ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ανοικτάμαθήματα
opencourses

Τίτλος Μαθήματος: Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

Ενότητα: Ο Ευκλείδειος Χώρος

Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Κεφάλαιο 1

Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$

1.1 Αλγεβρική δομή

Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι καταρχήν ο **διανυσματικός χώρος (συντεταγμένων)** διάστασης $n \in \mathbb{N}$, πάνω από το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ο οποίος έχει ως στοιχεία του τα **διανύσματα** $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ με **συντεταγμένες** $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, ως προς την **συνήθη βάση** $\bar{e}_1 := (1, \ldots, 0), \ \ldots, \bar{e}_n := (0, \ldots, 1)$. Αυτό σημαίνει ότι ο $\mathbb{R}^n$ έχει όλες τις γνωστές από την **Γραμμική Άλγεβρα** ιδιότητες των διανυσματικών χώρων.

Πιο συγκεκριμένα, στον $\mathbb{R}^n$ ως διανυσματικό χώρο ορίζονται οι πράξεις της **πρόσθεσης** $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και του **βαθμωτού πολλαπλασιασμού** $: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ως εξής

$$\bar{x} + \bar{y} := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ \bar{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$$\alpha\bar{x} := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \forall\, \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

όπου $x_i + y_i \in \mathbb{R}$, $\alpha x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, είναι οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Για τις πράξεις (1.1), (1.2) ισχύουν οι ιδιότητες των πράξεων στους διανυσματικούς χώρους, δηλαδή, εκτός από την κλειστότητά τους, ισχύουν

- *ως προς την πρόσθεση*
  - (α΄) η προσεταιριστικότητα: $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}\ \forall\, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$,
  - (β΄) η αντιμεταθετικότητα: $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}\ \ \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$,
  - (γ΄) η ύπαρξη ουδετέρου: $\exists\, \bar{0} := (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n\ \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n :\ \bar{0} + \bar{x} = \bar{x}$,
  - (δ΄) η ύπαρξη αντιθέτου:
    $\forall\, \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ \exists\ -\bar{x} := (-x_1, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n :\ -\bar{x} + \bar{x} = \bar{0}$,

- *ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό*
  (α΄) η ύπαρξη ουδετέρου: $1\bar{x} = \bar{x}\ \forall\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n$
  (β΄) η συμβατότητα με τον πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{R}$:
  $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n$,
- *ως προς την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό*
  (α΄) η επιμεριστικότητα του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση: $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}\ \forall\ \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$,
  (β΄) η επιμεριστικότητα της πρόσθεσης στο $\mathbb{R}$ ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό: $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται το **εσωτερικό γινόμενο**

$$\bar{x} \cdot \bar{y} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \forall\ \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ \bar{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

μια απεικόνιση (πράξη) από το $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$, καθιστώντας τον έναν **διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο**, για το οποίο ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- η συμμετρία: $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x} \quad \forall\ \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$
- η γραμμικότητα (ως προς το πρώτο όρισμα):
  $(\alpha\bar{x}) \cdot \bar{y} = \alpha(\bar{x} \cdot \bar{y})$ και $(\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{z} + \bar{y} \cdot \bar{z} \quad \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$
- το θετικά ορισμένο:
  $\bar{x} \cdot \bar{x} \geq 0 \quad \forall\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\bar{x} = \bar{0} \in \mathbb{R}^n$.

Το ότι ισχύουν όλες οι παραπάνω ιδιότητες απορρέει από τους ορισμούς των πράξεων της πρόσθεσης (1.1), του βαθμωτού πολλαπλασιασμού (1.2), και του εσωτερικού γινομένου (1.3) στον $\mathbb{R}^n$ και τις ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Η απόδειξή τους αφήνεται ως άσκηση.

Λόγω της ιδιότητας του θετικά ορισμένου του εσωτερικού γινομένου (1.3) μπορεί να ορισθεί η **Ευκλείδεια στάθμη ή νόρμα (ή μήκος)** ενός διανύσματος $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\bar{x}\| := \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geq 0 \quad \forall\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

όπου $\sqrt{\alpha}$ η πραγματική (μη αρνητική) ρίζα ενός μη αρνητικού πραγματικού αριθμού α, η οποία για $n = 1$ ταυτίζεται με την απόλυτη τιμή $|x|$ ενός πραγματικού αριθμού $x \in \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, και οι οποία, όπως κάθε στάθμη ενός διανυσματικού χώρου, είναι μια απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- θετικότητα: $\|\bar{x}\| \geq 0 \quad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\bar{x} = 0 \in \mathbb{R}^n$,
- $\|\alpha\bar{x}\| = |\alpha|\|\bar{x}\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n$,
- τριγωνική ανισότητα: $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| \quad \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

Ο εφοδιασμός ενός διανυσματικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο $\bar{x} \cdot \bar{y}$ με την στάθμη $\|\bar{x}\|^2 = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}}$ τον καθιστά έναν **σταθμητό (διανυσματικό) χώρο ή (διανυσματικό) χώρο με νόρμα**, ο οποίος πέραν των πιο πάνω ιδιοτήτων της στάθμης και του εσωτερικού γινομένου έχει και τις ακόλουθες ιδιότητες:

Πρόταση 1.1.1. *Για $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν:*

*(α') η **ανισότητα Cauchy-Schwarz**: $|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq \|\bar{x}\|\|\bar{y}\|$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα (δηλ. $\exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} :\ \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} = \bar{0}$).*

*(β') ο **κανόνας του παραλληλογράμμου**: $2\|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{y}\|^2 = \|\bar{x} + \bar{y}\|^2 + \|\bar{x} - \bar{y}\|^2$*

*(γ') η **ταυτότητα της πόλωσης**: $4\,\bar{x} \cdot \bar{y} = \|\bar{x} + \bar{y}\|^2 - \|\bar{x} - \bar{y}\|^2$*

Απόδειξη. Αφήνονται ως ασκήσεις.

Με την βοήθεια της Ευκλείδειας στάθμης $\|\cdot\|$ μπορεί να ορισθεί η **απόσταση** (μεταξύ) δύο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) := \|\bar{x} - \bar{y}\| \quad \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Η απόσταση είναι μια **μετρική**, δηλαδή μια απεικόνιση $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες

- συμμετρία: $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})\ \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$
- θετικότητα: $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0\ \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $\bar{x} = \bar{y}$,
- τριγωνική ανισότητα: $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y})\ \forall\, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$

Ο $\mathbb{R}^n$ είναι δηλαδή ένας **μετρικός χώρος**, με ότι αυτό συνεπάγεται.

