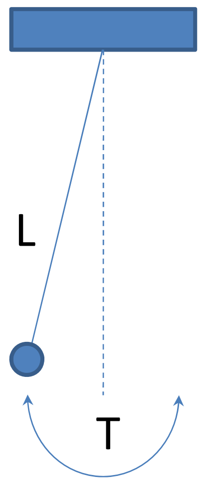
Εισαγωγή στις Μεθόδους Ηλεκτρονικών Υπολογιστών 2014-15
Παράδειγμα επίλυσης προβλήματος και δημιουργίας αναφοράς λύσης

Πρόβλημα

Όταν ένα απλό εκκρεμές εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση (ααt), η περίοδος ταλάντωσής του **T** σαν συνάρτηση του μήκους του **L** δίνεται από την σχέση $T=2\pi(L/g)^{1/2}$, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας. Σε ένα πείραμα μελέτης της κίνησης ενός απλού εκκρεμούς που εκτελεί ααt, μετρήθηκε η περίοδος ταλάντωσης T σαν συνάρτηση του μήκους του L. Οι μετρήσεις φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:



L (cm)	101.1	84.4	68.6	54.5	50.4	42.3	32.4	26.5	20.2	15.3	10.2	6.2
T (s)	2.01	1.84	1.69	1.54	1.42	1.32	1.17	1.04	0.83	0.78	0.64	0.49

Με την βοήθεια των προγραμμάτων υπολογιστικών φύλλων εργασίας

(α) Σχεδιάστε την γραφική παράσταση T=*f*(L).

(β) Βρείτε ποια μαθηματική σχέση συνδέει τα δύο αυτά μεγέθη και υπολογίστε τις παραμέτρους της σχέσης αυτής με την χρήση της γραμμής τάσης.

(γ) Υπολογίστε τις παραμέτρους της σχέσης αυτής χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με εκείνο του ερωτήματος (β).

(δ) Βρείτε την τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας g.

Δημιουργήστε με τον κειμενογράφο ένα αρχείο που να περιέχει μία αναφορά με την αναλυτική λύση του προβλήματος.

Λύση Προβλήματος

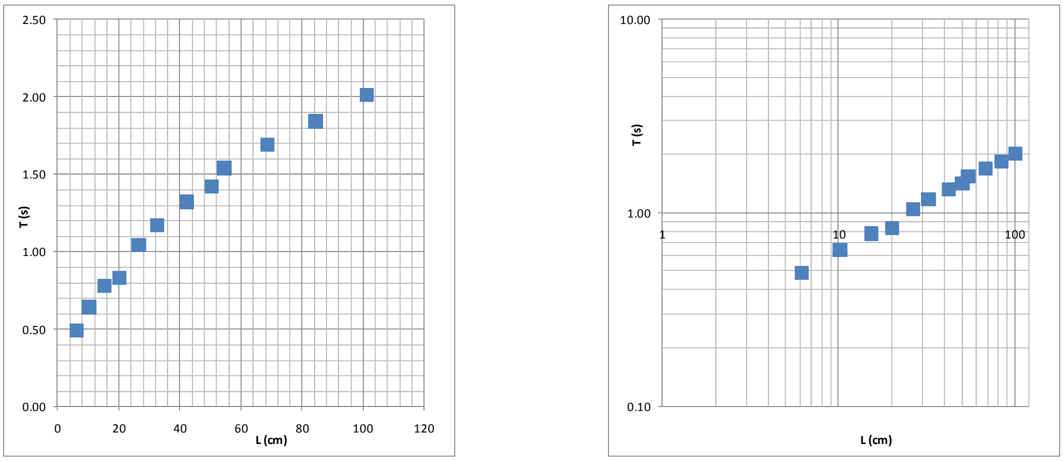
Παπαδόπουλος Νικόλαος (AM 9001)

Περίληψη λύσης

Ύστερα από την δημιουργία των γραφικών παραστάσεων των δεδομένων T=*f*(L) σε γραμμικούς και λογαριθμικούς άξονες διαπιστώσαμε ότι η γενική σχέση που συνδέει τα T και L είναι μία σχέση δύναμης, της μορφής $\mathbf{T=a\cdot L^{b}}$ και μετά από προσαρμογή των δεδομένων με την κατάλληλη συνάρτηση βρήκαμε τις σταθερές **a=0.192 s/cm$^{1/2}$** και **b=1/2**. Τα αποτελέσματα αυτά συμπίπτουν με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την κατάλληλη εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Η επιτάχυνση της βαρύτητας βρέθηκε **g≈1070 cm/s^2**.

Ανάλυση μετρήσεων και επίλυση προβλήματος

Σε ένα υπολογιστικό φύλλο εργασίας (Excel ή Calc) δημιουργήσαμε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις T=*f*(L).

