ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ανοικτάμαθήματα
opencourses

Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές Ι

Στατιστικές κατανομές και έλεγχοι υποθέσεων με τη γλώσσα R

Διδάσκων: Επίκουρος Καθηγητής Αθανάσιος Σταυρακούδης

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

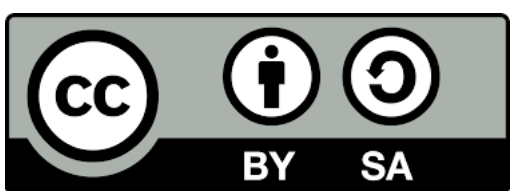
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Υπολογιστική Στατιστική με τη γλώσσα R

Αθανάσιος Σταυρακούδης

http://stavrakoudis.econ.uoi.gr

13 Δεκεμβρίου 2012

Απλές πράξεις με την R

```
> x <- c (1,2,3,4)
> min(x)
[1] 1
> max(x)
[1] 4
> sum(x)
[1] 10
> mean(x)
[1] 2.5
> median(x)
[1] 5
> var(x)
[1] 1.666667
> sqrt(x)
[1] 1.000000 1.414214 1.732051 2.000000
> x^2
[1]  1  4  9 16
```

Τυχαίοι αριθμοί με την R

Κανονική Κατανομή

```
> rnorm(30)
> rnorm(30,mean=15,sd=3)
> x <- rnorm(30,mean=15,sd=3)
```

Ομοιόμορφη Κατανομή

```
> runif(50)
> runif(50, min=0, max=4)
> x <- runif(50, min=0, max=4)
```

Άσκηση

Να κατασκευαστούν 100 τυχαίοι αριθμοί από κανονική κατανομή (0,1), να δοθούν τα περιγραφικά στατιστικά, και να κατασκευαστεί ιστόγραμμα συχνοτήτων

```
> x <- rnorm(100, mean=0, sd=1)

> min(x)
[1] -2.502098
> max(x)
[1] 2.683640
> mean(x)
[1] -0.1715795
> sqrt(var(x))
[1] 0.9961516
>hist(x, 11)
```

Σκέδαση και κύρτωση

library(moments)

```
> library(moments)
> kurkosis (x)
> skewness (x)
```

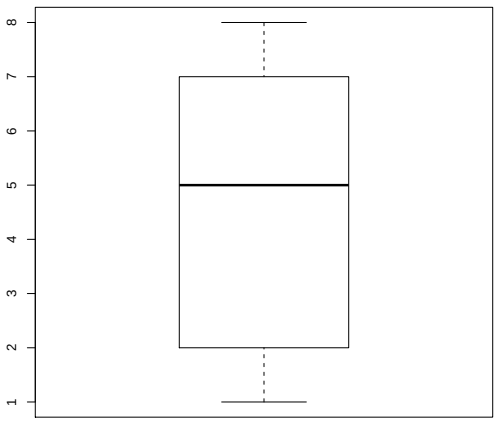
$$kurt = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right)^2}$$

$$skew = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3}{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right)^{3/2}}$$

Νέο γράφημα

boxplot

```
> x <- c(1,5,2,7,8)
> summary(x)
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
    1.0     2.0     5.0     4.6     7.0     8.0
> boxplot(x)
```



Συνδυακύμανση και συσχέτιση

```
> x <- c (1,5,2,7,8)
> y <- c (2,9,3,6,10)

> var(x,y)
[1] 9.25

> cov(x,y)
[1] 9.25


> cor(x ,y)
[1] 0.857917
```