Ο εφοδιασμός του διανυσματικού χώρου (συντεταγμένων) $\mathbb{R}^n$ με το εσωτερικό γινόμενο (1.3), την στάθμη (1.4) και την απόσταση (1.5) ορίζει τον $\mathbb{R}^n$ ως τον n-**διάστατο Ευκλείδειο χώρο**.

Α 1. Να αποδείξετε ότι μέσω των $\|\bar{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ και $\|\bar{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ορίζονται στάθμες στον $\mathbb{R}^n$, οι οποίες είναι ισοδύναμες με την Ευκλείδεια στάθμη (1.4) $\|\bar{x}\|(=: \|\bar{x}\|_2)$, και ειδικότερα $\forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν

$$\|\bar{x}\|_\infty \leq \|\bar{x}\|_1 \leq n\|\bar{x}\|_\infty, \tag{1.6}$$

$$\|\bar{x}\|_\infty \leq \|\bar{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\bar{x}\|_\infty, \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\bar{x}\|_2 \leq \|\bar{x}\|_1 \leq n\|\bar{x}\|_2. \tag{1.8}$$

Να σχεδιάσετε στο επίπεδο τα σύνολα $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \ \|\bar{x}\| = 1\}$, $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \ \|\bar{x}\|_1 = 1\}$ και $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 : \ \|\bar{x}\|_\infty = 1\}$.

(Γενικά, δύο στάθμες $\| \cdot \|_i$, $i = 1, 2$, ενός σταθμητού διανυσματικού χώρου X ονομάζονται ισοδύναμες αν $\exists\ c, C > 0\ \forall\ x \in X : c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ και αποδεικνύεται ότι σε έναν σταθμητό διανυσματικό χώρο *πεπερασμένης διάστασης* όλες οι στάθμες είναι ισοδύναμες.)

Λύση:

$\forall\ i = 1, \ldots, n : \ |x_i| \leq \|\bar{x}\|_\infty \Leftrightarrow x_i^2 \leq \|\bar{x}\|_\infty^2$ και άρα $\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq n\|\bar{x}\|_\infty$ και $\|\bar{x}\|^2 = \|\bar{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq n\|\bar{x}\|_\infty^2 \Leftrightarrow \|\bar{x}\| = \|\bar{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\bar{x}\|_\infty$.

Απ' την άλλη, $\exists\ j \in \{1, \ldots, n\} : \ |x_j| = \|\bar{x}\|_\infty$ και άρα $\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \geq |x_j| = \|\bar{x}\|_\infty$ και $\|\bar{x}\|^2 = \|\bar{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq x_j^2 = \|\bar{x}\|_\infty^2 \Leftrightarrow \|\bar{x}\| = \|\bar{x}\|_2 \geq \|\bar{x}\|_\infty$.

ΣΧΗΜΑΤΑ

Α 2. (α') Να δειχθεί ότι $\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2$ ανν (:$\Leftrightarrow$ αν και μόνο αν) $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$. Πώς ονομάζεται αυτή η σχέση στην Γεωμετρία;

Λύση: $\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = (\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + \bar{y})[= \bar{x} \cdot (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{y} \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = (\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{x} + (\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{y} \cdot \bar{x} + \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{y}] = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2\,\bar{x} \cdot \bar{y} = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2$ ανν $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \Leftrightarrow$: $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ **κάθετα**. Η σχέση αυτή είναι το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

ΣΧΗΜΑ

(β') Να αποδείξετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τον κανόνα του παραλληλογράμμου και την ταυτότητα της πόλωσης (βλ. Πρόταση 1.1.1, (2) και (3)).

(γ') Πότε ισχύει

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| = \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| \tag{1.9}$$

για μια στάθμη που επάγεται από εσωτερικό γινόμενο;

Λύση: Αν κάποιο από τα δύο διανύσματα $\bar{x}, \bar{y}$ είναι το μηδενικό, τότε προφανώς η ισότητα (1.9) ισχύει. Έστω τώρα $\bar{x}, \bar{y} \neq 0$. Τότε (1.9) $\Leftrightarrow \|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = (\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|)^2 \Leftrightarrow \|\bar{x}\|^2+\|\bar{y}\|^2+2\,\bar{x}\cdot\bar{y} = \|\bar{x}\|^2+\|\bar{y}\|^2+2\|\bar{x}\|\|\bar{y}\| \Leftrightarrow \bar{x}\cdot\bar{y} = \|\bar{x}\|\|\bar{y}\| \Rightarrow |\bar{x}\cdot\bar{y}| = \|\bar{x}\|\|\bar{y}\|$ και άρα σύμφωνα με την ανισότητα Cauchy-Schwarz (βλ. Πρόταση 1.1.1, (1)) τα $\bar{x}, \bar{y}$ θα είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλ. $\exists\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \ \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} = 0$, και αφού $\bar{x}, \bar{y} \neq 0$ έχουμε $\alpha\beta \neq 0$ και $\bar{y} = \lambda\bar{x}$ με $\lambda = -\frac{\alpha}{\beta} \neq 0$. Τότε (1.9) $\Leftrightarrow \lambda\|\bar{x}\|^2 = \|\bar{x}\|\|\bar{y}\| \Leftrightarrow \lambda = \frac{\|\bar{y}\|}{\|\bar{x}\|} > 0$, δήλ. τα $\bar{x}, \bar{y}$ θα πρέπει να είναι **ομόρροπα**.

(δ') Να δειχθεί ότι $\|\bar{x} - \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|\ \forall\ \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση: $\|\bar{x} - \bar{y}\| = \|\bar{x} + (-\bar{y})\| \leq \|\bar{x}\| + \|(-\bar{y})\| = \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ και σύμφωνα με την Άσκηση 2, (γ'), η ισότητα ισχύει όταν τα $\bar{x}$, $-\bar{y}$ είναι ομόρροπα, δηλ. όταν τα $\bar{x}, \bar{y}$ είναι **αντίρροπα**.

(ε') Να δειχθεί ότι $|\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\|| \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|$.

Λύση:

$\|\bar{x}\| = \|\bar{x} - \bar{y} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x} - \bar{y}\| + \|\bar{y}\| \Leftrightarrow \|\bar{x}\| - \|\bar{y}\| \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|$ και ανάλογα $\|\bar{y}\| = \|\bar{y} - \bar{x} + \bar{x}\| \leq \|\bar{y} - \bar{x}\| + \|\bar{x}\| \Leftrightarrow \|\bar{y}\| - \|\bar{x}\| \leq \|\bar{y} - \bar{x}\| = \|\bar{x} - \bar{y}\|$. Άρα $\pm(\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\|) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\| \Leftrightarrow |\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\|| \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|$.

