ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

Ενότητα: Όρια και συνέχεια συναρτήσεων

Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης

Τμήμα: Μαθηματικών

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 2

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων

2.1 Πραγματικές συναρτήσεις πραγματικών μεταβλητών

Ορισμός 2.1.1. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** n **πραγματικών μεταβλητών** $f : U \to \mathbb{R}$ μια απεικόνιση από το U στο $\mathbb{R}$,

$$U \ni \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(\bar{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$$

(δηλ. **σε κάθε** $\bar{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$ αντιστοιχούμε **ένα μοναδικό** $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$, την **τιμή της** f **στο** $\bar{x}$). Το U είναι το **πεδίο ορισμού**, το $\mathbb{R}$ το **πεδίο τιμών**, το $f(U) := \{f(\bar{x}) : \bar{x} \in U\} \subset \mathbb{R}$ το **σύνολο τιμών** ή η **εικόνα**, και το $\Gamma_f := \{(\bar{x}, f(\bar{x})) : \bar{x} \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ το **γράφημα** της f.

Παρατηρηση **5.** Όταν $n = 1$ έχουμε τις γνωστές από το σχολείο και τους Απειροστικούς Λογισμούς Ι και ΙΙ πραγματικές συναρτήσεις (μιας μεταβλητής) $f : \mathbb{R} \supset U \to \mathbb{R}$, ενώ όταν $n > 2$, λέμε ότι η $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ είναι μια **πραγματική συνάρτηση πολλών (ή περισσοτέρων) μεταβλητών**, η μελέτη των οποίων (μαζί με την μελέτη των διανυσματικών συναρτήσεων που θα γνωρίσουμε αργότερα) είναι το αντικείμενο των Απειροστικών Λογισμών ΙΙΙ και IV, δηλ. της **Ανάλυσης σε περισσότερες μεταβλητές**. Συνήθως όταν εννοούμε μια πραγματική συνάρτηση (μίας ή πολλών μεταβλητών) παραλλείπουμε τον όρο ¨πραγματική¨ και αναφερόμαστε απλά σε συνάρτηση, ενώ όταν εννοούμε μια διανυσματική συνάρτηση για λόγους σαφήνειας καλό είναι να αναφέρουμε και τον όρο ¨διανυσματική¨.

Παρατηρηση **6.** Στην περίπτωση $\mathbf{n = 1}$ το γράφημα

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in U \subset \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

της $f : \mathbb{R} \supset U \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$, μπορεί να απεικονισθεί (**γραφική παράσταση**) ως μια **καμπύλη στο επίπεδο**, $\mathbb{R}^2$, ενώ στη περίπτωση $\mathbf{n=2}$ μιας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ το γράφημα

$$\Gamma_f = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in U \subset \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

της f μπορεί να απεικονισθεί ως μια **επιφάνεια στον χώρο**, $\mathbb{R}^3$, αντιστοιχώντας σε κάθε σημείο $\bar{x} = (x_1, x_2) \in U \subset \mathbb{R}^2$ του επιπέδου το ¨ύψος¨ $f(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ της f στο σημείο αυτό.

Παρατηρηση **7.** Να προσεχθεί ότι όταν μια πραγματική συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού στον $\mathbb{R}^n$, το γράφημά της είναι πάντα ένα υποσύνολο (πιο συγκεκριμένα: μια υπερεπιφάνεια) του $\mathbb{R}^{n+1}$.

ΣΧΗΜΑΤΑ

Ορισμός 2.1.2. Έστω $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, και $c \in \mathbb{R}$. Ονομάζουμε **σύνολο στάθμης** c **της** f το υποσύνολο του πεδίου ορισμού της στο οποίο η f έχει την τιμή $c \in \mathbb{R}$,

$$L_f(c) := \{\bar{x} \in U : f(\bar{x}) = c\} \subset U \subset \mathbb{R}^n.$$

Για $\mathbf{n=2}$ το σύνολο στάθμης ονομάζεται και **καμπύλη στάθμης** c **της** $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$

$$L_f(c) = \{(x_1, x_2) \in U : f(x_1, x_2) = c\} \subset U \subset \mathbb{R}^2,$$

ενώ για $\mathbf{n=3}$ το σύνολο στάθμης ονομάζεται και **επιφάνεια στάθμης** c **της** $f : \mathbb{R}^3 \supset U \to \mathbb{R}$

$$L_f(c) = \{(x_1, x_2, x_3) \in U : f(x_1, x_2, x_3) = c\} \subset U \subset \mathbb{R}^3,$$

Παρατηρηση **8.** Προφανώς $L_f(c) = \emptyset$, όταν η f δεν λαμβάνει την τιμή c, δηλ. $c \notin f(U) \subset \mathbb{R}$. Να προσεχθεί επίσης ότι στις περιπτώσεις $n = 2, 3$ καμπύλες και επιφάνειες στάθμης, αντίστοιχα, είναι *υποσύνολα* του πεδίου ορισμού της f και *όχι απαραίτητα καμπύλες ή επιφάνειες με την γεωμετρική τους έννοια*, βλ. τα ακόλουθα παραδείγματα.

Παρατηρηση **9.** Να προσεχθεί ότι όταν μια πραγματική συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού στον $\mathbb{R}^n$, τα σύνολα στάθμης της είναι πάντα υποσύνολα του πεδίου ορισμού της και άρα του $\mathbb{R}^n$.

Παραδειγμα **1.** Το γράφημα της συνάρτησης $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, είναι η επιφάνεια στον χώρο

$$\Gamma_f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1^2 + x_2^2,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

δηλ. ένα παραβολοειδές από περιστροφή, και οι καμπύλες στάθμης $c \in \mathbb{R}$ δίνονται από τα υποσύνολα του επιπέδου $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} L_f(c) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = c\} \\ &= \begin{cases} \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = (\sqrt{c})^2\} & \text{για } c > 0, \\ \{(0,0)\} & \text{για } c = 0, \\ \emptyset & \text{για } c < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

δηλαδή για $c > 0$ είναι οι κύκλοι του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\sqrt{c} > 0$.

