



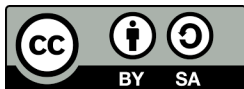
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ  
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ



# Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές Ι

Ο τέλειος ανταγωνισμός, υπολογισμοί με  
το Maxima

Διδάσκων: Επίκουρος Καθηγητής  
Αθανάσιος Σταυρακούδης



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ  
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Λειτουργία της επιχείρησης στον τέλειο  
ανταγωνισμό

Υπολογισμοί με το Maxima

**ΜΗ ΕΙΝΑΙ ΒΑΣΙΛΙΚΗΝ ΑΤΡΑΠΟΝ ΕΠΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ**

Αθανάσιος Σταυρακούδης

<http://stavrakoudis.econ.uoi.gr>

9 Δεκεμβρίου 2013

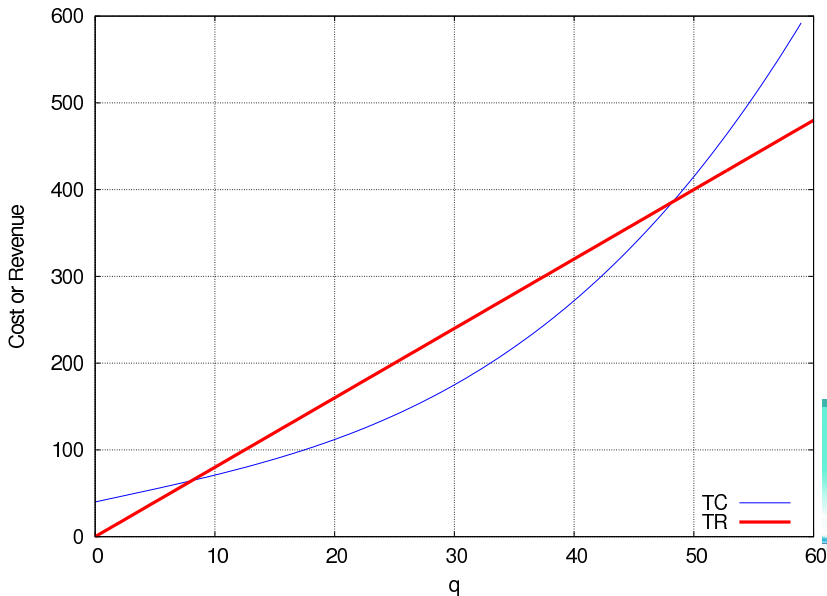


# Επισκόπηση 1

- 1 Νεκρό σημείο
- 2 Μεγιστοποίηση
- 3 Τιμή και οριακό έσοδο
- 4 Τιμή άνω του κόστους
- 5 Τιμή κάτω του κόστους



# Ανάλυση νεκρού σημείου



## Παράδειγμα νεκρού σημείου

### Ολικό έσοδο

Ας υποθέσουμε πως η επιχείρηση πουλά τον προϊόν της προς 8 χρηματικές μονάδες. Τότε το ολικό έσοδο (Total Revenue) της επιχείρησης είναι:

$$TR(q) = p \times q = 8q$$

όπου  $q$  είναι η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος.

### Συνάρτηση ολικού κόστους

Έστω πως η συνάρτηση ολικού κόστους παραγωγής είναι:

$$TC(q) = 40 + 3q - 0.01q^2 + 0.002q^3$$



## Επίλυση νεκρού σημείου

```
1 TC(q) := 40 + 3*q - 0.01*q^2 + 0.002*q^3;
2 TR(q) := 8*q;
3 solve(TC(q)=TR(q), q);
4 realroots(TC(q)=TR(q));
5 plot2d([TC(q), TR(q)],
6 [q, 0, 60], [y, 0, 600],
7 [xlabel, "q"], [ylabel, "Cost"],
8 [style, [lines, 2,1], [lines, 8,2]],
9 [legend, "TC", "TR"],
10 [gnuplot_preamble, "set grid; set key bottom;"]);
```