1.2 Γεωμετρική αναπαράσταση του $\mathbb{R}^3$

Ο n-διάστατος Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ **στις διαστάσεις** $n = 1, 2, 3$ μπορεί να αναπαρασταθεί ή να ταυτιστεί γεωμετρικά με την **ευθεία**, το **επίπεδο** και τον **(τρισδιάστατο) χώρο**, αντίστοιχα, μέσω της εισαγωγής **Καρτεσιανών συστημάτων συντεταγμένων (ή αναφοράς)**. Εισάγωντας π.χ. στον φυσικό χώρο $\mathbb{R}^3$ ένα **δεξιόστροφο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων** μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε **σημείο** $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ το διάνυσμα $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$.

ΣΧΗΜΑ

Έτσι, στα πλαίσια της **Αναλυτικής Γεωμετρίας**, μπορούμε να αναπαραστήσουμε πολλά γεωμετρικά αντικείμενα του $\mathbb{R}^3$ αλγεβρικά, και αντίστροφα βλέπουμε ότι τα περισσότερα από τα αλγεβρικά αντικείμενα που ορίσαμε πιο πάνω έχουν μια γεωμετρική ερμηνεία, όπως π.χ. η έννοια του μήκους $\|\bar{x}\|$ (1.4) ενός διανύσματος $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ πού δίνει την απόσταση $d(\bar{x}, \bar{0}) = \|\bar{x} - \bar{0}\| = \|\bar{x}\|$ του σημείου (x_1, x_2, x_3) από το **σημείο αναφοράς** $\bar{0} \in \mathbb{R}^3$, όπως και γενικότερα η έννοια της απόστασης $d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$ (1.5) που δίνει την απόσταση (μεταξύ) δύο σημείων $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ του χώρου $\mathbb{R}^3$. Το εσωτερικό γινόμενο $\bar{x} \cdot \bar{y}$ δίνει για δύο μη μηδενικά διανύσματα $\bar{x}, \bar{y} \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ ($\Leftrightarrow$ $\|\bar{x}\|, \|\bar{y}\| \neq 0 \in \mathbb{R}$) το συνημίτονο της γώνιας ϑ που σχηματίζουν:

$$\cos\vartheta = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|}$$

ΣΧΗΜΑΤΑ

Ένας μονοδιάστατος υπόχωρος $\langle \bar{x} \rangle := \{\alpha\bar{x} : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ που παράγεται από ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ σχηματίζει γεωμετρικά την ευθεία στον χώρο που περνάει από το σημείο αναφοράς $\bar{0}$ και το σημείο (x_1, x_2, x_3), ενώ ο δισδιάστατος υπόχωρος $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle := \{\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ που παράγεται από δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ παριστάνεται από το επίπεδο που περιέχει τα σημεία $\bar{0}, (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$.

ΣΧΗΜΑΤΑ

Ειδικότερα, οι υπόχωροι $\langle \bar{e}_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$, δίνουν τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων $0x_i$ και οι υπόχωροι $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle$ $i, j = 1, 2, 3$, $i < j$, τα επίπεδα $0x_ix_j$, αντίστοιχα.

Τέλος, με την βοήθεια της απόστασης ορίζονται **η ανοικτή και η κλειστή μπάλα και η σφαίρα ακτίνας** $r > 0$ **και κέντρου** $\bar{x}$ **στον** $\mathbb{R}^n$ ως

$$B(\bar{x}, r) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \ \|\bar{x} - \bar{y}\| < r\}, \tag{1.10}$$

$$\bar{B}(\bar{x}, r) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \ \|\bar{x} - \bar{y}\| \leq r\}, \tag{1.11}$$

$$\partial B(\bar{x}, r) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \ \|\bar{x} - \bar{y}\| = r\}, \tag{1.12}$$

αντίστοιχα.

Παρατηρηση **1.** Να προσεχθεί ότι οι ανοικτές και κλειστές μπάλες και οι σφαίρες έχουν πάντα **θετική ακτίνα** $r > 0$.

1.3 Τοπολογικές ιδιότητες

Μετά από τις αλγεβρικές-γεωμετρικές ιδιότητες του $\mathbb{R}^n$ θα αναφερθούμε τώρα στις τοπολογικές του ιδιότητες οι οποίες σχετίζονται άμεσα με την έννοια του ορίου (πραγματικών ή διανυσματικών) ακολουθιών και συναρτήσεων ορισμένων σε ένα υποσύνολο U του $\mathbb{R}^n$, συμβολικά $U \subset \mathbb{R}^n$. Οι ιδιότητες που θα εξετάσουμε στηρίζονται στην έννοια της μετρικής d που ορίστηκε στον $\mathbb{R}^n$ μέσω της (1.5) και άρα συνιστούν απλά εφαρμογές των τοπολογικών ιδιοτήτων όπως αυτές εξετάζονται στην **Τοπολογία (μετρικών χώρων)** για μια γενική μετρική d. Έτσι ότι ισχύει γενικά για μετρικούς χώρους ισχύει και για τον $\mathbb{R}^n$.

Με την βοήθεια της έννοιας της ανοικτής μπάλας που ορίσαμε πιο πάνω, (1.10), μπορούμε να ορίσουμε τα ανοικτά και κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ στα οποία εδράζονται οι τοπολογικές του ιδιότητες.

Ορισμός 1.3.1. Ένα υποσύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται

(α΄) **ανοικτό**, αν για κάθε $\bar{x}_0 \in U$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(\bar{x}_0, \varepsilon) \subset U$,

(β΄) **κλειστό**, αν το $\mathbb{R}^n \setminus U$ είναι ανοικτό.

Πρόταση 1.3.1. *Κάθε ανοικτή μπάλα $B(\bar{x}_0, r) = \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < r$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Έστω $\bar{x} \in B(\bar{x}_0, r)$. Τότε $\|\bar{x}_0 - \bar{x}\| < r$, δηλ. $\exists\, \varepsilon > 0 : \|\bar{x}_0 - \bar{x}\| = r - \varepsilon$. Αλλά τότε, $\forall\, \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon) : \|\bar{y} - \bar{x}_0\| \leq \|\bar{x} - \bar{x}_0\| + \|\bar{x} - \bar{y}\| < r - \varepsilon + \varepsilon = r$, δηλ. $\bar{y} \in B(\bar{x}_0, r)$, και άρα $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset B(\bar{x}_0, r)$. Συνεπώς για κάθε $\bar{x} \in B(\bar{x}_0, r)$ υπάρχει μια ανοικτή μπάλα κέντρου $\bar{x}$ που βρίσκεται μέσα στο $B(\bar{x}_0, r)$, και άρα το τελευταίο είναι ανοικτό. □

Πρόταση 1.3.2. *Η ένωση μιας οικογένειας ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ και η τομή ενός πεπερασμένου πλήθους ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Έστω $\bar{x} \in \bigcup_{i \in I} U_i$, U_i ανοικτά για κάθε $i \in I$. Τότε υπάρχει $i_0 \in I$ με $\bar{x} \in U_{i_0}$ και αφού το U_{i_0} είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\bar{x} \in \bigcup_{i \in I} U_i$, το τελευταίο θα είναι ανοικτό.