ΣΧΗΜΑΤΑ

Αν για κάθε $c \geq 0$ μεταφέρουμε την καμπύλη στάθμης $c > 0$ κάθετα προς το επίπεδο x_1x_2 στο ύψος (στάθμη) $x_3 = c$ και ενώσουμε όλες αυτές τις καμπύλες

$$L_f(c) \times \{c\} = \{(x_1, x_2, c) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in L_f(c)\}$$

θα έχουμε συνολικά ολόκληρη την επιφάνεια Γ_f του παραβολοειδούς. Αυτό ισχύει ανάλογα και για κάθε γράφημα μιας (πραγματικής) συνάρτησης δύο μεταβλητών.

Οι καμπύλες $L_f(c) \times \{c\}$ προκύπτουν δηλαδή από την τομή του γραφήματος Γ_f με το επίπεδο $x_3 = c$ και οι καμπύλες στάθμης c είναι οι κάθετες προβολές τους στο επίπεδο $x_3 = 0$.

Παραδειγμα **2.** Η **σταθερή συνάρτηση** στο επίπεδο $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = d \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ έχει ως γράφημα το οριζόντιο επίπεδο

$$\Gamma_f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = d, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

δηλ. το επίπεδο $x_3 = d$ του $\mathbb{R}^3$, και ως σύνολο (ή ¨καμπύλη¨) στάθμης c όλο το πεδίο ορισμού της για $c = d$ και το κενό σύνολο για $c \neq d$,

$$L_f(c) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{για } c = d, \\ \emptyset & \text{για } c \neq d \end{cases} \subset \mathbb{R}^2$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι και στις δύο περιπτώσεις το σύνολο στάθμης της σταθερής συνάρτησης δεν είναι καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ με την γεωμετρική έννοια.

Γενικότερα, η σταθερή συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, $f(\bar{x}) = d \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, έχει ως γράφημα το υπερεπίπεδο

$$\Gamma_f = \{(\bar{x}, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = d, \bar{x} \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

δηλ. το υπερεπίπεδο $x_{n+1} = d$ του $\mathbb{R}^{n+1}$, και ως σύνολο στάθμης c όλο το πεδίο ορισμού της για $c = d$ και το κενό σύνολο για $c \neq d$,

$$L_f(c) = \begin{cases} \mathbb{R}^n & \text{για } c = d, \\ \emptyset & \text{για } c \neq d \end{cases} \subset \mathbb{R}^n.$$

Όταν $n = 3$ βλέπουμε ότι η ¨επιφάνεια¨ στάθμης της σταθερής συνάρτησης είναι όλο το $\mathbb{R}^3$.

Α 8. Μελετήστε γραφικά την συνάρτηση $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Ειδικότερα, δώστε το γραφήμά της Γ_f και τις καμπύλες στάθμης c, $L_f(c)$. Προσπαθήστε να σχεδιάσετε την f χρησιμοποιώντας και τις τομές του γραφήματός της με τα επίπεδα $x_1 = a$, $x_2 = b$ και $x_3 = c$ για κατάλληλα επιλεγμένα $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Α 9. Να μελετήσετε την Παράγραφο 2.1 του [;] και να κάνετε όσες περισσότερες μπορείτε από τις Ασκήσεις 1-31 της παραγράφου αυτής.

2.2 Όρια πραγματικών συναρτήσεων

Ορισμός 2.2.1. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του U και $\ell \in \mathbb{R}$. Τότε λέμε ότι **η f τείνει** (ή **συγκλίνει**) **στο ℓ όταν το $\bar{x}$ τείνει στο** $\bar{x}_0$ ή **η f έχει στο** $\bar{x}_0$ **το όριο** ℓ, συμβολικά $f(\bar{x}) \to \ell$ όταν $\bar{x} \to \bar{x}_0$, αν

$$\forall\ (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\} : \quad \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Rightarrow f(\bar{x}_\nu) \to \ell$$

Παρατηρηση **10.** Να προσεχθεί ότι στον πιο πάνω ακολουθιακό ορισμό η σύγκλιση $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ λαμβάνει χώρα στον $\mathbb{R}^n$, ενώ η σύγκλιση $f(\bar{x}_\nu) \to \ell$ λαμβάνει χώρα στον $\mathbb{R}$.

Πρόταση 2.2.1. *Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του U και $\ell \in \mathbb{R}$. Τότε*

$$f(\bar{x}) \to \ell \text{ όταν } \bar{x} \to \bar{x}_0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} : |f(\bar{x}) - \ell| < \varepsilon$$

Απόδειξη. $\Rightarrow$: Έστω ότι $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, \delta > 0\ \exists\, \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} : |f(\bar{x}) - \ell| \geq \varepsilon$. Τότε ειδικότερα $\forall\ \nu \in \mathbb{N}\ \exists\ \bar{x}_\nu \in U \cap B(\bar{x}_0, \frac{1}{\nu}) \setminus \{\bar{x}_0\} : |f(\bar{x}_\nu) - \ell| \geq \varepsilon$, δηλ. $\exists\, (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ και $f(\bar{x}_\nu) \not\to \ell$, άτοπο.

$\Leftarrow$: Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ και $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists\ \delta > 0\ \forall\ \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} : |f(\bar{x}) - \ell| < \varepsilon$. Απ' την άλλη, $\exists\, \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq \nu_0 : \bar{x}_\nu \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\}$. Συνεπώς, $\forall\, \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq \nu_0 : |f(\bar{x}_\nu) - \ell| < \varepsilon$.

