Εισαγωγή στις Μεθόδους Η/Υ (2014-15)
Γραφικές Παραστάσεις-Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

1. Δημιουργήστε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις $y_i=f(x)$, i=1…4 και προσδιορίστε την γενική μορφή της σχέσης yi=f(x) σε κάθε περίπτωση.
2. Προβείτε στην κατάλληλη "αλλαγή μεταβλητών" έτσι ώστε να μετατρέψετε την εκάστοτε μη γραμμική σχέση yi=f(x) σε γραμμική σχέση.
3. Προσδιορίστε τις παραμέτρους της σέσης yi=f(x) με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Πίνακας 1					
α/α	x	y	z	r	v
1	0.1	-1.85	5.50	35.75	4.51
2	0.2	-1.30	15.56	28.41	6.59
3	0.3	-0.75	28.58	22.57	7.81
4	0.4	-0.20	44.00	17.93	8.67
5	0.5	0.35	61.49	14.25	9.34
6	0.6	0.90	80.83	11.32	9.89
7	0.7	1.45	101.86	8.99	10.35
8	0.8	2.00	124.45	7.15	10.75
9	0.9	2.55	148.50	5.68	11.10
10	1	3.10	173.93	4.51	11.42
11	1.1	3.65	200.66	3.58	11.71
12	1.2	4.20	228.63	2.85	11.97
13	1.3	4.75	257.80	2.26	12.21
14	1.4	5.30	288.11	1.80	12.43
15	1.5	5.85	319.52	1.43	12.64

4. Δημιουργώντας τις γραφικές παραστάσεις, βρείτε την μαθηματική σχέση που συνδέει τα δύο μεγέθη σε κάθε έναν από τους παρακάτω πίνακες και προσδιορίστε τις παραμέτρους της σχέσης αυτής σε κάθε περίπτωση με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Πίνακας 2		Πίνακας 3		Πίνακας 4		Πίνακας 5	
t (s)	v (cm/s)	r (mm)	$υ_{op}$ (cm/s)	T (°C)	η (mPa·s)	q (C)	t (s)
0	10.9	1.0	0.5	0	12058	0.095	0.51
2	13.1	1.5	1.1	10	4011	0.090	1.05
4	13.9	2.0	2.0	20	1348	0.085	1.63
6	15.6	2.5	3.2	30	442	0.080	2.23
8	16.2	3.0	4.6	40	146	0.075	2.88
10	18.6	3.5	6.2	50	51	0.070	3.57
12	19.2	4.0	8.1	60	15	0.065	4.31
14	21.1	4.5	10.1	70	6	0.060	5.11
16	22.6	5.0	12.4	$σ_η$ ~ 1 mPa.s		0.055	5.98
18	23.1	5.5	15.2			0.050	6.93
20	25.9	6.0	17.9			0.045	7.99
22	26.1	$σ_{υορ}$ ~ 0.3 cm/s				0.040	9.16
24	27.9					0.035	10.50
26	29.1					0.030	12.04
28	31.6					0.025	13.86
30	32.5					0.020	16.09
$σ_v$ ~ 0.5 cm/s						0.015	18.97
						0.010	23.03
						0.005	29.96

Αν δύο μεγέθη x και y με ένα σύνολο ζευγών τιμών (x_i, y_i), i=1,…N, συνδέονται μεταξύ τους με μία γραμμική σχέση της μορφής $y=a+bx$, τότε η **μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων** προβλέπει ότι οι παράμετροι a και b δίνονται από τις σχέσεις:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i}{\Delta}$$

$$b = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{\Delta}$$

$$\Delta = N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$

Οι αβεβαιότητες των τιμών α και b, *υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει μόνο αβεβαιότητα σ_y, η οποία είναι ίδια για όλες τις τιμές y_i, ενώ η αβεβαιότητα σ_x*~0, δίνονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_\alpha = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{\Delta} \sigma_y^{\ 2} \right)^{1/2}$$

$$\sigma_b = \left(\frac{N}{\Delta} \sigma_y^{\ 2} \right)^{1/2}$$

$$\sigma_y^{\ 2} = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \alpha - bx_i \right)^2$$

Όταν η αβεβαιότητα σ_y δεν είναι ίδια για όλες τις τιμές y_i, ενώ η αβεβαιότητα σ_x~0, τότε στην μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων πρέπει να ληφθεί υπόψη μία συνάρτηση βάρους W_i για κέθε μέτρηση, η οποία έχει σχέση με την "αξία" της κάθε μέτρησης. Όσο μεγαλύτερη είναι η ακρίβεια της μέτρησης (έχει δηλαδή μικρότερο σφάλμα), τόσο μεγαλύτερη είναι η αξία της και κατά συνέπεια τόσο μεγαλύτερη θα πρέπει να είναι η συνάρτηση βάρους W_i. Μία κατάλληλη συνάρτηση βάρους μπορεί να είναι το τετράγωνο του αντιστρόφου του σφάλματος της κάθε μέτρησης $W_i=(1/\sigma y_i)^2$. Στις περιπτώσεις αυτές η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων προβλέπει για τα α, b, σ_α και σ_b:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} W_i x_i^2 \sum_{i=1}^{N} W_i y_i - \sum_{i=1}^{N} W_i x_i \sum_{i=1}^{N} W_i x_i \cdot y_i}{\Delta_W}$$

$$\Delta_W = \sum_{i=1}^{N} W_i \sum_{i=1}^{N} W_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} W_i x_i \right)^2$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{N} W_i \sum_{i=1}^{N} W_i x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^{N} W_i x_i \sum_{i=1}^{N} W_i y_i}{\Delta_W}$$

$$\sigma_\alpha = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} W_i x_i^{\ 2}}{\Delta_W} \right)^{1/2}$$

$$\sigma_b = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} W_i}{\Delta_W} \right)^{1/2}$$