Έστω τώρα $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{k} U_i$, U_i ανοικτά για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Τότε, αφού $\bar{x} \in U_i\ \forall\, i = 1, \ldots, k$, υπάρχουν $\varepsilon_i > 0$ τέτοια ώστε $B(\bar{x}, \varepsilon_i) \subset U_i$. Άρα για $\varepsilon := \min\limits_{i=1,\ldots,k} \varepsilon_i > 0$ έχουμε $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{k} U_i$. □

Παρατηρηση **2.** Η τομή ενός άπειρου πλήθους ανοικτών υποσυνόλων δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Π.χ. τα ανοικτά υποσύνολα $B(\bar{x}_0, \frac{1}{n})$ του $\mathbb{R}^n$ έχουν τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(\bar{x}_0, \frac{1}{n}) = \{\bar{x}_0\}$ που δεν είναι ανοικτό υποσύνολο, αφού δεν υπάρχει ανοικτή μπάλα που να περιέχεται σε αυτό.

Πρόταση 1.3.3. *Η τομή μιας οικογένειας κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ και η ένωση ενός πεπερασμένου πλήθους κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση.

Ορισμός 1.3.2. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται

(α') **εσωτερικό σημείο του** U, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$,

(β') **εξωτερικό σημείο του** U, αν το $\bar{x}$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}^n \setminus U$,

(γ') **συνοριακό σημείο του** U, αν το $\bar{x}$ δεν είναι ούτε εσωτερικό ούτε εξωτερικό σημείο του U,

(δ') **σημείο συσσώρευσης (ή οριακό σημείο) του** U, αν $\forall\, \varepsilon > 0 :\ U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}_0\} \neq \emptyset$,

(ε') **μεμονωμένο σημείο του** U, αν $\exists\, \varepsilon > 0 :\ U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) = \{\bar{x}\}$

Παρατηρηση **3.** Προσοχή! Δεν πρέπει να συγχέονται οι έννοιες του συνοριακού σημείου (boundary point) και του οριακού σημείου (limit point). (Γι' αυτό είναι προτιμότερο το αναφερόμαστε στο τελευταίο ως σημείο συσσώρευσης (accumulation point).) Π.χ. το μονοσύνολο $U = \{\bar{x}\} \subset \mathbb{R}^n$ έχει ως μοναδικό συνοριακό σημείο το σημείο $\bar{x}$ αλλά είναι μεμονωμένο σημείο, δηλ. δεν είναι σημείο συσσώρευσης. (Ένα μεμονωμένο σημείο (isolated point) είναι πάντα συνοριακό σημείο.) Επίσης ένα σημείο συσσώρευσης μπορεί να είναι εσωτερικό σημείο, οπότε δεν είναι συνοριακό σημείο.

ΣΧΗΜΑΤΑ

Ορισμός 1.3.3. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$.

(α') Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του U λέγεται **εσωτερικό του** U και συμβολίζεται με U°,

(β') Το σύνολο των συνοριακών σημείων του U λέγεται **σύνορο του** U και συμβολιζεται με ∂U,

(γ') Η τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το U λέγεται το **(τοπολογικό) κάλυμμα (ή κλείσιμο) του** U και συμβολίζεται με $\bar{U}$.

Πρόταση 1.3.4. *Το* $U \subset \mathbb{R}^n$ *είναι κλειστό ανν περιέχει κάθε σημείο συσσώρευσής του.*

Απόδειξη. U κλειστό
$\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus U$ ανοικτό
$\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus U\ \exists\, \varepsilon > 0 :\ B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus U$
$\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus U\ \exists\, \varepsilon > 0 :\ B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U = \emptyset$
$\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus U\ \exists\, \varepsilon > 0 :\ B(\bar{x}, \varepsilon) \cap (U \setminus \{\bar{x}\}) = \emptyset$
$\Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus U$: το $\bar{x}$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του U
$\Leftrightarrow \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x}$ είναι σημείο συσσώρευσης του $U\} \subset U$. ☐

Πρόταση 1.3.5. *Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε*

(α') $U \subset \bar{U}$

(β') $\bar{U}$ είναι κλειστό

(γ') $U = \bar{U} \;\Leftrightarrow U$ είναι κλειστό

(δ') $\bar{x} \in \bar{U} \;\Leftrightarrow \bar{x} \in U$ ή το $\bar{x}$ είναι σημείο συσσώρευσης του U

Απόδειξη. (α') Έστω $\bar{x} \in U$. Τότε $\bar{x} \in V$ για κάθε $V \supset U$ και άρα ειδικότερα $\bar{x} \in V$ για κάθε κλειστό $V \supset U$. Συνεπώς το $\bar{x}$ περιέχεται και στην τομή όλων των κλειστών $V \supset U$.

(β') Το $\bar{U}$ είναι κλειστό ως η τομή της οικογένειας όλων των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το U, σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.3.

(γ') $\Rightarrow$: Προκύπτει από το 2. $\Leftarrow$: $U \subset \bar{U}$ σύμφωνα με το 1 και $\bar{U} \subset U$, αφού το U ως κλειστό υποσύνολο που περιέχει το U θα περιέχει την τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων που περιέχουν το U.

(δ') $\Rightarrow$: Αν $\bar{x} \in U$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, αν $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus U$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του U τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ με $B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U = \emptyset$ ή ισοδύναμα $U \subset \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}, \varepsilon)$. Αλλά το τελευταίο αυτό υποσύνολο είναι κλειστό και περιέχει το U. Συνεπώς $\bar{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}, \varepsilon)$, που σημαίνει $\bar{x} \notin \bar{U}$, άτοπο.

$\Leftarrow$: Αν $\bar{x} \in U$, τότε $\bar{x} \in \bar{U}$ από το 1 ενώ αν $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus U$ είναι σημείο συσσώρευσης του U, τότε $\bar{x} \in \bar{U}$, γιατί αν ήταν $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$, αφού αυτό το υποσύνολο είναι ανοικτό σύμφωνα με το 2, θα υπήρχε $\varepsilon > 0$ με $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{U}$ και άρα $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus U$ ή ισοδύναμα $B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U = \emptyset$ που σημαίνει ότι το $\bar{x}$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του U, άτοπο. □

Ορισμός 1.3.4. Το $U \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται

(α') **φραγμένο** αν $\exists\, r > 0 :\; U \subset B(\bar{0}, r)$,

(β') **συμπαγές** αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Α 3. Αν $U := B(\bar{x}_0, r)$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, να δείξετε ότι $U = U^\circ$, $\bar{U} = \bar{B}(\bar{x}_0, r)$, όπως αυτό ορίστηκε στο (1.11), και $\partial U = \partial B(\bar{x}_0, r)$, όπως αυτό ορίστηκε στο (1.12).