PerfComp-01.wxm



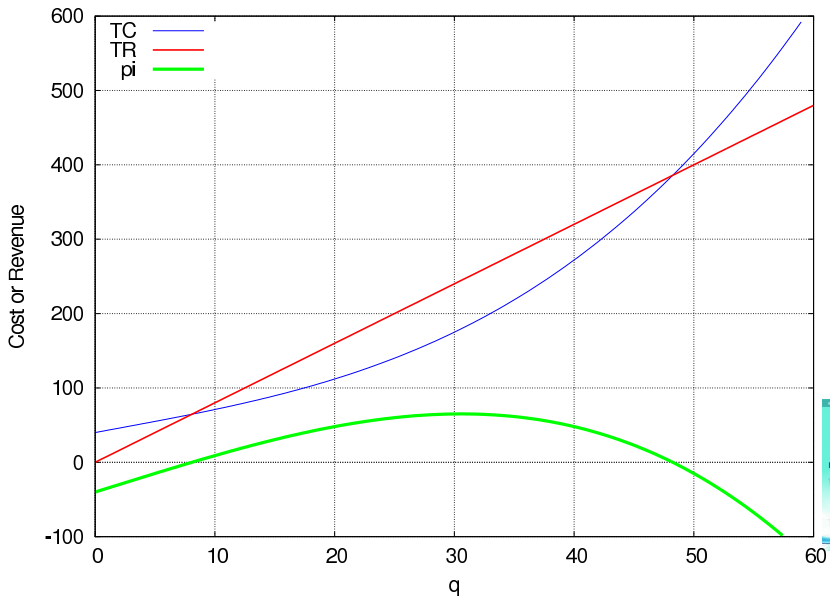
## Επισκόπηση 2

- 1 Νεκρό σημείο
- 2 Μεγιστοποίηση**
- 3 Τιμή και οριακό έσοδο
- 4 Τιμή άνω του κόστους
- 5 Τιμή κάτω του κόστους





# Η καμπύλη κέρδους



# Η συνάρτηση κέρδους $\pi$

## Η συνάρτηση κέρδους

$$TR(q) = p \times q = 8q$$

$$TC(q) = 40 + 3q - 0.01q^2 + 0.002q^3$$

$$\pi(q) = TR(q) - TC(q)$$

$$= -40 + 5q + 0.01q^2 - 0.002q^3$$

## Μεγιστοποίηση κέρδους

- Στο σημείο όπου  $TR(q) = TC(q)$  ισχύει  $\pi = 0$ , το κέρδος είναι μηδενικό.
- Σε ποιο σημείο μεγιστοποιείται το κέρδος;



## Επίλυση μεγιστοποίησης κέρδους

```
1 TC(q) := 40 + 3*q - 0.01*q^2 + 0.002*q^3;
2 TR(q) := 8*q;
3 pi(q) := ''(TR(q) - TC(q));
4 pi1(p) := ''(diff(pi(q), q));
5 sol : solve(pi1(q)=0, q);
6 if rhs(sol[1])>0 then
7     q0 : rhs(sol[1])
8 else
9     q0 : rhs(sol[2]);
10 pi2(q) := ''(diff(pi(q), q, 2));
11 mPr : pi2(q0), numer;
12 if (mPr<0) then "maximum found";
```

PerfComp-02.wxm



## Επισκόπηση 3

- 1 Νεκρό σημείο
- 2 Μεγιστοποίηση
- 3 Τιμή και οριακό έσοδο
- 4 Τιμή άνω του κόστους
- 5 Τιμή κάτω του κόστους



## Οριακό έσοδο

Το οριακό έσοδο είναι η μεταβολή του ολικού εσόδου ως προς τη μεταβολή του προϊόντος:

$$MR(q) = \frac{dTR(q)}{dq} \quad (1)$$

Επειδή στον τέλειο ανταγωνισμό η επιχείρηση είναι λήπτης τιμών από την αγορά, η συνάρτηση ολικού εσόδου είναι συνήθως γραμμική ως προς την ποσότητα με συντελεστή την τιμή:

