ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Εφαρμοσμένη Στατιστική

Έλεγχοι υποθέσεων

Διδάσκων: Επίκουρος Καθηγητής
Κωνσταντίνος Μπλέκας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Μέρος IV. Ελεγχοι Υποθέσεων (Hypothesis Testing)

- **Βασικές έννοιες**
- **Γενική μεθοδολογία: Σφάλμα τύπου Ι και P-value**
- **Στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων για ειδικές περιπτώσεις**

Βασικές έννοιες

Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων: μία συμπερασματική διαδικασία / μέθοδος σε στοχαστικά προβλήματα αποφάσεων μεταξύ δύο εναλλακτικών υποθέσεων:

$\mathbf{H_0}$: μηδενική υπόθεση (null hypothesis)

$\mathbf{H_1}$: εναλλακτική υπόθεση (alternative hypothesis)

Η <u>βασική ιδέα</u> είναι να θέτουμε ως μηδενική υπόθεση αυτή που αμφισβητούμε (αμφιβάλλουμε) και εξετάζοντας ένα τυχαίο δείγμα να δούμε εάν είναι **ακραίο** και προκύπτει σοβαρός λόγος απόρριψης της H_0.

<u>Είδη σφαλμάτων</u>

- P(**σφάλμα τύπου I**)=P(type I error)=P(απόρριψη της H_0 | H_0 true)
- P(**σφάλμα τύπου II**)=P(type II error)=P(μη απόρριψη της H_0 | H_1 true)

Βασικές έννοιες (συν.)

2 μορφές ελέγχου:

- Μονόπλευρος έλεγχος (one – tailed)

$$\text{δεξιόπλευρο} \quad \begin{matrix} H_0 : \mu \le \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{matrix} \quad \eta' \quad \begin{matrix} H_0 : \mu \ge \mu_0 \\ H_0 : \mu < \mu_0 \end{matrix} \quad \text{αριστερόπλευρος}$$

- Αμφίπλευρος έλεγχος (two – tailed)

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \ne \mu_0$$

2 μεθοδολογίες

- Καθορίζοντας μία ανεκτή τιμή σφάλματος τύπου I
- Υπολογισμός της P-τιμής του δείγματος

1η μέθοδος: με βάση τη τιμή σφάλματος τύπου I

Βήματα της διαδικασίας ελέγχου:

1. Ορίζουμε τις υποθέσεις H_0, H_1
2. Ορίζουμε το επίπεδο σημαντικότητας *a* του ελέγχου
3. Ορίζουμε τη στατιστική συνάρτηση ελέγχου *T(X)*
4. Επιλογή τυχαίου δείγματος από τον πληθυσμό και υπολογισμός της τιμής της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου
5. Ορίζουμε την περιοχή απόρριψης ή κρίσιμη περιοχή (*critical region*) του ελέγχου
6. Εξετάζουμε αν η τιμή της *T(X)* του τ.δ. βρίσκεται ή όχι στην κρίσιμη περιοχή, ώστε να αποφασίσουμε αν η H_0 θα απορριφθεί ή όχι

<u>Παρατηρήσεις</u>

- Όταν απορρίπτεται η H_0 τότε το τυχαίο δείγμα ονομάζεται στατιστικά σημαντικό (*statistically significant*) και σημαίνει ότι διαφέρει σημαντικά από αυτό που αναμενόταν από την H_0
- Όσο πιο μικρή είναι η τιμή του επιπέδου σημαντικότητας a, τόσο πιο σημαντικό στατιστικά είναι το αποτέλεσμα του ελέγχου.

2η μέθοδος: Υπολογισμός της P-τιμής

- Υπολογίζουμε την πιθανότητα να εμφανιστεί η τιμή της στατιστικής συνάρτησης T(X) που εμφανίστηκε στο δείγμα ή κάποια τιμή μεγαλύτερη από αυτή, με δεδομένο ότι ισχύει η συνθήκη H0
- Αυτή η πιθανότητα ονομάζεται **P-τιμή (P-value)** του δείγματος
- Υπολογίζοντας την P-τιμή γνωρίζουμε πόσο πιθανή είναι η εμφάνιση του δείγματος που πήραμε από την υπόθεση ότι η H_0 είναι αληθής.
- Ετσι, όσο πιο μικρή είναι η P-τιμή, τόσο πιο ισχυρές είναι οι ενδείξεις απόρριψης της H_0, ή αλλιώς τόσο πιο σημαντική είναι η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου.