Απόδειξη. Αφού, όπως δείξαμε στην Πρόταση 1.3.1, το U είναι ανοικτό, κάθε σημείο του είναι εσωτερικό σημείο, σύμφωνα με τους ορισμούς του ανοικτού υποσυνόλου και του εσωτερικού σημείου. Άρα $U \subset U^\circ$. Αφού απ'την άλλη εξ ορισμού $U^\circ \subset U$ έχουμε συνολικά $U^\circ = U$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $\partial U = \partial B(\bar{x}_0, r) := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n :\; \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r\}$. Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| \neq r$. Τότε ή $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| < r$ ή $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| > r$. Στην πρώτη περίπτωση, $\bar{x} \in B(\bar{x}_0, r)$ και άρα όπως είδαμε πιο πάνω το $\bar{x}$ είναι εσωτερικό σημείο του U. Στην δεύτερη περίπτωση, $\exists\, \varepsilon > 0 :\; \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r + \varepsilon$ και άρα $\forall\, \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon) :$

$\|\bar{y} - \bar{x}_0\| \geq \|\bar{x} - \bar{x}_0\| - \|\bar{x} - \bar{y}\| > (r + \varepsilon) - \varepsilon = r$, δηλ. $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus U$, καί άρα το $\bar{x}$ είναι εξωτερικό σημείο του U. Συνεπώς, τα $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| \neq r$ δεν είναι συνοριακά σημεία του U. Απ' την άλλη, αν $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r$, τότε $\forall\, \varepsilon > 0 : \bar{x}_- := \bar{x} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\bar{x}-\bar{x}_0}{\|\bar{x}-\bar{x}_0\|} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \cap B(\bar{x}_0, r)$ και $\bar{x}_+ := \bar{x} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\bar{x}-\bar{x}_0}{\|\bar{x}-\bar{x}_0\|} \in B(\bar{x}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B(\bar{x}_0, r))$, αφού $\|\bar{x}_\pm - \bar{x}\| = \frac{\varepsilon}{2}$ και $\|\bar{x}_\pm - \bar{x}_0\| = r \pm \frac{\varepsilon}{2}$. Συνεπώς, το $\bar{x}$ δεν είναι ούτε εσωτερικό ούτε εξωτερικό σημείο του U και άρα σύμφωνα με τον ορισμό είναι συνοριακό σημείο του U.

Τέλος, όπως μόλις είδαμε τα $\bar{x} \in \partial U$ είναι σημεία συσσώρευσης του U (αφού $\forall\, \varepsilon > 0 : \bar{x}_- \in B(\bar{x}, \varepsilon) \cap B(\bar{x}_0, r)$), ενώ πιο πάνω είδαμε ότι τα σημεία $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| > r$ δεν είναι σημεία συσσώρευσης (αφού $\exists\, \varepsilon > 0 :\ B(\bar{x}, \varepsilon) \cap U = \emptyset$). Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.5, 4, $\bar{U} = \bar{B}(\bar{x}_0, r) := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n :\ \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq r\}$. □

Α 4. Έστω $U := \{\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n :\ x_n > 0\}$. Βρείτε τα $U^\circ, \bar{U}, \partial U$.

Απόδειξη. Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) =: (\bar{x}', x_n)$, όπου $x_n > 0$. Τότε **η Ευκλείδεια απόσταση του** $\bar{x}$ **από το υποσύνολο** $U' := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ είναι

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, U') := \inf\{d(\bar{x}, \bar{y}) : \bar{y} \in U'\} &:= \inf\{\|\bar{x} - \bar{y}\| : \bar{y} \in U'\} \\ &= \min\{\|\bar{x} - \bar{y}\| : \bar{y} \in U'\} = |x_n| = x_n, \end{aligned}$$

αφού για $\bar{y} = (\bar{y}', y_n) \in U' \Leftrightarrow \bar{y}' \in \mathbb{R}^{n-1},\ y_n = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - \bar{y}\| = \|(\bar{x}', x_n) - (\bar{x}', y_n)\| &= \sqrt{\|\bar{x}' - \bar{y}'\|^2 + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{\|\bar{x}' - \bar{y}'\|^2 + x_n^2} \geq |x_n| = \|(\bar{x}', x_n) - (\bar{x}', 0)\| \end{aligned}$$

Συνεπώς $\forall\, \bar{z} \in B(\bar{x}, x_n) \Leftrightarrow \|\bar{z} - \bar{x}\| < x_n$ έχουμε $x_n - z_n \leq |x_n - z_n| \leq \|\bar{x} - \bar{z}\| < x_n$ και άρα $z_n > 0$, δηλ. $B(\bar{x}, x_n) \subset U$. Έτσι έχουμε $U \subset U^\circ$ και αφού εξ ορισμού $U^\circ \subset U$ συνολικά $U^\circ = U$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.5,4

$$\bar{U} = U \cup \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n :\ \bar{x} \text{ είναι σημείο συσσώρευσης του } U\}.$$

Έστω $\bar{y} = (\bar{y}', 0) \in U'$. Τότε $\forall\, \varepsilon > 0 : \bar{y} + \frac{\varepsilon}{2}\bar{e}_n \in U \cap B(\bar{y}, \varepsilon) \setminus \{\bar{y}\} \neq \emptyset$ και άρα το $\bar{y}$ είναι σημείο συσσώρευσης του U. Εξ άλλου δεν είναι ούτε εσωτερικό ούτε εξωτερικό σημείο του U.

Απ' την άλλη, για $\bar{x} = (\bar{x}', x_n)$ με $x_n < 0 \Leftrightarrow -x_n > 0$ $\forall\, \bar{z} \in B(\bar{x}, -x_n) \Leftrightarrow \|\bar{z} - \bar{x}\| < -x_n$ έχουμε $z_n - x_n \leq |x_n - z_n| \leq \|\bar{x} - \bar{z}\| < -x_n$ και άρα $z_n < 0$, δηλ. $B(\bar{x}, x_n) \subset \mathbb{R}^n \setminus U$. Συνεπώς τα $\bar{x} = (\bar{x}', x_n)$ με $x_n < 0$ είναι εξωτερικά σημεία και δεν είναι σημεία συσσώρευσης. Άρα $\bar{U} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ και $\partial U = U'$.