$$TR(q) = p q \quad (2)$$

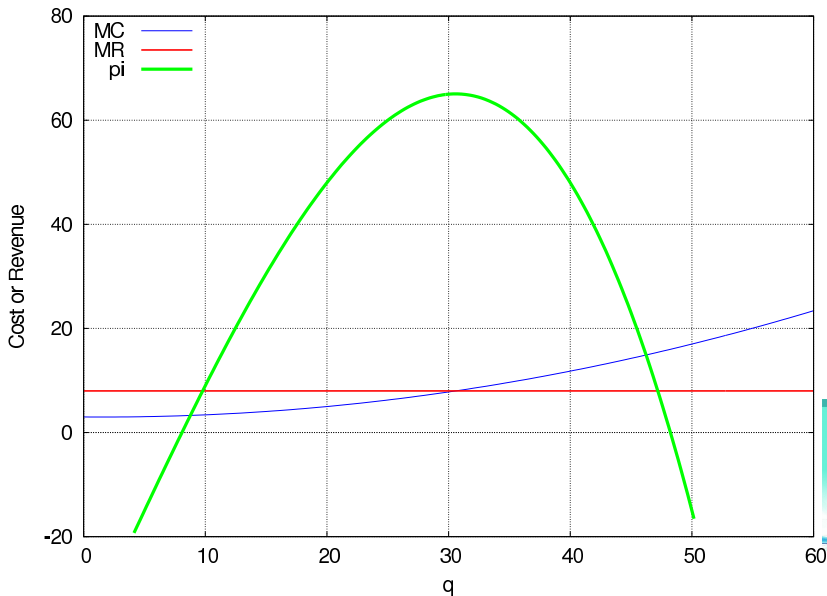
όποτε το οριακό έσοδο είναι η τιμή της αγοράς:

$$MR(q) = \frac{dTR(q)}{dq} = p \quad (3)$$

Δηλαδή το οριακό έσοδο είναι ίσο με την τιμή της αγοράς.



# Οριακό έσοδο και καμπύλη κέρδους



# Τομή των καμπυλών οριακού κόστους και οριακού κέρδους

```
1 TC(q) := 40 + 3*q - 0.01*q^2 + 0.002*q^3;
2 TR(q) := 8*q;
3 pi(q) := ''(TR(q) - TC(q));
4 MR(q) := ''(diff(TR(q), q));
5 MC(q) := ''(diff(TC(q), q));
6 sol : solve(MC(q)=MR(q), q);
7 if rhs(sol[1])>0 then q0 : rhs(sol[1])
8   else q0 : rhs(sol[2]);
9 plot2d([MC(q), MR(q), pi],
10 [q, 0, 60], [y, -20, 80],
11 [xlabel, "q"], [ylabel, "Cost or Revenue"],
12 [style, [lines, 2,1], [lines, 4,2], [lines, 8,3]],
13 [legend, "MC ", "MR ", "pi "],
14 [gnuplot_preamble, "set grid; set key left;"]);
```



## Επισκόπηση 4

- 1 Νεκρό σημείο
- 2 Μεγιστοποίηση
- 3 Τιμή και οριακό έσοδο
- 4 Τιμή άνω του κόστους**
- 5 Τιμή κάτω του κόστους





## Τιμή και μέσο ολικό κόστος

Το κέρδος ισούται με το ολικό έσοδο μείον το ολικό κόστος:

$$\pi(q) = TR(q) - TC(q)$$

Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με την ποσότητα  $q$ :

$$\pi(q) = \left( \frac{TR(q)}{q} - \frac{TC(q)}{q} \right) \times q$$

Ισχύει:

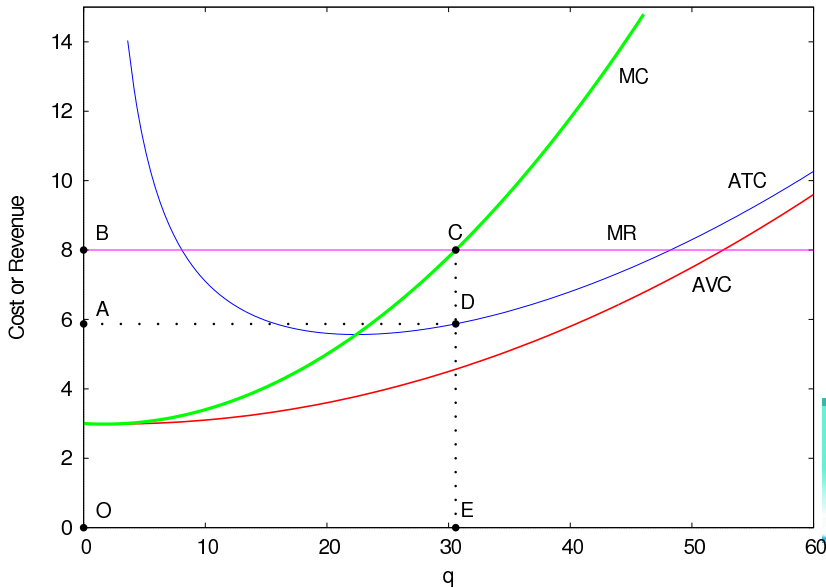
$$\frac{TR(q)}{q} = p \quad \frac{TC(q)}{q} = ATC(q)$$