Η συνάρτηση dnorm

Το ύψος της καμπύλης κανονικής κατατομής

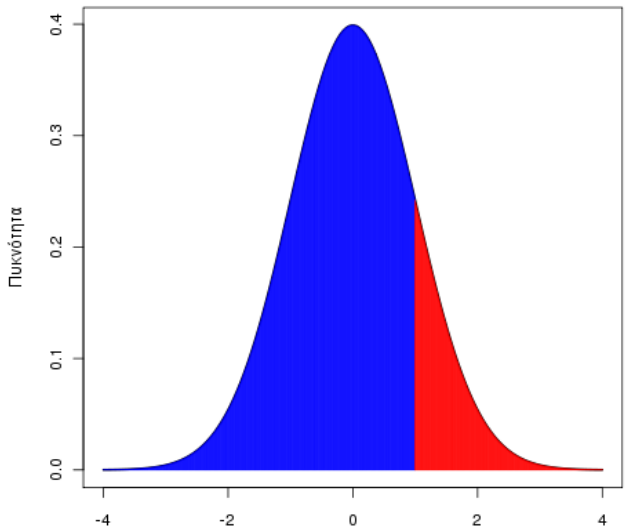
```
> dnorm(0)
[1] 0.3989423

> dnorm(1)
[1] 0.2419707

> dnorm(-1)
[1] 0.2419707

> dnorm(1,10,5)
[1] 0.01579003

> v <- c(-1,0,1)
> dnorm(v)
[1] 0.2419707 0.3989423 0.2419707
```

Η συνάρτηση pnorm

Το ολοκλήρωμα της συνάρτησης πιθανότητας

```
> pnorm(0)
[1] 0.5

> pnorm(1, mean=0, sd=1)
[1] 0.8413447

> pnorm(-1, mean=0)
[1] 0.1586553

> pnorm(1, mean=10, sd=5)
[1] 0.03593032

> v <- c(-1,0,1)
> pnorm(v)
[1] 0.1586553 0.5000000 0.8413447
```

Διαγραμματική επεξήγηση της συνάρτησης pnorm



Το εμβαδόν (ολοκλήρωμα) της περιοχής $(-\infty, 1)$ ισούται με 0.8413447

Το εμβαδόν (ολοκλήρωμα) της περιοχής $(1, \infty)$ ισούται με 0.1586553

```
> pnorm(1)
[1] 0.8413447
> 1-pnorm(1)
[1] 0.1586553
```

Η συνάρτηση qnorm

Σε ποιο x η πιθανότητα είναι p;

```
> qnorm(0.5)
[1] 0

> qnorm(0.84, mean=0)
[1] 0.9944579

> qnorm(0.157, mean=0, sd=2)
[1] -2.013729

> v <- c (0.2, 0.5, 0.9)
> qnorm(v, mean=1, sd=1)
[1] 0.1583788 1.0000000 2.2815516
```

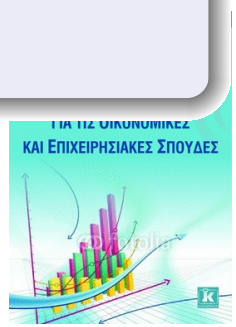
Συναρτήσεις κανονικής κατανομής

4 βασικές συναρτήσεις

dnorm	Η πυκνότητα πιθανότητας **d** στο σημείο **x**
pnorm	Η πιθανότητα **p** στο σημείο **x**
qnorm	Σε ποιο σημείο **x** η πυκνότητα πιθανότητας είναι **d**
rnorm	Τυχαίοι αριθμοί από κανονική κατανομή

Το ίδιο μοτίβο για άλλες κατανομές

dt	Η πυκνότητα πιθανότητας **d** στο σημείο **x** της κατανομής **t**
pbinom	Η πιθανότητα **p** στο σημείο **x** της διωνυμικής κατανομής
qchisq	Σε ποιο σημείο **x** η πυκνότητα πιθανότητας της κατανομής χ^2είναι **d**
rgamma	Τυχαίοι αριθμοί από τη γάμμα κατανομή