Α 5. Να δειχθεί ότι: $\forall\, U \subset \mathbb{R}^n :\ \partial U = \bar{U} \setminus U^\circ$.

1.4 Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^n$

Οι ακολουθίες στον $\mathbb{R}^n$, συμβολικά $(\bar{x}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ ή απλούστερα $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$, ορίζονται εντελώς ανάλογα με τις πραγματικές ακολουθίες $(x_\nu) \subset \mathbb{R}$ και έχουν ως επί το πλείστον τις ίδιες ιδιότητες με αυτές, που αποδεικνύονται πανομοιότυπα, με μόνη διαφορά την αντικατάσταση της απόλυτης τιμής $|\cdot|$ στον $\mathbb{R}$ με την Ευκλείδεια στάθμη $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$. Οι περισσότερες αυτών των ιδιοτήτων δεν είναι καν χαρακτηριστικό των ακολουθιών στον $\mathbb{R}^n$ αλλά ισχύουν όμοια και σε (πλήρεις) μετρικούς χώρους, αν αντικαταστήσουμε την απόσταση $\|\bar{x} - \bar{y}\|$ δύο σημείων στον $\mathbb{R}^n$ με την μετρική $d(x, y)$ του μετρικού χώρου στον οποίο βρίσκονται οι εξεταζόμενες ακολουθίες.

Το βασικότερο αποτέλεσμα που προκύπτει από την μελέτη των ακολουθιών στον $\mathbb{R}^n$ είναι ότι κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει, το οποίο τον καθιστά έναν **πλήρη μετρικό χώρο**. Ειδικότερα, αφού ο $\mathbb{R}^n$ είναι ένας σταθμητός χώρος, είναι τώρα ένας πλήρης σταθμητός χώρος, δηλαδή ένας **χώρος Banach**, και ακόμα ειδικότερα, αφού η στάθμη του επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο, είναι τώρα ένας πλήρης χώρος με εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή ένας **χώρος Hilbert**. Η γενική θεωρία πλήρων χώρων με νόρμα ή εσωτερικό γινόμενο είναι αντικείμενο της **Συναρτησιακής Ανάλυσης**.

Ορισμός 1.4.1. Μια απεικόνιση $\forall\, \nu \in \mathbb{N} : \nu \mapsto \bar{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **ακολουθία στον** $\mathbb{R}^n$ και συμβολίζεται με $(\bar{x}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ ή πιο απλά $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1.4.2. Μια ακολουθία $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ **συγκλίνει στο** $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ **ή έχει όριο το** $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, συμβολικά $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ όταν $\nu \to \infty$ ή απλούστερα $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$, αν $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0$ στο $\mathbb{R}$, δηλ.

$$\begin{aligned} \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 :&\Leftrightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, \nu \in \mathbb{N},\ \nu \geq \nu_0 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Πρόταση 1.4.1. *Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ ορίζεται μονοσήμαντα και συμβολίζεται με $\lim\limits_{\nu\to\infty} \bar{x}_\nu$.*

Απόδειξη. Έστω $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$, $\bar{x}_\nu \to \bar{y}_0$ με $\bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$, δηλ. $\|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\| > 0$. Τότε (για $\varepsilon = \frac{\|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\|}{2} > 0$)

$$\begin{aligned} &\exists\, \nu_1 \in \mathbb{N}\ \forall\, \nu \in \mathbb{N},\ \nu \geq \nu_1 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \frac{\|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\|}{2} \\ &\exists\, \nu_2 \in \mathbb{N}\ \forall\, \nu \in \mathbb{N},\ \nu \geq \nu_2 : \|\bar{x}_\nu - \bar{y}_0\| < \frac{\|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\|}{2} \end{aligned}$$

και άρα $\forall\, \nu \in \mathbb{N},\ \nu \geq \max\{\nu_1, \nu_2\}$:

$$\|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\| \leq \|\bar{x}_0 - \bar{x}_\nu\| + \|\bar{x}_\nu - \bar{y}_0\| < \frac{\|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\|}{2} + \frac{\|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\|}{2} = \|\bar{x}_0 - \bar{y}_0\|,$$

άτοπο. □

Πρόταση 1.4.2. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ είναι και φραγμένη, δηλ.* $\exists\, r > 0 :\ (\bar{x}_\nu) \subset B(\bar{0}, r)$.

Απόδειξη. Έστω $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$. Τότε (για $\varepsilon = 1$)

$$\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, \nu \in \mathbb{N},\ \nu \geq \nu_0 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < 1$$

και, αφού $\|\bar{x}_\nu\| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| + \|\bar{x}_0\|$,

$$\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, \nu \in \mathbb{N},\ \nu \geq \nu_0 : \|\bar{x}_\nu\| < 1 + \|\bar{x}_0\|.$$

Άρα

$$\forall\, \nu \in \mathbb{N} : \|\bar{x}_\nu\| \leq \max\{\|\bar{x}_1\|, \ldots, \|\bar{x}_{\nu_0}\|, 1 + \|\bar{x}_0\|\} =: r_0$$

και συνεπώς για κάθε $r > r_0$ έχουμε το αποδεικτέο. □

Πρόταση 1.4.3.

$$\bar{x}_\nu = (x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(n)}) \to \bar{x}_0 = (x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)}) \Leftrightarrow \forall\, i = 1, \ldots, n : x_\nu^{(i)} \to x_0^{(i)}$$

Απόδειξη. $\Rightarrow$: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας, $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, \nu \in \mathbb{N},\ \nu \geq \nu_0 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \varepsilon$ και αφού, σύμφωνα με την ισοδυναμία (1.7), $\forall\, i = 1, \ldots, n : |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|$, συνεπάγεται

$$\forall\, i = 1, \ldots, n : \exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, \nu \in \mathbb{N},\ \nu \geq \nu_0 : |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$: Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\forall\, i = 1, \ldots, n\ \exists\, \nu_i \in \mathbb{N}\ \forall\, \nu \in \mathbb{N},\ \nu \geq \nu_i : |x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ και άρα για $\nu_0 := \max\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$ έχουμε από τον ορισμό της $\|\cdot\|_\infty$ και την (1.7) $\forall\, \nu \in \mathbb{N},\ \nu \geq \nu_0$:

$$|x_\nu^{(i)} - x_0^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\ \forall\, i = 1, \ldots, n \Rightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \Rightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \varepsilon.$$

□

Θεώρημα 1.4.4. (Bolzano-Weierstrass) *Κάθε φραγμένη ακολουθία $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υπακολουθία $(\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$.*

Απόδειξη. Αφού η $(\bar{x}_\nu) = ((x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(n)})) \subset \mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$\forall\, i = 1, \ldots, n : |x_\nu^{(i)}| \leq \|\bar{x}_\nu\| < r\ \forall\, \nu \in \mathbb{N},$$