Επομένως:

$$\pi(q) = (p - ATC(q)) \times q$$



## Τιμή και καμπύλες κόστους



# Ορισμοί των συναρτήσεων στο Maxima (1)

Βήμα 1: Συναρτήσεις σταθερού, μεταβλητού και ολικού κόστους

$$FC = 40$$

$$VC = 3q - 0.01q^2 + 0.002q^3$$

$$TC = FC + VC$$



# Ορισμοί των συναρτήσεων στο Maxima (1)

Βήμα 1: Συναρτήσεις σταθερού, μεταβλητού και ολικού κόστους

$$FC = 40$$

$$VC = 3q - 0.01q^2 + 0.002q^3$$

$$TC = FC + VC$$

```
1 FC(q) : 40;  
2 VC(q) := 3*q - 0.01*q^2 + 0.002*q^3;  
3 TC(q) := '(FC(q) + VC(q));
```



## Ορισμοί των συναρτήσεων στο Maxima (2)

Βήμα 2: συναρτήσεις μέσου μεταβλητού, μέσου ολικού και οριακού κόστους

$$ATC = \frac{TC}{q}$$

$$AVC = \frac{VC}{q}$$

$$MC = \frac{dTC}{dq}$$



## Ορισμοί των συναρτήσεων στο Maxima (2)

Βήμα 2: συναρτήσεις μέσου μεταβλητού, μέσου ολικού και οριακού κόστους

$$ATC = \frac{TC}{q}$$

$$AVC = \frac{VC}{q}$$

$$MC = \frac{dTC}{dq}$$

- 1  $ATC(q) := '(TC(q)/q);$
- 2  $AVC(q) := '(VC(q)/q);$
- 3  $MC(q) := '(diff(TC(q), q));$



## Ορισμοί των συναρτήσεων στο Maxima (3)

Βήμα 3: συναρτήσεις ολικού και οριακού κέρδους

$$TR = p_0 q$$

$$MR = \frac{dTR}{dq}$$



## Ορισμοί των συναρτήσεων στο Maxima (3)

Βήμα 3: συναρτήσεις ολικού και οριακού κέρδους

$$TR = p_0 q$$

$$MR = \frac{dTR}{dq}$$

```
1 TR(q) := '(p0*q);  
2 MR(q) := '(diff(TR(q), q));
```





# Υπολογισμός της λύσης

Βήμα 4: Υπολογισμός της λύσης

Λύνουμε την εξίσωση:  $MC = MR$

$$0.006q^2 - 0.02q + 3 = 8$$



# Υπολογισμός της λύσης

Βήμα 4: Υπολογισμός της λύσης

Λύνουμε την εξίσωση:  $MC = MR$

$$0.006q^2 - 0.02q + 3 = 8$$

```
1 sol : solve(MC(q)=MR(q), q);  
2 if rhs(sol[1])>0 then  
3     q0 : rhs(sol[1])  
4 else  
5     q0 : rhs(sol[2]);
```



## Μέσο κόστος και ποσοστό κέρδους Maxima (5)

Βήμα 5: Μέσο κόστος και ποσοστό κέρδους ανά μονάδα προϊόντος

$ATC(q_0)$  μέσο κόστος στο σημείο  $q = q_0$

$\frac{p_0 - ATC(q_0)}{p_0} \times 100$  ποσοστό κέρδους στο σημείο  $q = q_0$

- 1  $p_1 : ATC(q_0);$
- 2  $(p_0 - ATC(q_0)) / p_0 * 100;$
- 3  $(p_0 - p_1) / p_0 * 100;$