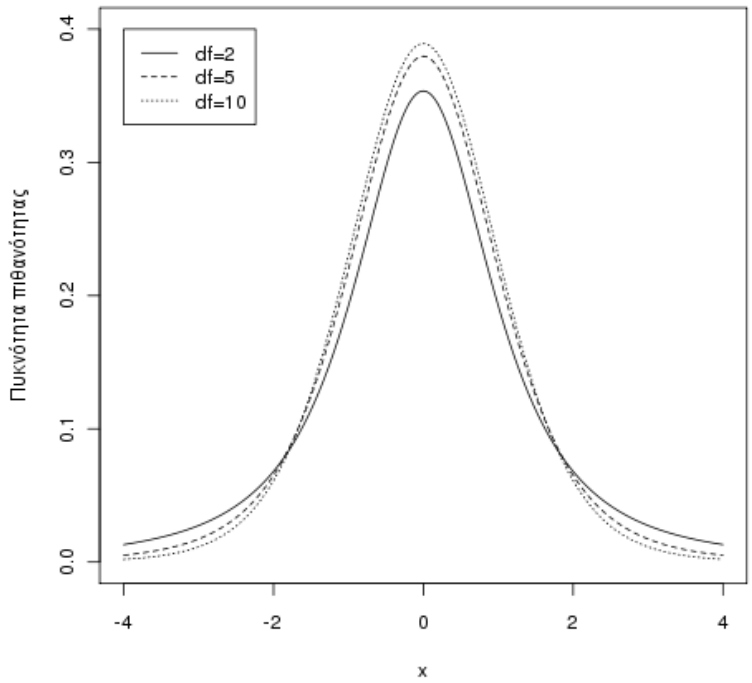
Συναρτήσεις t κατανομής

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

4 βασικές συναρτήσεις

- **rt** Αποδίδει τυχαίους αριθμούς από την t κατανομή
- **dt** Υπολογίζει το ύψος της καμπύλης της t κατανομής
- **pt** Υπολογίζει το ολοκλήρωμα της t κατανομής
- **qt** Υπολογίζει το σημείο στο οποίο η t κατανομή έχει δεδομένο ολοκλήρωμα, δηλαδή είναι η αντίστροφη της συνάρτησης **pt**.

Η κατανομή t διαγραμματικά




```
> x <- seq(-4, 4, by=0.01); y1 <- dt(x, df=2)
> y2 <- dt(x, df=5); y3 <- dt(x, df=10)
> plot(x, y1, ylim=c(0,0.5), lty=1, type="l", ylab="D
> lines(x, y2, lty=2); lines(x, y3, lty=3)
> legend(-4, 0.4, c("df=2","df=5", "df=10"),
        lty=c(1, 2, 3))
```

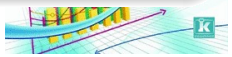
Πιθανότητες

Το ύψος (που ακολουθεί κανονική κατανομή) 40 φοιτητών έχει μέσο 172 και τυπική απόκλιση 4. Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος να έχει ύψος άνω του 178;

```
> pnorm(178, mean=172, sd=4, lower.tail=FALSE)
[1] 0.0668072
```

Το ύψος (που ακολουθεί κανονική κατανομή) 40 φοιτητών έχει μέσο 172 και τυπική απόκλιση 4. Ποια είναι η πιθανότητα κάποιος να έχει ύψος μέχρι 178;

```
> pnorm(178, mean=172, sd=4)
[1] 0.9331928
```



Διάστημα εμπιστοσύνης

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{x}}$$

```
> x  <- c (3,5,8,2,5,6,2,9)
> m  <- mean(x)
[1] 5
> sd <- sqrt(var(x))
[1] 2.618615
> n  <- length(x)
[1] 8
> e <- qt(0.975, df=n-1)*sd/sqrt(n)
[1] 2.189217
> m-e
[1] 2.810783
> m+e
[1] 7.189217
```

Έλεγχος υποθέσεων

Ερώτημα

Να βρεθεί αν το διάνυσμα τιμών **x** έχει μέσο μικρότερο του 5.