Πρόταση 2.2.2. *Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ και $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του U. Το όριο μιας συγκλίνουσας συνάρτησης f όταν το $\bar{x}$ τείνει στο $\bar{x}_0$ είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x})$.*

Απόδειξη. Έστω ότι όταν το $\bar{x}$ τείνει στο $\bar{x}_0$ η f τείνει και στο ℓ_1 και στο ℓ_2 με $|\ell_1 - \ell_2| > 0$. Τότε για $i = 1, 2$

$$\exists\, \delta_i > 0\ \forall\, \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta_i) \setminus \{\bar{x}_0\} : |f(\bar{x}) - \ell_i| < \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$$

και άρα για $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ έχουμε

$$\forall\, \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} : |\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - f(\bar{x})| + |f(\bar{x}) - \ell_2| < |\ell_1 - \ell_2|,$$

άτοπο.

Παρατηρηση **11.** (α') Από την Πρόταση 2.2.1 προκύπτει

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell \Leftrightarrow \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} |f(\bar{x}) - \ell| = 0.$$

(β') Αφού το $\bar{x}_0$ είναι εσωτερικό σημείο του U, θα υπάρχει ένα $\delta_0 > 0$ με $B(\bar{x}_0, \delta_0) \subset U$, και αφού $\forall\, \delta > 0$: $\bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta) \Leftrightarrow \bar{\eta} := \bar{x} - \bar{x}_0 \in B(\bar{0}, \delta)$, έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell &\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta \in (0, \delta_0)\ \forall\, \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} : |f(\bar{x}) - \ell| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta \in (0, \delta_0)\ \forall\, \bar{\eta} \in B(\bar{0}, \delta) \setminus \{\bar{0}\} : |f(\bar{x}_0 + \bar{\eta}) - \ell| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \lim_{\bar{\eta}\to\bar{0}} f(\bar{x}_0 + \bar{\eta}) = \ell.\end{aligned}$$

Ορισμός 2.2.2. Έστω $f, g : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε ορίζονται

(α') το **άθροισμα** των f και g,

$$f + g : U \to \mathbb{R}, \quad (f + g)(\bar{x}) := f(\bar{x}) + g(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in U,$$

(β') το **βαθμωτό γινόμενο** της f με το $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha f : U \to \mathbb{R}, \quad (\alpha f)(\bar{x}) := \alpha f(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in U,$$

(γ') το **γινόμενο** των f και g,

$$fg : U \to \mathbb{R}, \quad (fg)(\bar{x}) := f(\bar{x})g(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in U,$$

(δ') αν $g(\bar{x}) \neq 0\ \forall\, \bar{x} \in U$, το **πηλίκο** της f δια την g,

$$\frac{f}{g} : U \to \mathbb{R}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(\bar{x}) := \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} \quad \forall\, \bar{x} \in U,$$

(ε') η **σύνθεση** της f με την $h : V \to \mathbb{R}$, $f(U) \subset V \subset \mathbb{R}$,

$$h \circ f : U \to \mathbb{R}, \quad (h \circ f)(\bar{x}) := h(f(\bar{x})) \quad \forall\, \bar{x} \in U.$$

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω $f, g : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0$ σημείο συσσώρευσης του U και $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} g(\bar{x}) = m \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν τα όρια*

(α') $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (f + g)(\bar{x}) = \ell + m$,

(β') $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (\alpha f)(\bar{x}) = \alpha\, \ell$ *για* $\alpha \in \mathbb{R}$,

(γ') $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (fg)(\bar{x}) = \ell\, m$,

(δ') $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \left(\frac{f}{g}\right)(\bar{x}) = \frac{\ell}{m}$, *αν* $m \neq 0$,

(ε') $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (h \circ f)(\bar{x}) = h(\ell)$ *για* $h : V \to \mathbb{R}$, $f(U) \subset V \subset \mathbb{R}$, *συνεχή στο* $\ell \in V$.

Απόδειξη. Οι αποδείξεις των 1, 3 και 4 αφήνονται ως ασκήσεις.

Απόδειξη του 5: Έστω $(\bar{x}_\nu) \in U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$. Τότε $(f(\bar{x}_\nu)) \subset V$ με $f(\bar{x}_\nu) \to \ell \in V$ και άρα, αφού η $h : V \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο ℓ, $(h \circ f)(\bar{x}_\nu) = h(f(\bar{x}_\nu)) \to h(\ell)$.

Απόδειξη του 2: Ακολουθεί αμέσως από το 5 για $h(y) = \alpha y$, $y \in \mathbb{R}$.

Πόρισμα 2.2.4. *Έστω* $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0$ *σημείο συσσώρευσης του* U *και* $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell \in \mathbb{R}$. *Τότε υπάρχουν τα όρια*

(α') $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} |f(\bar{x})| = |\ell|$,

(β') $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \sqrt{|f(\bar{x})|} = \sqrt{|\ell|}$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 2.2.3, 5 για τις συνεχείς συναρτήσεις $h(y) = |y|$, $y \in \mathbb{R}$, και $h(y) = \sqrt{|y|}$, $y \in \mathbb{R}$, αντίστοιχα.

Παραδειγμα **3.** (α') Η $f(x, y) = x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, έχει γράφημα το κεκλιμένο επίπεδο στον $\mathbb{R}^3$

$$\Gamma_f = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

με αλγεβρική εξίσωση στον χώρο $z = x$ και καμπύλες στάθμης $c \in \mathbb{R}$ τις ευθείες

$$L_f(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = c\} = \{(c, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$$

με αλγεβρική εξίσωση στο επίπεδο xy την $x = c$. Επίσης

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0,$$

αφού

$$|f(x, y) - x_0| = |x - x_0| \leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\|$$

και άρα $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta := \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\forall\ (x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$, δηλ. $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ να ισχύει $|f(x, y) - x_0| < \varepsilon$.