# Το γράφημα

```
1 pp: [[0,0],[q0,p0], [q0,0], [0, p0], [0,ATC(q0)],
2     [q0, ATC(q0)]];
3 plot2d([ATC(q), AVC(q), MC(q), MR(q), [discrete, pp]],
4     [q, 0, 60], [y, 0, 15], [legend, ""],
5     [xlabel, "q"], [ylabel, "Cost or Revenue"],
6     [style, [lines, 2,1], [lines, 4,2], [lines, 8,3],
7     [lines, 2, 4], [points, 3,-1,1]],
8     [gnuplot_preamble, "set key bottom;
9     set label 'ATC' at 53, 10;
10    set label 'AVC' at 50, 7;
11    set label 'MC' at 44, 13;
12    set label 'MR' at 43, 8.5;
13    set label 'A' at 1,6.3;
14    .....
15    set label 'O' at 1, 0.5;"]);
```



## Επισκόπηση 5

- 1 Νεκρό σημείο
- 2 Μεγιστοποίηση
- 3 Τιμή και οριακό έσοδο
- 4 Τιμή άνω του κόστους
- 5 Τιμή κάτω του κόστους



## Λειτουργία της επιχείρησης με ζημία

### Μερικές παρατηρήσεις

- Μια επιχείρηση μπορεί να επιλέξει να λειτουργεί με ζημία κάποιο διάστημα (βραχυχρόνια) όταν περιμένει να κάνει κέρδη στο μέλλον (μακροχρόνια).
- Ένα εστιατόριο δεν κλείνει ως επιχείρηση επειδή μία μέρα λειτούργησε με ζημία.
- Μια αεροπορική εταιρεία δεν κλείνει επειδή για ένα μήνα εμφάνισε ζημία.
- Ένα παραλιακό ξενοδοχείο κλείνει προσωρινά τη χειμερινή περίοδο.
- Ένα θέατρο παραμένει κλειστό κάποιες μέρες της εβδομάδας.



## Τιμή κάτω του κόστους;

Έστω πως ισχύει:

$$p_0 = 5$$

$$FC(q) = 40$$

$$VC(q) = 3q - 0.01q^2 + 0.002q^3$$

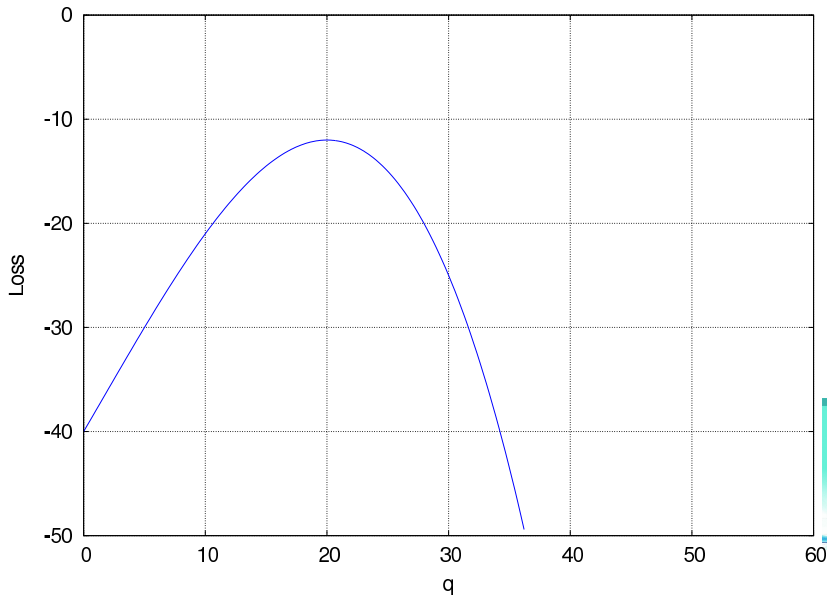
$$TC(q) = FC(q) + VC(q)$$

Τότε:

Σε ποια ποσότητα προϊόντος ελαχιστοποιείται η ζημία της επιχείρησης;