Υπολογισμός z

```
> x <- c(5,2,7,4,5)
> m <- mean(x)
> sd <- sqrt(var(x))
> n <- length(x)
> (m-5)/(sd/sqrt(n))
[1] -0.492366

> pnorm(-0.492366)
[1] 0.3112303
```

Μη απόρριψη

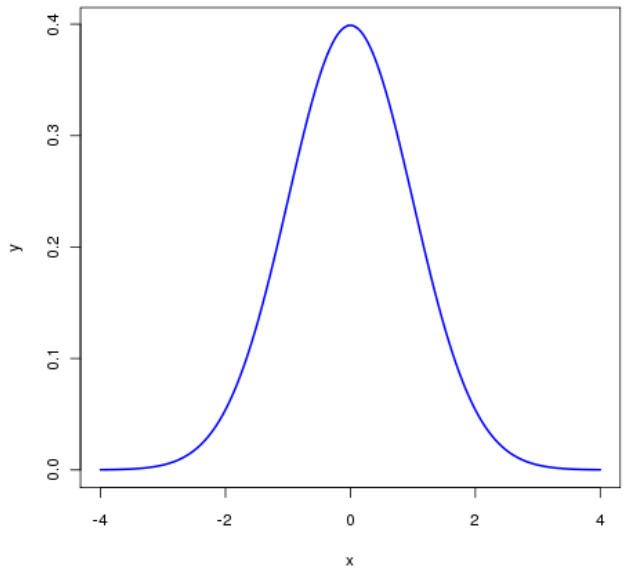
$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$H_0 : \bar{x} < 5$$
$$H_\alpha : \bar{x} \geq 5$$

Γράφημα τυπικής κανονικής κατανομής

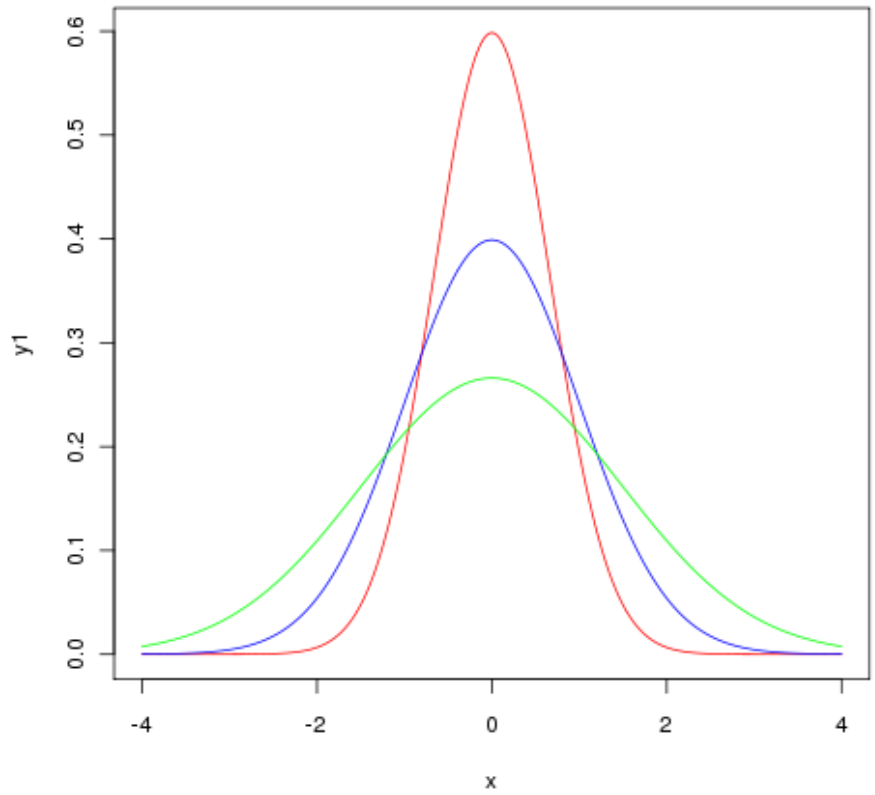
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

```
> x <- seq(-4,4,length=201)
> y <- 1/sqrt(2*pi)*exp(-x^2/2)

> plot(x,y,type="l")

> png("nornal1.png")
> plot(x,y,type="l",col="blue")
> dev.off()
```