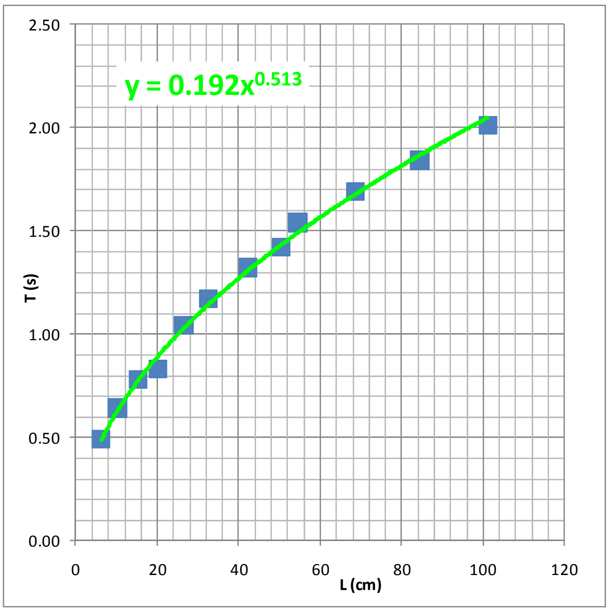


(α) (β)

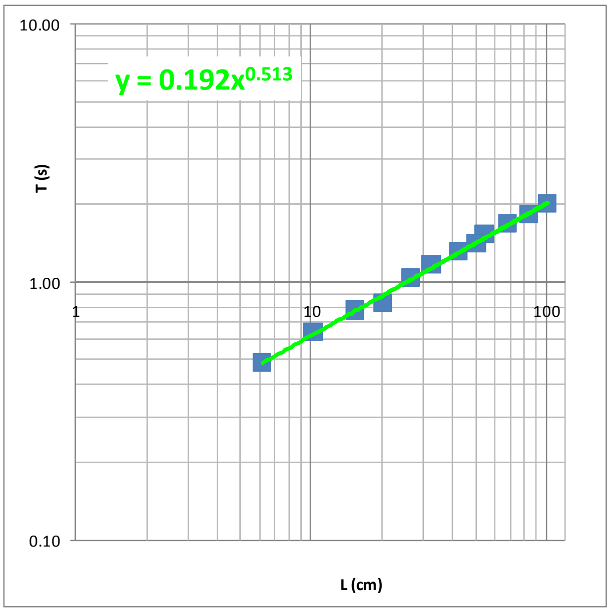
Εικόνα 1. Γραφική παράσταση των δεδομένων T=*f*(L) σε γραμμικούς (α) και λογαριθμικούς (β) άξονες.

Τα σημεία της γραφικής παράστασης T=*f*(L) στην Εικόνα 1α δεν φαίνεται να έχουν τάση σχηματισμού ευθείας γραμμής, άρα τα T και L δεν συνδέονται με μία γραμμική σχέση, δηλαδή η μαθηματική σχέση T=*f*(L) δεν είναι της μορφής $T=a+b\cdot L$. Ύστερα από **αλλαγή της βαθμονόμησης από γραμμική σε λογαριθμική** και των δύο αξόνων της γραφικής παράστασης T=*f*(L) της Εικόνας 1α και για τα δύο μεγέθη T και L, προκύπτει η γραφική παράσταση της Εικόνας 1β.

Από την Εικόνα 1β παρατηρούμε ότι η τάση των σημείων στην γραφική παράσταση T=*f*(L) σε λογαριθμικούς άξονες παριστάνει ευθεία γραμμή. Αυτό σημαίνει ότι η γενική μαθηματική σχέση T=*f*(L) θα πρέπει να είναι της μορφής $\mathbf{T=a\cdot L^{b}}$, όπου **a** και **b** οι παράμετροι της σχέσης αυτής. Για να βρεθούν οι αριθμητικές τιμές των παραμέτρων **a** και **b** θα πρέπει να κάνουμε προσαρμογή των δεδομένων της γραφικής παράστασης της Εικόνας 1β (ή 1α) με μία σχέση αυτής της μορφής ($\mathbf{y=a\cdot x^{b}}$), η οποία ονομάζεται **σχέση δύναμης** (power law). Στην Εικόνα 2 παρουσιάζεται η προσαρμογή αυτή, στην οποία περιέχονται και τα αριθμητικά αποτελέσματα της προσαρμογής για τις παραμέτρους **a** και **b** όπως προέκυψαν **με την βοήθεια της διαδικασίας προσαρμογής του υπολογιστικού φύλλου εργασίας χρησιμοποιώντας την γραμμής τάσης**.