(β') Η $f(x, y) = xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, έχει γράφημα

$$\Gamma_f = \{(x, y, xy) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

με αλγεβρική εξίσωση $z = xy$ και καμπύλες στάθμης $c \in \mathbb{R}$

$$L_f(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = c\}$$

δηλαδή τις υπερβολές στο επίπεδο xy με αλγεβρική εξίσωση $y = \dfrac{c}{x}$. Επίσης, σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.1 και την άλγεβρα ορίων, για $\bar{x} = (x, y)$, $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} xy = \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} x \cdot \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} y = x_0 y_0$$

(γ') $f(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{\sin(\|\bar{x}\|^2)}{\|\bar{x}\|^2} = f(\bar{x})$, $\|\bar{x}\| > 0$. Βλέπουμε ότι η f εξαρτάται μόνο από την απόσταση του $\bar{x} = (x, y)$ από το σημείο αναφοράς $\bar{0} = (0, 0)$. (Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται συχνά **ακτινική** (radial).)

2.3 Συνέχεια πραγματικών συναρτήσεων

Ορισμός 2.3.1. Η συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, λέγεται

(α') **συνεχής στο σημείο** $\bar{x}_0 \in U$, αν

$$\forall\ (\bar{x}_\nu) \subset U : \quad \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Rightarrow f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$$

(β') **συνεχής στο** $A \subset U$, αν η $f : U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $\bar{x}_0 \in A$.

(γ') **συνεχής**, αν η $f : U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο U.

Παρατηρηση **12.** Να προσεχθεί ότι όταν το A δεν είναι ανοικτό μπορεί **ο περιορισμός της** $f : U \to \mathbb{R}$ **στο** $A \subset U$,

$$f|_A : A \to \mathbb{R}, \quad f|_A(\bar{x}) := f(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in A$$

να είναι συνεχής, ενώ η f να μην είναι συνεχής στο A.

(Αντιπαράδειγμα; Γιατί αυτό δεν μπορεί να συμβεί όταν το A είναι ανοικτό;)

Παρατηρηση **13.** Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της. (Γιατί;) Συνήθως όμως όταν μιλάμε για την συνέχεια μιας συνάρτησης $f : U \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο $\bar{x}_0 \in U$ υπονοούμε ότι το $\bar{x}_0$ είναι σημείο συσσώρευσης του U. Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου συνάρτησης, ισχύουν οι ισοδυναμίες (η απόδειξή τους αφήνεται ως άσκηση)

$$\begin{aligned} f \text{ συνεχής στο } \bar{x}_0 &\Leftrightarrow \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) \\ &\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) : |f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

και λέμε ισοδύναμα ότι η f έχει στο $\bar{x}_0$ το όριο $f(\bar{x}_0)$ ή η f τείνει στο $f(\bar{x}_0)$ όταν το $\bar{x}$ τείνει στο $\bar{x}_0$, συμβολικά $f(\bar{x}) \to f(\bar{x}_0)$ όταν $\bar{x} \to \bar{x}_0$.

Αποδεικνύεται ότι η πρόσθεση, το βαθμωτό γινόμενο, το γινόμενο, το πηλίκο και η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις. Πιο συγκεκριμένα ισχύει:

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω $f, g : U \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $\bar{x}_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $\bar{x}_0$:*

(α΄) $f + g$,

(β΄) αf *για* $\alpha \in \mathbb{R}$,

(γ΄) fg,

(δ΄) $\dfrac{f}{g}$, *αν* $g(\bar{x}_0) \neq 0$,

(ε΄) $h \circ f$ *για* $h : V \to \mathbb{R}$, $f(U) \subset V \subset \mathbb{R}$, *συνεχή στο* $f(\bar{x}_0)$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 17, αν το $\bar{x}_0$ είναι μεμονωμένο σημείο του U δεν χρειάζεται να αποδείξουμε τίποτα, ενώ αν το $\bar{x}_0$ είναι σημείο συσσώρευσης, το παρόν θεώρημα είναι πόρισμα του Θεωρήματος 2.2.3.

Πόρισμα 2.3.2. *Έστω $f : U \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\bar{x}_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε οι συναρτήσεις*

$$\begin{aligned} &|f| : U \to \mathbb{R}, \quad |f|(\bar{x}) := |f(\bar{x})| \quad \forall\, \bar{x} \in U, \\ &\sqrt{|f|} : U \to \mathbb{R}, \quad \sqrt{|f|}(\bar{x}) := \sqrt{|f(\bar{x})|} \quad \forall\, \bar{x} \in U, \end{aligned}$$

είναι συνεχείς στο $\bar{x}_0$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 2.5.4, 3 για τις συνεχείς συναρτήσεις $h(y) = |y|$, $y \in \mathbb{R}$, και $h(y) = \sqrt{|y|}$, $y \in \mathbb{R}$, αντίστοιχα.

Ορισμός 2.3.2. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : U \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **χώρος των συνεχών συναρτήσεων** και συμβολίζεται με

$$C(U) := \{f : U \to \mathbb{R} : \ f \text{ συνεχής}\}.$$

Πόρισμα 2.3.3.

$$f, g \in C(U),\ \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g, \alpha f, fg, |f|, \sqrt{|f|} \in C(U)$$

Θεώρημα 2.3.4. *Έστω $f : U \to \mathbb{R}$ συνεχής και $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Τότε το $f(U)$ είναι συμπαγές και η f λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο στο U, τα*

$$\begin{aligned} \max f &:= \max f(U) = \max\{f(\bar{x}) \in \mathbb{R} : \bar{x} \in U\}, \\ \min f &:= \min f(U) = \min\{f(\bar{x}) \in \mathbb{R} : \bar{x} \in U\}, \end{aligned}$$

αντίστοιχα, δηλ.

$$\exists\, \bar{x}_m, \bar{x}_M \in U : \quad \min f = f(\bar{x}_m) \leq f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_M) = \max f \quad \forall\, \bar{x} \in U.$$

