,j=1}^{3} \left[x_i, \delta a_j \hat{p}_j\right] = \sum_{i,j=1}^{3} \delta a_j \overbrace{\left[x_i, \hat{p}_j\right]}^{i\hbar\delta_{ij}} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} i\hbar\,\delta a_j\, i\hbar\,\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} i\hbar\,\delta a_i = i\hbar\,\delta\vec{a} \Rightarrow$$

(χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό ότι $\hat{x}_i = x_i$ στην αναπαράσταση της θέσης)

$$\Rightarrow \boxed{U^\dagger(\delta\vec{a})\,\vec{r}\,U(\delta\vec{a}) = \vec{r} - \frac{i}{\hbar}(i\hbar)\,\delta\vec{a} = \vec{r} + \delta\vec{a}}$$

2) Από την εξίσωση Schrödinger έχει δειχθεί ότι μία κατάσταση $|\psi\rangle$ εξελίσσεται χρονικά με την ακόλουθη μορφή:

$$|\psi,t\rangle = \sum_n a_n\, e^{-iE_n t/\hbar}\,|E_n,0\rangle = e^{-iHt/\hbar}\,\overbrace{\sum_n a_n\,|E_n,0\rangle}^{|\psi,0\rangle} = e^{-iHt/\hbar}\,|\psi,0\rangle = U(t)\,|\psi,0\rangle$$

$$\langle\vec{r}|\psi,t\rangle = \psi(\vec{r},t) = \langle\vec{r}|\,U(t)\,|\psi,0\rangle = \langle\vec{r}|\,U(t)\,I\,|\psi,0\rangle =$$

$$= \langle\vec{r}|\,U(t)\left(\int_{\text{όλος ο χώρος}} d^3\vec{r}\,'\,|\vec{r}\,'\rangle\langle\vec{r}\,'|\right)|\psi,0\rangle = \int_{\text{όλος ο χώρος}} d^3r'\,\langle\vec{r}|\,U(t)\,|\vec{r}\,'\rangle\langle\vec{r}\,'|\psi,0\rangle \Rightarrow$$

Κβαντική Ι

Τεστ 8

4/12/14

Όνομα: Νάκας Θεόδωρος

ΑΜ: 6557

1. Δείξτε ότι ο τελεστής **απειροστών** μετατοπίσεων μετασχηματίζει τον τελεστή της θέσης ως εξής $U^\dagger(\mathbf{a})\,\mathbf{x}\,U(\mathbf{a}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$. Θεωρείστε απειροστά μικρό διάνυσμα μετατόπισης. (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τον μεταθέτη θέσης-ορμής).. (+++)
2. Δείξτε ότι η χρονικά εξελιγμένη κυματοσυνάρτηση κβαντικού συστήματος μπορεί να γραφεί ως: $\psi(x,t) = \int dx_0\, U(x,t;x_0,t_0)\,\psi(x_0,t_0)$. Βρείτε την μορφή του διαδότη U. (+++)

2) Συνέχεια: $\psi(\vec{r},t) = \langle \vec{r}|\psi,t\rangle = \int_{\text{όλος ο χώρος}} d^3r' \underbrace{\langle \vec{r}|U(t)|\vec{r}'\rangle}_{U(\vec{r},\vec{r}',t)} \psi(\vec{r},t=0)$

Γενικότερα για αρχική χρονική στιγμή $t=t_0$ θα είναι:

$$|\psi,t\rangle = \sum_n a_n e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar} |E_n,t_0\rangle = e^{-iH(t-t_0)/\hbar} \sum_n a_n |E_n,t_0\rangle =$$

$$= e^{-iH(t-t_0)/\hbar} |\psi,t_0\rangle = U(t,t_0)|\psi,t_0\rangle$$

και επίσης: $\langle \vec{r}|\psi,t\rangle = \int_{\text{όλος ο χώρος}} d^3r' \underbrace{\langle \vec{r}|U(t,t_0)|\vec{r}'\rangle}_{U(\vec{r},\vec{r}',t,t_0)} \underbrace{\langle \vec{r}'|\psi,t_0\rangle}_{\psi(\vec{r}',t_0)} \Rightarrow$

$$\boxed{U(\vec{r},\vec{r}',t,t_0) = \langle \vec{r}|e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}|\vec{r}'\rangle}$$