(α)



(β)

Εικόνα 2. Γραφική παράσταση των δεδομένων T=*f*(L) σε γραμμικούς (α) και λογαριθμικούς (β) άξονες (σημεία) μαζί με την καλύτερη προσαρμογή τους με μία συνάρτηση δύναμης της μορφής $y=a \cdot x^b$ (πράσινες γραμμές) με την χρήση της γραμμής τάσης. Στον εσωτερικό φαίνονται και τα αριθμητικά αποτελέσματα της προσαρμογής για τις παραμέτρους a και b.

Επειδή τα μεγέθη T και L είναι φυσικά μεγέθη και διαθέτουν μονάδες μέτρησης, θα πρέπει να προσδιορίσουμε **αν υπάρχουν και ποιες είναι** οι μονάδες μέτρησης των παραμέτρων a και b. Επειδή η σχέση $\mathbf{T=a \cdot L^b}$ είναι σχέση δύναμης, **η παράμετρος b θα είναι αδιάστατη**, δηλαδή θα είναι καθαρός αριθμός. Η παράμετρος αυτή είναι b≈0.513 και με στρογγυλοποίηση τείνει στην τιμή 0.5, δηλαδή 1/2. Άρα επαληθεύεται στην θεωρητική σχέση T=*f*(L) $[T=2\pi(L/g)^{1/2}]$, η οποία προβλέπει ότι ο εκθέτης του L είναι 1/2. Θέτοντας αυτή την τιμή στην εξίσωση $\mathbf{T=a \cdot L^b}$ και έχοντας υπόψη ότι το T μετράται σε s και το L σε cm, η μονάδα μέτρησης του a προκύπτει ότι είναι $\mathbf{s/cm^{1/2}}$.

Επομένως οι παράμετροι της σχέσης $\mathbf{T=a \cdot L^b}$ βρέθηκαν να είναι: $\mathbf{a=0.192\ s/cm^{1/2}}$ και **b=1/2**.
Άρα η σχέση που συνδέει τα T και L είναι: $\mathbf{T=0.192 \cdot L^{1/2}\ s}$, με το L να δίνεται σε cm.

Οι παράμετροι a και b μπορούν να προσδιοριστούν και με την βοήθεια της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων (ΜΕΤ)*. Οι μαθηματικές σχέσεις που έχουμε διαθέσιμες για την εύρεση των παραμέτρων μίας εξίσωσης που συνδέει δύο μεγέθη Y και X μέσω της θεωρίας αυτής, ισχύουν μόνο στην περίπτωση που τα μεγέθη αυτά έχουν γραμμική σχέση μεταξύ τους, δηλαδή $Y=A+B \cdot X$, όπου A και B οι παράμετροι.

Όμως, αφού τα μεγέθη T και L συνδέονται μεταξύ τους, όπως έχουμε δει παραπάνω, με μία σχέση δύναμης, για να υπολογίσουμε τις παραμέτρους της σχέσης αυτής μέσω της ΜΕΤ θα πρέπει να προβούμε σε μία διαδικασία αλλαγής μεταβλητών έτσι ώστε να προκύψει μία γραμμική σχέση. Αυτή προκύπτει αν λογαριθμήσουμε την σχέση T=*f*(L) που βρήκαμε, δηλαδή:

$$T=a \cdot L^b \rightarrow \log(T)=\log(a)+b \cdot \log(L) \rightarrow Y=A+BX, \text{ με } Y=\log(T), X=\log(L) \text{ και } A=\log(a), B=b$$