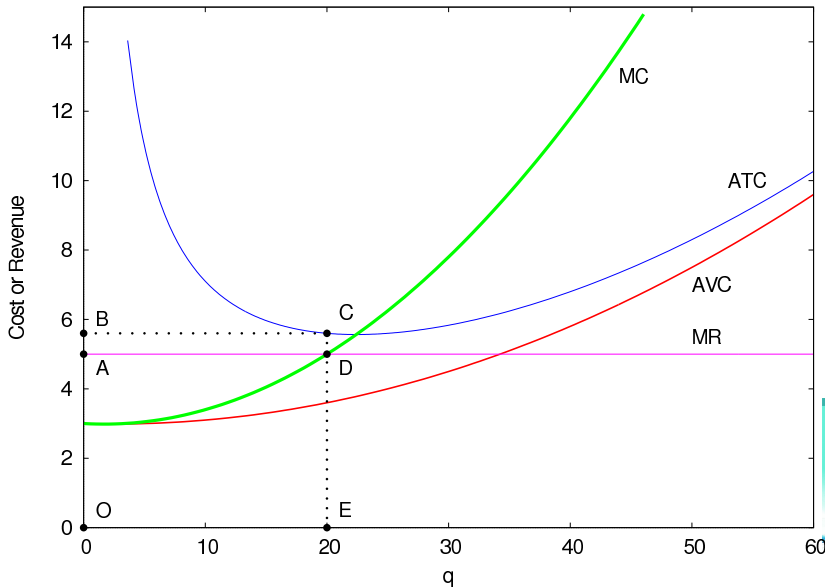


## Γράφημα αρνητικού κέρδους





Η τιμή της αγοράς είναι κάτω από το μέσο ολικό κόστος



# Σταδιακή λύση στο Maxima

## Βήμα 1: Δεδομένα του προβλήματος

```
1 q0      : 5;  
2 FC(q)   : 40;  
3 VC(q)   := 3*q - 0.01*q^2 + 0.002*q^3;
```

## Βήμα 2: Παράγωγες συναρτήσεις

```
1 TC(q)   := ''(FC(q) + VC(q));  
2 TR(q)   := ''(p0*q);  
3 ATC(q)  := ''(TC(q)/q);  
4 AVC(q)  := ''(VC(q)/q);
```

## Βήμα 3: Συναρτήσεις κέρδους και οριακού εσόδου

```
1 pi(q)   := ''(TR(q) - TC(q));
```



# Υπολογισμός της λύσης ελαχιστοποίησης ζημίας

## Βήμα 4: Υπολογισμός της λύσης

```
1 sol : solve(MC(q)=MR(q), q);  
2 if rhs(sol[1])>0 then  
3     q0 : rhs(sol[1])  
4 else  
5     q0 : rhs(sol[2]);
```

## Βήμα 5: Διαφορά τιμής

```
1 p1 : ATC(q0);  
2 pi(q0);  
3 p0-p1;
```



# Το γράφημα

```
1 pp: [[0,0],[q0,p0], [q0,0], [0, p0], [0,ATC(q0)],
2     [q0, ATC(q0)]];
3 plot2d([ATC(q), AVC(q), MC(q), MR(q),
4     [discrete, pp]],
5     [q, 0, 60], [y, 0, 15],
6     [xlabel, "q"], [ylabel, "Loss or Revenue"],
7     [style,
8     [lines, 2,1], [lines, 4,2], [lines, 8,3],
9     [lines, 2, 4],[points, 3,-1,1]],
10    [legend, ""],
11    [gnuplot_preamble, "set key bottom;
12     set label 'ATC' at 53, 10;
13     set label 'AVC' at 50, 7;
14     set label 'MC' at 44, 13;
15     .....
16     set label '0' at 1, 0.5;"]);
```



# Τέλος Ενότητας



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

**Σημειώματα**

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ.

<http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1064>.



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων:

Επίκουρος Καθηγητής Αθανάσιος

Σταυρακούδης. «Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές IV.

Ο τέλειος ανταγωνισμός, υπολογισμοί με το

Maxima». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1064>.

# Σημείωμα Αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή, Διεθνής Έκδοση 4.0 [1] ή μεταγενέστερη.



- [1] <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>.