Απόδειξη. Το ότι το $f(U) \subset \mathbb{R}$ είναι συμπαγές προκύπτει ως ειδική περίπτωση $m = 1$ του Θεωρήματος 2.5.6. Όμως κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο. Στην περίπτωση του $\min f$ η αναλυτική απόδειξη έχει ως εξής:

Αφού το $f(U) \subset \mathbb{R}$ είναι συμπαγές είναι και φραγμένο. Άρα έχει μέγιστο κάτω φράγμα

$$\inf f := \inf f(U) = \inf\{f(\bar{x}) \in \mathbb{R} : \bar{x} \in U\} \in \mathbb{R},$$

δηλ.

$$\forall\, \nu \in \mathbb{N}\ \exists\ (\bar{x}_\nu) \subset U : f(\bar{x}_\nu) \in \left[\inf f, \inf f + \frac{1}{\nu}\right)$$

και άρα $f(\bar{x}_\nu) \to \inf f$. Τότε όμως, αφού το $f(U)$ είναι και κλειστό, θα ισχύει σύμφωνα με την Πρόταση 1.4.8, $\inf f = \min f \in f(U)$, δηλ. $\exists\ \bar{x}_m \in U : f(\bar{x}_m) = \min f$. □

Ορισμός 2.3.3. Η συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, λέγεται **ομοιόμορφα συνεχής** αν

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ \bar{x}, \bar{y} \in U, \|\bar{x} - \bar{y}\| \leq \delta : |f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \varepsilon$$

Θεώρημα 2.3.5. *Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $f : U \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Είναι η ειδική περίπτωση $m = 1$ του Θεωρήματος 2.5.7. □

Παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων: σταθερή, πολυώνυμικές, ρητές, προκύπτουσες από σύνθεση συναρτήσεων.

Ασκήσεις

Α 10. Αποδείξτε τις ισοδυναμίες της Παρατήρησης 17.

Λύση. Η δεύτερη ισοδυναμία καθώς και η κατεύθυνση ¨$\Rightarrow$¨ της πρώτης είναι προφανείς. Για την κατεύθυνση ¨$\Leftarrow$¨ της πρώτης ισοδυναμίας, έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$. Τότε, αν $\exists\ \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq \nu_0 : \bar{x}_\nu = \bar{x}_0$, προφανώς $f(\bar{x}_\nu) = f(\bar{x}_0) \to f(\bar{x}_0)$. Αν δεν ισχύει η προηγούμενη υπόθεση, τότε αφαιρώντας από την ακολουθία $(\bar{x}_\nu)$ όλους τους όρους $\bar{x}_\nu = \bar{x}_0$ έχω μια υπακολουθία $(\bar{y}_n) \subset (\bar{x}_n) \cap U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{y}_\nu \to \bar{x}_0$ και άρα $f(\bar{y}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$, δήλ. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq \nu_0 : |f(\bar{y}_\nu) - f(\bar{x}_0)| < \varepsilon$. Το τελευταίο όμως θα ισχύει και αν αντικαταστήσω το $\bar{y}_\nu$ με το $\bar{x}_\nu$, αφού ισχύει και για τους αφαιρεθέντες όρους.

(Εναλλακτικά μπορούμε να πάμε και από το δεξιό μέλος της δεύτερης ισοδυναμίας στον αριστερό μέλος της πρώτης όπως στην Πρόταση 2.2.1: Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ και $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists\ \delta > 0\ \forall\ \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) : |f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| < \varepsilon$. Απ' την άλλη, $\exists\ \nu_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq \nu_0 : \bar{x}_\nu \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta)$. Συνεπώς, $\forall\ \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq \nu_0 : |f(\bar{x}_\nu) - f(\bar{x}_0)| < \varepsilon$.)

2.4 Διανυσματικές συναρτήσεις

Ορισμός 2.4.1. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Μια συνάρτηση n πραγματικών μεταβλητών $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R}^n \supset U \ni \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

με **συνιστώσες** τις (πραγματικές) συναρτήσεις $f_j : U \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, ονομάζεται **διανυσματική συνάρτηση** όταν $m \geq 2$ και **πραγματική ή βαθμωτή συνάρτηση** όταν $m = 1$.

Παρατηρηση **14.** Η $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, έχει πεδίο ορισμού το U, πεδίο τιμών το $\mathbb{R}^m$, σύνολο τιμών ή εικόνα το $\bar{f}(U) := \{\bar{f}(\bar{x}) : \bar{x} \in U\} \subset \mathbb{R}^m$ και γράφημα το $\Gamma_{\bar{f}} := \{(\bar{x}, \bar{f}(\bar{x})) : \bar{x} \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

Όταν $\mathbf{n = 1}$, το πεδίο ορισμού της $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$ είναι ένα διάστημα $U = I \subset \mathbb{R}$ και η $\bar{f}$ συνεχής (βλ. πιο κάτω) το *σύνολο τιμών (!)* της $\bar{f}(U) := \{\bar{f}(t) : t \in U\} \subset \mathbb{R}^m$ δίνει μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^m$ και γι' αυτό η $\bar{f}$ ονομάζεται **(παραμετρική) καμπύλη στον** $\mathbb{R}^m$ με **παράμετρο** την ανεξάρτητη μεταβλητή $t \in I$. Συνήθως χρησιμοποιούμε το t (αντί του x) για να συμβολίσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή γιατί φανταζόμαστε ότι η τιμή $\bar{f}(t) \in \mathbb{R}^m$ της καμπύλης αντιστοιχεί στην θέση ενός κινούμενου σημείου στον χώρο $\mathbb{R}^m$ την χρονική στιγμή $t \in I$. Ειδικότερα στους χώρους $\mathbb{R}^m$ με διάσταση $m = 1, 2, 3$ συμβολίζουμε τις συνιστώσες της καμπύλης $\bar{f}$ με x, y, z:

$$m = 1: \ \bar{f}(t) = f(t) = x(t) \in \mathbb{R}, \ t \in I \quad \text{(καμπύλη στην ευθεία)}$$

$$m = 2: \ \bar{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \ t \in I \quad \text{(καμπύλη στο επίπεδο)}$$

$$m = 3: \ \bar{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ t \in I \quad \text{(καμπύλη στον χώρο)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΕ ΣΧΗΜΑΤΑ