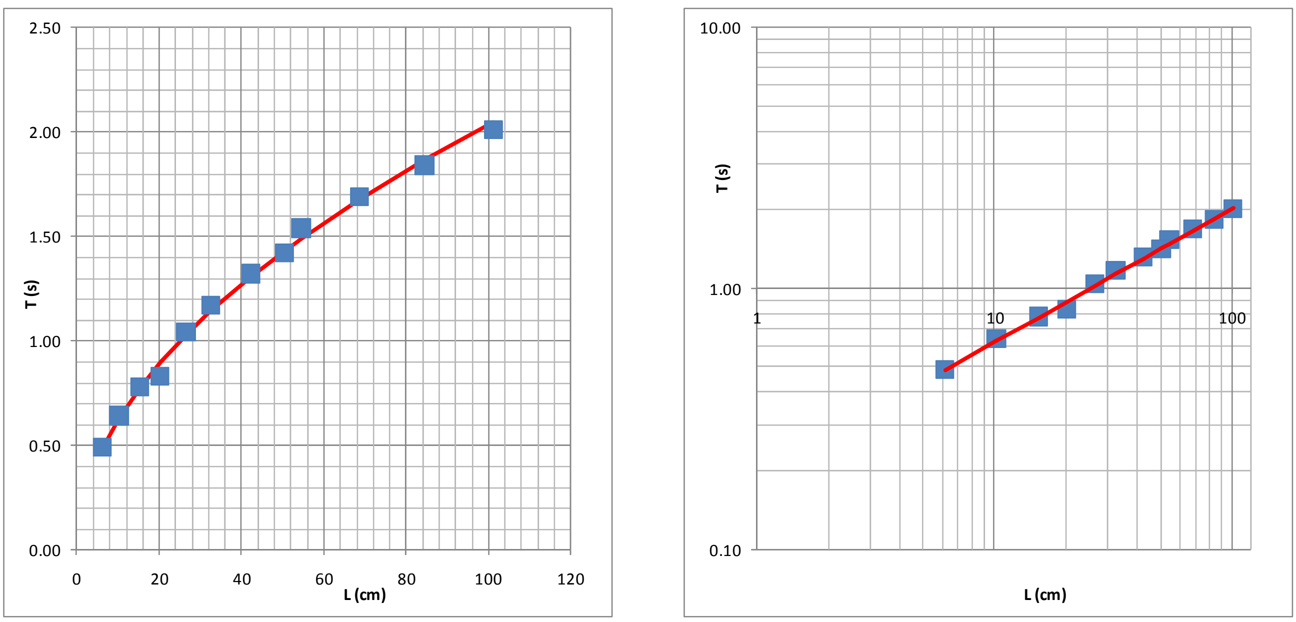
Τα Y και X έχουν έτσι γραμμική σχέση μεταξύ τους και γι' αυτά μπορεί να εφαρμοστούν οι γνωστές σχέσεις της ΜΕΤ. Θα πρέπει επομένως να υπολογίσουμε τα Y=log(T) και X=log(L) και να εφαρμόσουμε κατάλληλα την μέθοδο αυτή. Με την βοήθεια του υπολογιστικού φύλλου εργασίας κατασκευάσαμε τον παρακάτω Πίνακα 1.

* "Εισαγωγή στην ανάλυση πειραματικών μετρήσεων-Απλά πειράματα Μηχανικής Θερμότητας", Μ. Καμαράτος, Ιωάννινα 2014.

Πίνακας 1. Εύρεση των αριθμητικών τιμών των παραμέτρων a και b με χρήση της ΜΕΤ.

L (cm)	T (s)	X=log(L)	Y=log(T)	$X^2=[\log(L)]^2$	X·Y=log(L)·log(T)	Δ		T_{theory} (s)
101.1	2.01	2.005	0.303	4.019	0.608	**18.572**		2.04
84.4	1.84	1.926	0.265	3.711	0.510	**A**	**$a=10^A$**	1.86
68.6	1.69	1.836	0.228	3.372	0.418	**-0.717**	**0.192**	1.68
54.5	1.54	1.736	0.188	3.015	0.326	**B**	**b=B**	1.49
50.4	1.42	1.702	0.152	2.898	0.259	**0.513**	**0.513**	1.43
42.3	1.32	1.626	0.121	2.645	0.196			1.31
32.4	1.17	1.511	0.068	2.282	0.103			1.14
26.5	1.04	1.423	0.017	2.026	0.024			1.03
20.2	0.83	1.305	-0.081	1.704	-0.106			0.90
15.3	0.78	1.185	-0.108	1.403	-0.128			0.78
10.2	0.64	1.009	-0.194	1.017	-0.195			0.63
6.2	0.49	0.792	-0.310	0.628	-0.245			0.49
N		18.057	0.649	28.720	1.770			
12		Σ	Σ	Σ	Σ			

Από τις τιμές των παραμέτρων a και b του παρακάτω πίνακα παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα της ΜΕΤ συμπίπτουν με αυτά που προέκυψαν από την ανάλυση της γραφικής παράστασης με την βοήθεια της γραμμής τάσης. Χρησιμοποιώντας τις τιμές a=0.192 s/cm$^{1/2}$ και b=0.5 μπορούμε να βρούμε και τις θεωρητικές τιμές του $\mathbf{T_{theory}}$ που προκύπτουν εφαρμόζοντας την σχέση $\mathbf{T_{theory} = 0.192 \cdot L^{1/2}}$ **s**. Τις τιμές αυτές $T_{theory}=f(L)$ παριστάνουμε γραφικά με μορφή ευθείας στην παρακάτω Εικόνα 3.



(α) (β)

Εικόνα 3. Γραφική παράσταση των δεδομένων $T=f(L)$ (σημεία) και $T_{theory}=f(L)$ (κόκκινες γραμμές) σε γραμμικούς (α) και λογαριθμικούς (β) άξονες.

Από τις σχέσεις $T=2\pi(L/g)^{1/2}$ και $T=a\cdot L^b$, διαπιστώνουμε ότι η παράμετρος $a=2\pi(1/g)^{1/2}$, οπότε προκύπτει ότι $g=4\pi^2/a^2$. Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση την τιμή a=0.192 s/cm$^{1/2}$, βρίσκουμε την επιτάχυνση της βαρύτητας **g≈1070 cm/s²**.