δηλ. οι ακολουθίες $(x_\nu^{(i)}) \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένες $\forall\, i = 1, \ldots, n$. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass στον $\mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, n$ υπάρχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία της $(x_\nu^{(i)})$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε *μία* υπακολουθία

$$(\bar{x}_{k_\nu}) = ((x_{k_\nu}^{(1)}, \ldots, x_{k_\nu}^{(n)})) \subset (\bar{x}_\nu) = ((x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(n)}))$$

έτσι ώστε $x_{k_\nu}^{(i)} \to x_0^{(i)} \in \mathbb{R}\ \forall\ i = 1, \dots, n$, δηλ. (Πρόταση 1.4.3) $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}_0 := (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}) \in \mathbb{R}^n$. Αυτό επιτυγχάνεται ως εξής: Έστω $(x_{\ell_\nu}^{(1)})$ μια συγκλίνουσα υπακολουθία της $(x_\nu^{(1)})$. Θεωρούμε την $(x_{\ell_\nu}^{(2)})$. Ως υπακολουθία της $(x_\nu^{(2)})$ είναι και αυτή φραγμένη και άρα εχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $(x_{m_{\ell_\nu}}^{(2)})$. Τότε όμως θα συγκλίνει και η $(x_{m_{\ell_\nu}}^{(1)})$ ως υπακολουθία της συγκλίνουσας ακολουθίας $(x_{\ell_\nu}^{(1)})$. Βρήκαμε λοιπόν *μία* υπακολουθία $(\bar{x}_{m_{\ell_\nu}})$ έτσι ώστε και η $(x_{m_{\ell_\nu}}^{(1)})$ και η $(x_{m_{\ell_\nu}}^{(2)})$ να συγκλίνουν. Επιλέγοντας μια υπακολουθία-της έτσι ώστε η αντίστοιχη της τρίτης συντεταγμένης να συγκλίνει, θα έχουμε ότι για αυτήν την υπακολουθία θα συγκλίνουν οι αντίστοιχες και των τριών πρώτων συντεταγμένων. Συνεχίζοντας έτσι, μετά από n βήματα, θα έχουμε κατασκευάσει την υπακολουθία $(\bar{x}_{k_\nu})$ της οποίας οι αντίστοιχες όλων των συντεταγμένων της θα συγκλίνουν. □

Παρατηρηση **4.** Τα όρια των συγκλινουσών *υπακολουθιών* της $(\bar{x}_\nu)$ ονομάζονται **σημεία συσσώρευσης (ή οριακά σημεία) της ακολουθίας**.

Ορισμός 1.4.3. Μια ακολουθία $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται **ακολουθία Cauchy** (ή βασική ακολουθία) αν $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ \nu, \mu \in \mathbb{N},\ \nu, \mu \geq \nu_0 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_\mu\| < \varepsilon$.

Θεώρημα 1.4.5. *Μια ακολουθία $(\bar{x}_\nu) \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνει ανν είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη. $(\bar{x}_\nu)$ είναι ακολουθία Cauchy
$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ \nu, \mu \in \mathbb{N},\ \nu, \mu \geq \nu_0 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_\mu\| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ \nu, \mu \in \mathbb{N},\ \nu, \mu \geq \nu_0 : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_\mu\|_\infty < \varepsilon$
$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ \nu, \mu \in \mathbb{N},\ \nu, \mu \geq \nu_0 : |x_\nu^{(i)} - x_\mu^{(i)}| < \varepsilon\ \forall\ i = 1, \dots, n$
$\Leftrightarrow \forall\ i = 1, \dots, n : \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_i \in \mathbb{N}\ \forall\ \nu, \mu \in \mathbb{N},\ \nu, \mu \geq \nu_i : |x_\nu^{(i)} - x_\mu^{(i)}| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow \forall\ i = 1, \dots, n$: $(x_\nu^{(i)})$ είναι ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow \forall\ i = 1, \dots, n$: $(x_\nu^{(i)})$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow (\bar{x}_\nu)$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}^n$

Παρατήρηση: Να προσεχθεί ότι η δεύτερη έως τέταρτη πρόταση ισχυρίζονται ότι "$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_i(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει η πρόταση $p(\varepsilon, \nu_i(\varepsilon))$". Οι ισοδυναμίες που τις περιέχουν ισχύουν *συνολικά για όλα τα* $\varepsilon > 0$. Ένα συγκεκριμένο $(\varepsilon, \nu_i(\varepsilon))$ στο ένα μέρος μιας ισοδυναμίας μπορεί να αλλάζει στο άλλο. Αυτό ισχύει στην δεύτερη ισοδυναμία, όπου αλλάζει το ε, και στην τέταρτη, όπου αλλάζει το ν_i. □

Πρόταση 1.4.6. *Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Το $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο συσσώρευσης του U ανν $\exists\ (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\} :\ \bar{x}_\nu \to \bar{x}$.*

Απόδειξη. $\Rightarrow$: Αφού $\forall\ \varepsilon > 0$: $U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$, έχουμε ειδικότερα $\forall\ \nu \in \mathbb{N}\ \exists\ \bar{x}_\nu \in U \cap B(\bar{x}, \frac{1}{\nu}) \setminus \{\bar{x}\}$ και άρα $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| < \frac{1}{\nu} \to 0$, δηλ. $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$.

$\Leftarrow$: Αφού $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu \in \mathbb{N} : \|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| < \varepsilon$ και $\bar{x}_\nu \in U \setminus \{\bar{x}\}$, έχουμε $\forall\ \varepsilon > 0 : U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$. □

Πρόταση 1.4.7. *Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε: $\bar{x} \in \bar{U} \Leftrightarrow \exists\ (\bar{x}_\nu) \subset U :\ \bar{x}_\nu \to \bar{x}$.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.5 (4) αρκεί να δείξουμε ότι το δεξί μέρος της ισοδυναμίας ισοδυναμεί με την πρόταση: $\bar{x} \in U$ ή $\bar{x}$ είναι σημείο συσσώρευσης του U.

$\Leftarrow$: Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$. Αν υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall\, \nu \geq \nu_0$: $\bar{x}_\nu = \bar{x}$, τότε $\bar{x} \in U$. Αν για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα $k_\nu \geq \nu$ με $\bar{y}_\nu := \bar{x}_{k_\nu} \neq \bar{x}$, τότε $\bar{y}_\nu \to \bar{x}$, αφού $k_\nu \geq \nu \to \infty$, δηλ. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{y}_\nu \in U \setminus \{\bar{x}\} : \|\bar{y}_\nu - \bar{x}\| < \varepsilon$ ή ισοδύναμα $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{y}_\nu \in U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\}$.