Όταν $\mathbf{m = n \geq 2}$ οι διανυσματικές συνάρτησεις $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$, λέγονται **διανυσματικό πεδία**. Αυτά αντιστοιχούν σε κάθε διάνυσμα του χώρου $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ένα διάνυσμα ίδιας διάστασης $\bar{f}(\bar{x})\mathbb{R}^n$ και χρησιμοποιούνται ευρέως στις Φυσικές Επιστήμες και στην Γεωμετρία κυρίως στις διαστάσεις $m = n = 2, 3$. Γραφικά, παριστάνουμε τα διανυσματικά πεδία σχεδιάζοντας σε κάθε σημείο του χώρου $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ένα βέλος με αρχή το σημείο $\bar{x}$ και κατεύθυνση και μήκος που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\bar{f}(\bar{x})$.

Παραδειγμα **4.**

Ρευστό σταθερής ροής σε σωλήνα

Πεδίο βαρύτητας

Περιστροφική κίνηση με ταχύτητα εξαρτώμενη από την απόσταση από την αρχή των αξόνων

Περιστροφική κίνηση με σταθερό μήκος ταχύτητας

2.5 Όρια και συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων

Οι ορισμοί, οι προτάσεις και οι αποδείξεις τους που γνωρίσαμε στις παραγράφους 2.2 και 2.3 σχετικά με τα όρια και την συνέχεια πραγματικών συναρτήσεων $f : U \to \mathbb{R}$ ισχύουν στο μεγαλύτερό τους μέρος ανάλογα και για διανυσματικές συναρτήσεις $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$, αφού οι πρώτες είναι η ειδική περίπτωση $m = 1$ των δεύτερων. Εξαίρεση αποτελούν τα αποτελέσματα που σχετίζονται με την (εσωτερική) πράξη του πολλαπλασιασμού και την διάταξη στον $\mathbb{R}$ τις οποίες δεν έχουμε ορίσει στον $\mathbb{R}^m$ για $m \geq 2$. Κατά τα άλλα ουσιαστικά αρκεί *να αντικαταστήσουμε* στις σχετικές έννοιες *την απόλυτη τιμή* $|\cdot|$, που είναι η Ευκλείδεια μετρική *στο πεδίο τιμών* $\mathbb{R}$ *των πραγματικών συναρτήσεων, με την Ευκλείδεια μετρική* $\|\cdot\|$ *στο πεδίο τιμών* $\mathbb{R}^m$ *των διανυσματικών συναρτήσεων.*

Για αυτούς τους λόγους αναφέρουμε στα επόμενα τα ισχύοντα σχετικά με τα όρια και την συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων n πραγματικών μεταβλητών χωρίς απόδειξη και προ(ς)καλούμε τον αναγνώστη να ελέγξει τα παραπάνω λεχθέντα ξαναδιαβάζοντας τις σχετικές αποδείξεις στις παραγράφους 2.2 και 2.3 και κάνοντας νοερά την αναφερθείσα αντικατάσταση. Στα επόμενα ισχύει πάντα $n, m, k \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 2.5.1. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του U και $\bar{\ell} \in \mathbb{R}^m$. Τότε λέμε ότι **η** $\bar{f}$ **τείνει** (ή **συγκλίνει**) **στο** $\bar{\ell}$ **όταν το** $\bar{x}$ **τείνει στο** $\bar{x}_0$ ή **η** f **έχει στο** $\bar{x}_0$ **το όριο** $\bar{\ell}$, συμβολικά $f(\bar{x}) \to \bar{\ell}$ όταν $\bar{x} \to \bar{x}_0$, αν

$$\forall\, (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\} : \quad \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Rightarrow \bar{f}(\bar{x}_\nu) \to \bar{\ell}$$

Παρατηρηση **15.** Η σύγκλιση $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ λαμβάνει χώρα στον $\mathbb{R}^n$, ενώ η σύγκλιση $\bar{f}(\bar{x}_\nu) \to \bar{\ell}$ λαμβάνει χώρα στον $\mathbb{R}^m$.

Πρόταση 2.5.1. *Έστω* $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *σημείο συσσώρευσης του* U *και* $\bar{\ell} \in \mathbb{R}^m$. *Τότε*

$$\begin{aligned}
\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})) \to \bar{\ell} = (\ell_1, \ldots, \ell_m) &\text{ όταν } \bar{x} \to \bar{x}_0 \\
\Leftrightarrow \forall\, j = 1, \ldots, m : \ f_j(\bar{x}) \to \ell_j &\text{ όταν } \bar{x} \to \bar{x}_0 \\
\Leftrightarrow \forall\, j = 1, \ldots, m : \ \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f_j(\bar{x}) = \ell_j& \\
\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} : \|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{\ell}\| < \varepsilon& \\
\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} : \bar{f}(\bar{x}) \in B(\bar{\ell}, \varepsilon)&
\end{aligned}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
& \forall\, (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\} : \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Rightarrow \bar{f}(\bar{x}_\nu) \to \bar{\ell} \\
\Leftrightarrow\ & \forall\, (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\} : \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Rightarrow f_j(\bar{x}_\nu) \to \ell_j\ \forall\, j = 1, \ldots, m \\
\Leftrightarrow\ & \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} : |f_j(\bar{x}) - \ell_j| < \varepsilon\ \forall\, j = 1, \ldots, m \\
\Leftrightarrow\ & \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} : \|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{\ell}\| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Πρόταση 2.5.2. *Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$ και $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του U. Το όριο μιας συγκλίνουσας συνάρτησης $\bar{f}$ όταν το $\bar{x}$ τείνει στο $\bar{x}_0$ είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x})$.*