  Αν P-value ≤ a => σε επίπεδο σημαντικότητας a η H_0 απορρίπτεται

  Αν P-value > a => σε επίπεδο σημαντικότητας a η H0 **δεν** απορρίπτεται

Δηλαδή

- **P-τιμή**: *η ελάχιστη τιμή του επιπέδου σημαντικότητας για να απορριφθεί η H_0*
- **P-τιμή**: *το μέτρο το οποίο εκφράζει πόσο ισχυρές είναι οι ενδείξεις που προκύπτουν από το δείγμα εναντίον της H_0*

Έλεγχοι υποθέσεων για συγκεκριμένες περιπτώσεις

(Α) Στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων για τη μέση τιμή (**μ**) ενός πληθυσμού

Ελέγχουμε την υπόθεση H0: μ=μ0 (η άγνωστη μέση τιμή έχει τιμή μ0)
Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

(α) γνωστή διασπορά (z-test)

Βασιζόμαστε στο γνωστή σχέση του δειγματικού μέσου $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Εξετάζουμε τις 3 πιθανές εναλλακτικές υποθέσεις:

(α1) H_1: $\mu > \mu_0$

$$P\left(\overline{X} > \overline{x} \mid H_0 \text{ is true}\right) \leq a \Rightarrow P\left(\overline{X} < \overline{x} \mid \mu = \mu_0\right) \geq 1 - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right) \geq 1 - a \Rightarrow \overline{x} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_a$$

όπου $z_a = \Phi^{-1}(1-\alpha)$

Έλεγχοι υποθέσεων για συγκεκριμένες περιπτώσεις (συν.)

(α2) H_1: $\mu<\mu_0$

$$P\left(\bar{X} < \bar{x} \mid H_0 \text{ is true}\right) \le a \Rightarrow P\left(\bar{X} < \bar{x} \mid \mu = \mu_0\right) \le a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \le a \Rightarrow \bar{x} \le \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_a$$

$\Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1-\alpha) = -z_a$

(α3) H_1: $\mu \neq \mu_0$

$$P\left(\left|\bar{X}-\mu_0\right| > \delta \mid H_0 \text{ is true}\right) \le a \Rightarrow P\left(\left|Z\right| < \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\delta\right) \le a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\delta\right) + P\left(Z < -\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\delta\right) \le a \Rightarrow \ldots \Rightarrow \delta \ge \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{a/2}$$

άρα περιοχή απόρριψης $\bar{x} \ge \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{a/2} \;\wedge\; \bar{x} \le \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{a/2}$

Έλεγχοι υποθέσεων για συγκεκριμένες περιπτώσεις

(β) άγνωστη διασπορά (t-test)

Βασιζόμαστε στο γνωστή σχέση $Y = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ όπου $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X} \right)^2$

Παρόμοια για τις 3 πιθανές εναλλακτικές υποθέσεις έχουμε τις κρίσιμες περιοχές (περιοχές απόρριψης):

(β1) $H_1 = \mu_1 > \mu_0$	(β2) $H_1 = \mu_1 < \mu_0$	β(3) $H_1 = \mu_1 \neq \mu_0$
$\bar{x} \geq \mu_0 + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a)$	$\bar{x} \leq \mu_0 - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a)$	$\bar{x} \geq \mu_0 + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a/2)$ $\bar{x} \leq \mu_0 - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a/2)$

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ. http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1052.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Επίκουρος Καθηγητής Κωνσταντίνος Μπλέκας. «Εφαρμοσμένη Στατιστική. Έλεγχοι υποθέσεων». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1052.

Σημείωμα Αδειοδότησης