$\Rightarrow$: Αν $\bar{x} \in U$ τότε υπάρχει η $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu := \bar{x} \to \bar{x}$. Αν $\bar{x} \notin U$, τότε $\forall\, \nu \in \mathbb{N}\ \exists\, \bar{x}_\nu \in U \cap B(\bar{x}, \frac{1}{\nu}) \setminus \{\bar{x}\}$ και άρα $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| < \frac{1}{\nu} \to 0$, δηλ. $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$.

Παρατήρηση: Να προσεχθεί ότι η ακολουθία $(\bar{y}_\nu)$ της απόδειξης δεν είναι απαραίτητα υπακολουθία της $(\bar{x}_\nu)$, αφού μπορεί για $\nu \neq \mu$ να έχουμε $k_\nu = k_\mu$ και άρα $\bar{y}_\nu = \bar{y}_\mu = \bar{x}_{k_\nu}$, δηλ. ο ίδιος όρος της $(\bar{x}_\nu)$ να έχει επιλεγεί δυο φορές. Αλλιώς· αν το $(k_\nu) \subset \mathbb{N}$ δεν αυξάνει *γνήσια*, τότε η $(\bar{x}_{k_\nu})$ δεν είναι υπακολουθία της $(\bar{x}_\nu)$. Όμως, ακόμα και για μια απλώς αύξουσα ακολουθία $k_\nu \geq \nu$, η $(\bar{y}_\nu) = (\bar{x}_{k_\nu})$ τείνει στο όριο της συγκλίνουσας $(\bar{x}_\nu)$. □

Πρόταση 1.4.8. $U \subset \mathbb{R}^n$ *κλειστό* $\Leftrightarrow \forall\, (\bar{x}_\nu) \subset U$ *με* $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n :\ \bar{x}_0 \in U$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.3.4 αρκεί να δείξουμε ότι το δεξί μέρος της ισοδυναμίας ισοδυναμεί με το ότι το U περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του.

$\Rightarrow$: Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Τότε αν $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq \nu_0 : \bar{x}_\nu = \bar{x}_0$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αν $\forall\, \nu \in \mathbb{N}\ \exists\, \mu \in \mathbb{N}, \mu \geq \nu : \bar{x}_\mu \neq \bar{x}_0$ επιλέγουμε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ένα τέτοιο $\bar{x}_\mu =: \bar{y}_\nu$ και έχουμε μια ακολουθία $(\bar{y}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{y}_\nu \to \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Αλλά τότε το $\bar{x}_0$ είναι σημείο συσσώρευσης του U, αφού $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{y}_\nu \in U \setminus \{\bar{x}_0\} :\ \|\bar{y}_\nu - \bar{x}_0\| < \varepsilon$ ή ισοδύναμα $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{y}_\nu \in (U \setminus \{\bar{x}_0\}) \cap B(\bar{x}_0, \varepsilon)$.

$\Leftarrow$: Έστω $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του U. Τότε $\forall\, \nu \in \mathbb{N}\ \exists\, \bar{x}_\nu \in (U \setminus \{\bar{x}_0\}) \cap B(\bar{x}_0, \frac{1}{\nu})$ και άρα $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \leq \frac{1}{\nu} \to 0$, δηλ. $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \in U$. □

Πρόταση 1.4.9. $U \subset \mathbb{R}^n$ *συμπαγές* $\Leftrightarrow\ \forall\, (\bar{x}_\nu) \subset U\ \exists\, (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu) :\ \lim\limits_{\nu \to \infty} \bar{x}_{k_\nu} \in U$.

Απόδειξη. $\Rightarrow$: Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$. Αφού το $U \subset \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές, εξ' ορισμού (βλ. τον Ορισμό 1.3.4 (2)) θα είναι και φραγμένο και άρα και η $(\bar{x}_\nu)$ θα είναι φραγμένη. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass (Θ. 1.4.4), υπάρχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία-της $(\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Αλλά τότε $\bar{x}_0 \in U$, σύμφωνα με την Πρόταση 1.4.8, αφού το U είναι κλειστό εξ' ορισμού.

$\Leftarrow$: Έστω ότι το U δεν είναι φραγμένο, δηλ. $\nexists\, r > 0 : U \subset B(\bar{0}, r)$ ή ισοδύναμα $\forall\, r > 0\ \exists\, \bar{x} \in U : \|\bar{x}\| \geq r$ και συνεπώς ειδικότερα $\forall\, \nu \in \mathbb{N}\ \exists\, \bar{x}_\nu \in U : \|\bar{x}_\nu\| \geq \nu$. Άρα η $(\bar{x}_\nu)$ δεν έχει συγκλίνουσες υπακολουθίες, αφού για κάθε $(\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$ ισχύει $\|\bar{x}_{k_\nu}\| \geq k_\nu > \nu \to \infty$, και άρα η $(\bar{x}_{k_\nu})$ δεν είναι φραγμένη, ενώ μια συγκλίνουσα ακολουθία είναι πάντα φραγμένη (Πρόταση 1.4.2).

Για να δείξουμε ότι το U είναι κλειστό, έστω $\bar{x} \in \bar{U}$. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 1.4.7, υπάρχει $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$. Από την υπόθεση, υπάρχει $(\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$ με $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}_0 \in U$. Αφού όμως κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει στο ίδιο όριο (Άσκηση) έχουμε και $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}$, και άρα από την μοναδικότητα του ορίου συγκλίνουσας ακολουθίας (Πρόταση 1.4.1) $\bar{x} = \bar{x}_0 \in U$. Συνεπώς, $\bar{U} \subset U$ και αφού $U \subset \bar{U}$, έχουμε $U = \bar{U}$ κλειστό (Πρόταση 1.3.5 (1), (2)). $\square$

A 6. Δείξτε ότι: $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|\bar{x}_\nu\| \to \|\bar{x}\| \in \mathbb{R}$.

Λύση. Εξ' ορισμού

$$\bar{x}_\nu \to \bar{x} :\Leftrightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| \to 0$$

και από την Άσκηση 2, (ε')

$$0 \leq |\|\bar{x}_\nu\| - \|\bar{x}\|| \leq \|\bar{x}_\nu - \bar{x}\|.$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών (πραγματικών) Ακολουθιών προκύπτει το αποδεικτέο.

A 7. Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το μονοσύνολο $\{\bar{x}\}$ είναι συμπαγές.

Λύση. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 1.4.9, αφού η μοναδική ακολουθία $(\bar{x}_\nu) \subset \{\bar{x}\}$ είναι η σταθερή ακολουθία $\bar{x}_\nu = \bar{x} \to \bar{x}$.

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης