



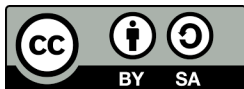
# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ



## Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές Ι

Ελαστικότητα και εφαρμογές

Διδάσκων: Επίκουρος Καθηγητής  
Αθανάσιος Σταυρακούδης



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
Πρόγραμμα για τη ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Υπολογισμός της ελαστικότητας ζήτησης με το  
πρόγραμμα Maxima

**ΜΗ ΕΙΝΑΙ ΒΑΣΙΛΙΚΗΝ ΑΤΡΑΠΟΝ ΕΠΙ  
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ**

Αθανάσιος Σταυρακούδης

<http://stavrakoudis.econ.uoi.gr>

21 Νοεμβρίου 2013



$$y = f(x)$$

Αν η τιμή του  $x$  μεταβληθεί κατά  $\Delta x$ , δηλαδή από  $x$  σε  $x + \Delta x$ , τότε η αντίστοιχη τιμή του  $y$  θα μεταβληθεί κατά  $\Delta y$ :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Αυτή είναι η απόλυτη μεταβολή. Η σχετική μεταβολή του  $y$  ορίζεται από το κλάσμα:

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{f(x)}$$

ενώ η σχετική μεταβολή του  $x$  είναι:

$$\frac{\Delta x}{x}$$



Αν διαιρέσουμε τις σχετικές μεταβολές μεταξύ τους θα λάβουμε:

$$\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x \Delta y}{y \Delta x} = \frac{x}{f(x)} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ο λόγος αυτός ονομάζεται *μέση ελαστικότητα* της μεταβλητής  $y$  στο διάστημα  $[x, x + \Delta x]$ .

Συμβολίζουμε το λόγο  $E_{xy}$  και διαβάζουμε: ελαστικότητα του  $y$  ως προς  $x$ :

$$E_{xy} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x \Delta y}{y \Delta x} = \frac{x}{f(x)} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



# Απλός υπολογισμός ελαστικότητας συνάρτησης ζήτησης

Αν η συνάρτηση ζήτησης είναι:  $q = 8 - p/5$  Να υπολογιστεί η ελαστικότητα όταν η τιμή μεταβάλλεται από  $p_1 = 10$  σε  $p_2 = 11$ .

1 Ορίζουμε τη συνάρτηση ζήτησης:

$$1 \quad D(p) := 8 - p/5;$$

2 Ορίζουμε τις τιμές του προϊόντος  $p_1$  και  $p_2$ :

$$1 \quad p_1 : 10;$$

$$2 \quad p_2 : 11;$$

3 Υπολογίζουμε τις αντίστοιχες ποσότητες:

$$1 \quad q_1 : D(p_1);$$

$$2 \quad q_2 : D(p_2);$$

4 Εφαρμόζουμε τον τύπο της ελαστικότητας

$$1 \quad E : ((q_2 - q_1)/q_1) / ((p_2 - p_1)/p_1);$$



Τοξοειδής ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή:

$$E_D = \frac{\Delta q}{\bar{q}} / \frac{\Delta p}{\bar{p}}$$

όπου:

$$\bar{q} = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

και

$$\bar{p} = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

[cross-elasticity.xls](#)  
[Elasticity-03.wxm](#)



Η ελαστικότητα του  $y$  ως προς  $x$  ορίζεται ως:

$$E_{xy} = \frac{dy}{y} / \frac{dx}{x} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{f(x)} f'(x)$$





# Πλεονεκτήματα χρήσης διαφορικού λογισμού

- 1 Μπορούμε να υπολογίσουμε την ελαστικότητα σε οποιοδήποτε σημείο μιας καμπύλης.
- 2 Αν ξέρουμε τη συνάρτηση ζήτησης ή προσφοράς, τότε επαρκεί μόνο η ποσότητα σε κάποιο σημείο για να οριστεί η ελαστικότητα.
- 3 Αποφεύγουμε τη σύγχυση που προκύπτει με την ελαστικότητα ανά κατεύθυνση.
- 4 Η ακρίβεια του υπολογισμού της ελαστικότητας είναι η μεγαλύτερη δυνατή, ανεξάρτητα από το μέγεθος των εμπλεκόμενων ποσοτήτων (τιμές, ποσότητες, μεταβολές, κτλ)
- 5 Δεν απαιτείται κανένας υπολογισμός ποσοστιαίας μεταβολής.



# Ελαστικότητα σημείου της συνάρτησης ζήτησης

Έστω η συνάρτηση ζήτησης:

$$q = D(p) = 4 - \frac{1}{2}p$$

Να υπολογιστεί η ελαστικότητα της ζήτησης ως προς την τιμή στα σημεία  $p = 2$  και  $p = 5$  και να υπολογιστεί το σημείο μοναδιαίας ελαστικότητας.

Στο **Maxima** μπορούμε να γράψουμε:

```
1 D(p) := 4 - p/2;  
2 Ed(p) := '( p/D(p) * diff(D(p), p) );  
3 Ed(2);  
4 Ed(5);  
5 sol : solve(Ed(p)=-1, p);  
6 p0 : rhs(sol[1]);  
7 q0 : D(p0);
```

Elasticity-01.wxm



Έστω η συνάρτηση:

$$y = f(x) = c x^a$$

όπου  $c$  μια σταθερά. Να αποδειχθεί ότι:

$$E_x y = a$$



# Παραδείγματα χρήσης της ελαστικότητας και πιθανές εργασίες

- Υποκατάστατα αγαθά και ελαστικότητα.
- Αυστηρός ή χαλαρός ορισμός του «αγαθού» και ελαστικότητα.
- Ελαστικότητα και ολικό έσοδο της επιχείρησης.
- Ελαστικότητα και κατανομή φορολογικών βαρών.
- Ελαστικότητα και πολιτική τιμολόγησης.
- Ελαστικότητα ζήτησης ως προς το εισόδημα.
- Υπολογισμοί ελαστικότητας αγαθών σε διάφορες χώρες.



Σας ευχαριστώ για την προσοχή σας

Είμαι στη διάθεσή σας για σχόλια, απορίες και ερωτήσεις



# Τέλος Ενότητας



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



**Σημειώματα**



# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ.

<http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1064>.

# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων:

Επίκουρος Καθηγητής Αθανάσιος

Σταυρακούδης. «Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές IV.

Ελαστικότητα και εφαρμογές». Έκδοση: 1.0.

Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή

διεύθυνση:

<http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1064>.

# Σημείωμα Αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή, Διεθνής Έκδοση 4.0 [1] ή μεταγενέστερη.



- [1] <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>.