Παρατηρηση **16.** Από την προτελευταία ισοδυναμία της Πρότασης 2.5.1 και την Πρόταση 2.2.1 έχουμε

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{\ell} \Leftrightarrow \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{\ell}\| = 0,$$

και άρα, σύμφωνα με την Παρατήρηση 11 (2), επίσης

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{\ell} \Leftrightarrow \lim_{\bar{\eta}\to\bar{0}} \bar{f}(\bar{x}_0 + \bar{\eta}) = \bar{\ell}.$$

Ορισμός 2.5.2. Η συνάρτηση $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, λέγεται

(α΄) **συνεχής στο σημείο** $\bar{x}_0 \in U$, αν

$$\forall\, (\bar{x}_\nu) \subset U : \quad \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Rightarrow \bar{f}(\bar{x}_\nu) \to \bar{f}(\bar{x}_0)$$

(β΄) **συνεχής στο** $A \subset U$, αν η $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο $\bar{x}_0 \in A$.

(γ΄) **συνεχής**, αν η $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής στο U.

Παρατηρηση **17.** Μια διανυσματική συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της. Όταν το $\bar{x}_0$ είναι σημείο συσσώρευσης του U ισχύει

$$\bar{f} \text{ συνεχής στο } \bar{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}_0)$$

Και στις δύο περιπτώσεις ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$\begin{aligned}
\bar{f} \text{ συνεχής στο } \bar{x}_0 & \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) : \|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{x}_0)\| < \varepsilon \\
& \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) : \bar{f}(\bar{x}) \in B(\bar{f}(\bar{x}_0), \varepsilon) \\
& \Leftrightarrow \forall\, j = 1, \ldots, m :\ f_j \text{ συνεχείς στο } \bar{x}_0, \text{ όπου } \bar{f} = (f_1, \ldots, f_m).
\end{aligned}$$

Ορισμός 2.5.3. Έστω $\bar{f}, \bar{g} : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε ορίζονται

(α΄) το **άθροισμα** των $\bar{f}$ και $\bar{g}$,

$$\bar{f} + \bar{g} : U \to \mathbb{R}, \quad (\bar{f} + \bar{g})(\bar{x}) := \bar{f}(\bar{x}) + \bar{g}(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in U,$$

(β') το **βαθμωτό γινόμενο** της $\bar{f}$ με το $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\alpha\bar{f} : U \to \mathbb{R}, \quad (\alpha\bar{f})(\bar{x}) := \alpha\bar{f}(\bar{x}) \quad \forall\, \bar{x} \in U,$$

(γ') η **σύνθεση** της $\bar{f}$ με την $\bar{h} : V \to \mathbb{R}^k$, $f(U) \subset V \subset \mathbb{R}^m$,

$$\bar{h} \circ \bar{f} : U \to \mathbb{R}, \quad (\bar{h} \circ \bar{f})(\bar{x}) := \bar{h}(\bar{f}(\bar{x})) \quad \forall\, \bar{x} \in U.$$

Θεώρημα 2.5.3. *Έστω $\bar{f}, \bar{g} : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0$ σημείο συσσώρευσης του U και $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{\ell} \in \mathbb{R}^m$, $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{g}(\bar{x}) = \bar{m} \in \mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχουν τα όρια*

(α') $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (\bar{f} + \bar{g})(\bar{x}) = \bar{\ell} + \bar{m}$,

(β') $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (\alpha\bar{f})(\bar{x}) = \alpha\,\bar{\ell}$ για $\alpha \in \mathbb{R}$,

(γ') $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (\bar{h} \circ \bar{f})(\bar{x}) = \bar{h}(\ell)$ για $h : V \to \mathbb{R}^k$, $\bar{f}(U) \subset V \subset \mathbb{R}^m$, συνεχή στο $\bar{\ell} \in V$.

(δ') $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \|\bar{f}(\bar{x})\| = \|\bar{\ell}\|$,

(ε') $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \sqrt{\|\bar{f}(\bar{x})\|} = \sqrt{\|\bar{\ell}\|}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του 1 αφήνεται ως άσκηση.

Απόδειξη του 3: Έστω $(\bar{x}_\nu) \in U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$. Τότε $(\bar{f}(\bar{x}_\nu)) \subset V$ με $\bar{f}(\bar{x}_\nu) \to \bar{\ell} \in V$ και άρα, αφού η $\bar{h} : V \to \mathbb{R}^k$ είναι συνεχής στο $\bar{\ell}$, $(\bar{h} \circ \bar{f})(\bar{x}_\nu) = \bar{h}(\bar{f}(\bar{x}_\nu)) \to \bar{h}(\bar{\ell})$.

Απόδειξη των 2, 4, 5: Προκύπτουν άμεσα από το 3 για τις συνεχείς συναρτήσεις $\bar{h}_1(\bar{y}) = \alpha\bar{y} \in \mathbb{R}^m$, $h_2(\bar{y}) = \|\bar{y}\| \in \mathbb{R}$ και $h_3(\bar{y}) = \sqrt{\|\bar{y}\|} \in \mathbb{R}$ για $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$, αντίστοιχα.