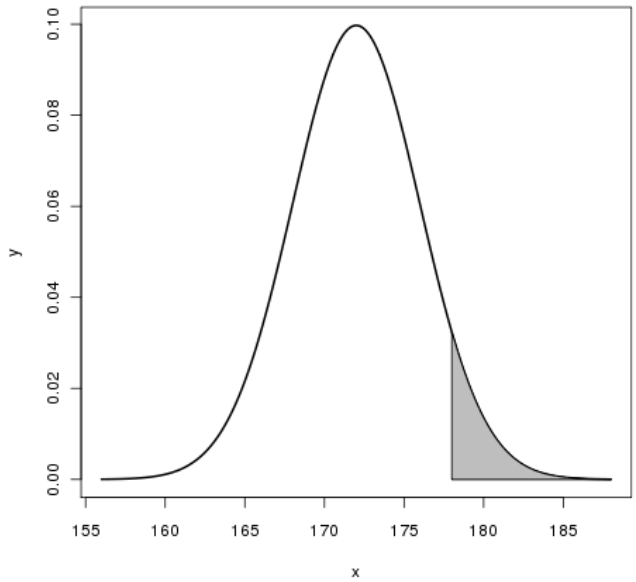
Πολλές γραμμές στο ίδιο γράφημα

```
> x  <- seq(-4, 4, by=0.01)
> y1 <- dnorm(x, mean=0,
                 sd=2/3)
> y2 <- dnorm(x, mean=0,
                 sd=1)
> y3 <- dnorm(x, mean=0,
                 sd=3/2)

> png("normal2.png")
> plot(x,y1,type="l",
       col="red")
> lines(x,y2,type="l",
        col="blue")
> lines(x,y3,type="l",
        col="green")
> dev.off()
```



Σκίαση περιοχών

```
> x  <- seq(156, 188, length=501)
> y  <- dnorm(x, mean=172, sd=4)
> x1 <- seq(178, 188, length=101)
> y1 <- dnorm(x1, mean=172, sd=4)
> png("normal3.png")
> plot(x, y, type="l", lwd=2)
> polygon(c(178,x1,188), c(0,y1,0), col="gray")
> dev.off()
```



Έλεγχος του μέσου του πληθυσμού με γνωστή διακύμανση

Έστω ένα δείγμα 12 παρατηρήσεων που προέρχεται από κανονική κατανομή έχει μέσο 50. Η τυπική απόκλιση του πληθυσμού είναι ίση με 4. Ας κάνουμε την υπόθεση πως ο μέσος είναι μικρότερος του 52.

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu \geq 52 \\ H_\alpha &: \mu < 52 \end{aligned}$$

```
> n     <- 12
> xbar  <- 50
> sigma <- 4
> mu    <- 52
> z     <- (xbar-mu) / (sigma/sqrt(n))
> p     <- pnorm(z)
> p
[1] 0.04163226
```

Η τιμή pval=0.0416 μας λέει ότι απορρίπτεται η H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, αλλά όχι σε επίπεδο σημαντικότητας 1%.