Θεώρημα 2.5.4. *Έστω $\bar{f}, \bar{g} : U \to \mathbb{R}^m$ συνεχείς στο $\bar{x}_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $\bar{x}_0$:*

(α') $\bar{f} + \bar{g}$,

(β') $\alpha\bar{f}$ για $\alpha \in \mathbb{R}$,

(γ') $\bar{h} \circ \bar{f}$ για $\bar{h} : V \to \mathbb{R}^k$, $\bar{f}(U) \subset V \subset \mathbb{R}^m$, συνεχή στο $\bar{f}(\bar{x}_0)$,

(δ') $\|\bar{f}\|$, όπου $\|\bar{f}\| : U \to \mathbb{R}$, $\|\bar{f}\|(\bar{x}) := \|\bar{f}(\bar{x})\| \quad \forall\, \bar{x} \in U$,

(ε') $\sqrt{\|\bar{f}\|}$, όπου $\sqrt{\|\bar{f}\|} : U \to \mathbb{R}$, $\sqrt{\|\bar{f}\|}(\bar{x}) := \sqrt{\|\bar{f}(\bar{x})\|} \quad \forall\, \bar{x} \in U$,

Ορισμός 2.5.4. Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$ ονομάζεται **χώρος των συνεχών συναρτήσεων** και συμβολίζεται με

$$C(U; \mathbb{R}^m) := \{\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m : \ \bar{f} \text{ συνεχής}\}.$$

Θεώρημα 2.5.5. *Το $C(U;\mathbb{R}^m)$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού είναι διανυσματικός χώρος. Ειδικότερα ισχύει*

$$\bar{f},\bar{g}\in C(U;\mathbb{R}^m),\ \alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow \bar{f}+\bar{g},\ \alpha\bar{f}\in C(U;\mathbb{R}^m).$$

Θεώρημα 2.5.6. *Έστω $\bar{f}:U\to\mathbb{R}^m$ συνεχής και $U\subset\mathbb{R}^n$ συμπαγές. Τότε το $\bar{f}(U)$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω $(\bar{y}_\nu)\subset\bar{f}(U)$. Τότε υπάρχει $(\bar{x}_\nu)\subset U$ με $\bar{f}(\bar{x}_\nu)=\bar{y}_\nu$ και αφού το U είναι συμπαγές θα υπάρχει $(\bar{x}_{k_\nu})\subset(\bar{x}_\nu)$ με $\bar{x}_{k_\nu}\to\bar{x}_0\in U$, σύμφωνα με την Πρόταση 1.4.9. Αφού όμως η $\bar{f}$ είναι συνεχής, θα ισχύει $\bar{y}_{k_\nu}=f(\bar{x}_{k_\nu})\to f(\bar{x}_0)\in\bar{f}(U)$. □

Ορισμός 2.5.5. Η συνάρτηση $\bar{f}:U\to\mathbb{R}^m$, $U\subset\mathbb{R}^n$, λέγεται **ομοιόμορφα συνεχής** αν

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \forall\,\bar{x},\bar{y}\in U,\ \|\bar{x}-\bar{y}\|<\delta:\|\bar{f}(\bar{x})-\bar{f}(\bar{y})\|<\varepsilon.$$

Θεώρημα 2.5.7. *Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ συμπαγές και $\bar{f}:U\to\mathbb{R}^m$ συνεχής. Τότε η $\bar{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω ότι η $\bar{f}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής, δηλ.

$$\exists\,\varepsilon>0\ \forall\,\delta>0\ \exists\,\bar{x},\bar{y}\in U,\ \|\bar{x}-\bar{y}\|<\delta:\|\bar{f}(\bar{x})-\bar{f}(\bar{y})\|\geq\varepsilon.$$

Έστω ένα τέτοιο $\varepsilon>0$. Τότε ειδικότερα (για $\delta=\frac{1}{\nu}$)

$$\forall\,\nu\in\mathbb{N}\ \exists\,\bar{x}_\nu,\bar{y}_\nu\in U,\ \|\bar{x}_\nu-\bar{y}_\nu\|<\frac{1}{\nu}:\|\bar{f}(\bar{x}_\nu)-\bar{f}(\bar{y}_\nu)\|\geq\varepsilon.$$

Έστω μια τέτοια ακολουθία $(\bar{x}_\nu)\subset U$. Αφού το U είναι συμπαγές, υπάρχει $(\bar{x}_{k_\nu})\subset(\bar{x}_\nu)$ με $\bar{x}_{k_\nu}\to\bar{x}_0\in U$, σύμφωνα με την Πρόταση 1.4.9. Τότε όμως ισχύει και $\bar{y}_{k_\nu}\to\bar{x}_0\in U$, αφού

$$\|\bar{y}_{k_\nu}-\bar{x}_0\|\leq\|\bar{y}_{k_\nu}\to\bar{x}_{k_\nu}\|+\|\bar{x}_{k_\nu}-\bar{x}_0\|\leq\frac{1}{k_\nu}+\|\bar{x}_{k_\nu}-\bar{x}_0\|\to 0.$$

Αλλά η $\bar{f}$ είναι συνεχής. Άρα

$$\bar{f}(\bar{x}_{k_\nu})\to\bar{f}(\bar{x}_0),\quad \bar{f}(\bar{y}_{k_\nu})\to\bar{f}(\bar{x}_0)$$

και συνεπώς $\bar{f}(\bar{x}_{k_\nu})-\bar{f}(\bar{y}_{k_\nu})\to\bar{0}$, δηλ. και για το $\varepsilon>0$ που επιλέξαμε πιο πάνω υπάρχει $\nu_0\in\mathbb{N}$ με $\|\bar{f}(\bar{x}_{k_{\nu_0}})-\bar{f}(\bar{y}_{k_{\nu_0}})\|<\varepsilon$, άτοπο. □

Α 11. Έστω $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x}_0\in U$, $\bar{f}=(f_1,\ldots,f_m):U\to\mathbb{R}^m$ συνεχής στο $\bar{x}_0$ με $\bar{f}(\bar{x}_0)=\bar{0}$ και $\bar{g}:U\to\mathbb{R}^m$ φραγμένη (δηλ., $\bar{g}(U)\subset\mathbb{R}^m$ φραγμένο). Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $(f_j\bar{g})(\bar{x}):=f_j(\bar{x})\bar{g}(\bar{x})$, $j=1,\ldots,m$, και $(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x}):=\bar{f}(\bar{x})\cdot\bar{g}(\bar{x})$, $\bar{x}\in U$, είναι συνεχείς στο $\bar{0}$.

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Επίκ. Καθ. Ιωάννης Γιαννούλης. «Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1153.