Έλεγχος του μέσου του πληθυσμού με γνωστή διακύμανση

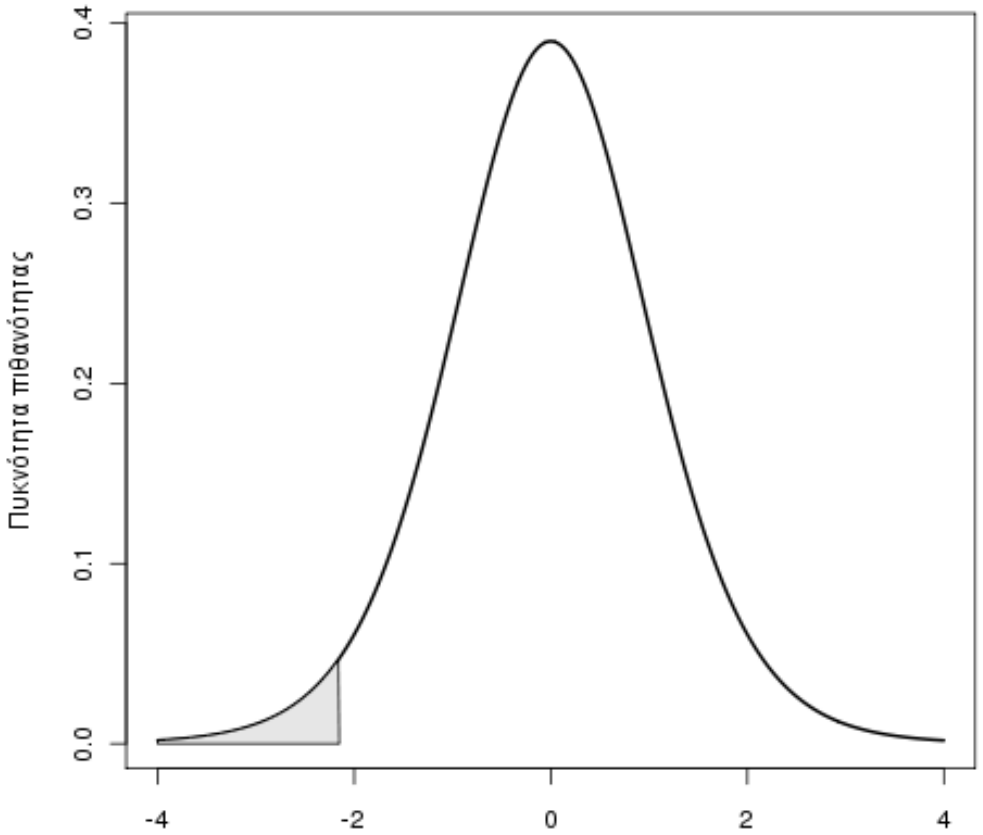
Ας υποθέσουμε πως έχουμε ένα δείγμα που προέρχεται από πληθυσμό, που ακολουθεί την κανονική κατανομή αλλά δεν ξέρουμε τη διακύμανση. Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε αν ο μέσος του πληθυσμού είναι μικρότερος του 52:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu \geq 52 \\ H_\alpha &: \mu < 52 \end{aligned}$$

```
> x     <- c(45, 48, 50, 52, 48, 51, 55, 50, 53, 54, 49, 45)
> n     <- length(x)
> mx    <- mean(x)
> sigma <- sd(x)
> mu    <- 52
> z     <- (mx-mu) / (sigma/sqrt(n))
> p     <- pt(z, df=n-1)
> p
[1] 0.02722336
```

Η τιμή pval=0.027 μας λέει πως απορρίπτεται η H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, αλλά όχι σε επίπεδο σημαντικότητας 1%.

Έλεγχος του μέσου του πληθυσμού με γνωστή διακύμανση



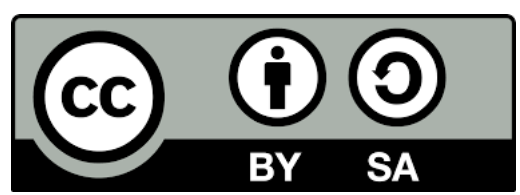
Η σκιασμένη περιοχή στο παρακάτω γράφημα δείχνει την περιοχή απόρριψης

Σχόλια και ερωτήσεις

Σας ευχαριστώ για την προσοχή σας

Είμαι στη διάθεσή σας για σχόλια, απορίες και ερωτήσεις

Τέλος Ενότητας



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

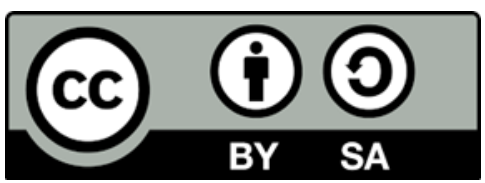
Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ. http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1064.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή, Διεθνής Έκδοση 4.0 [1] ή μεταγενέστερη.



- [1] https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/.