ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές IV

Εισαγωγή στα δυναμικά συστήματα

Διδάσκων: Επίκουρος Καθηγητής Αθανάσιος Σταυρακούδης

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

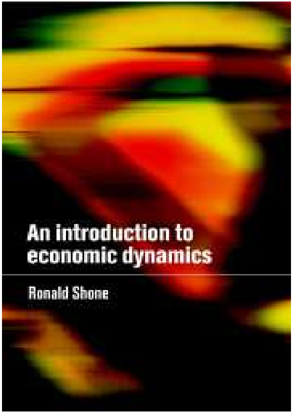
Dynamics in Economics

A very short introduction to difference and differential equations

Athanassios Stavrakoudis

http://stavrakoudis.econ.uoi.gr

Bibliography



Ronald Shone
An Introduction to Economic Dynamics
Cambridge, 2001

Dynamic model fixed point algebra

$$\text{model}: \; x_{t+1} = \alpha + \beta x_t$$

Dynamic model fixed point algebra

$$\begin{aligned} \text{model}: \quad x_{t+1} &= \alpha + \beta x_t \\ \text{equilibrium}: \quad x_{t+1} &= x_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{model}: \quad x_{t+1} &= \alpha + \beta x_t \\ \text{equilibrium}: \quad x_{t+1} &= x_t \\ \text{let } x^*: \quad x^*_{t+1} &= x^*_t \end{aligned}$$

Dynamic model fixed point algebra

$$
\begin{aligned}
\text{model}: \quad x_{t+1} &= \alpha + \beta x_t \\
\text{equilibrium}: \quad x_{t+1} &= x_t \\
\text{let } x^*: \quad x^*_{t+1} &= x^*_t \\
\text{thus}: \quad x^* &= \alpha + \beta x^*
\end{aligned}
$$

Dynamic model fixed point algebra

$$\begin{aligned}
\text{model}: \quad x_{t+1} &= \alpha + \beta x_t \\
\text{equilibrium}: \quad x_{t+1} &= x_t \\
\text{let } x^*: \quad x^*_{t+1} &= x^*_t \\
\text{thus}: \quad x^* &= \alpha + \beta x^* \\
\text{fixed point}: \quad x^* &= \tfrac{\alpha}{1-\beta}
\end{aligned}$$

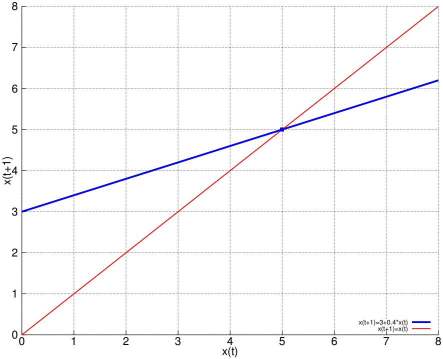
Dynamic model fixed point algebra

$$\begin{aligned}
\text{model}: \quad x_{t+1} &= \alpha + \beta x_t \\
\text{equilibrium}: \quad x_{t+1} &= x_t \\
\text{let } x^*: \quad x^*_{t+1} &= x^*_t \\
\text{thus}: \quad x^* &= \alpha + \beta x^* \\
\text{fixed point}: \quad x^* &= \tfrac{\alpha}{1-\beta} \\
\text{if}: \quad & \alpha = 3, \quad \beta = 0.4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{model}: \quad x_{t+1} &= \alpha + \beta x_t \\
\text{equilibrium}: \quad x_{t+1} &= x_t \\
\text{let } x^*: \quad x^*_{t+1} &= x^*_t \\
\text{thus}: \quad x^* &= \alpha + \beta x^* \\
\text{fixed point}: \quad x^* &= \frac{\alpha}{1-\beta} \\
\text{if}: \quad & \alpha = 3, \quad \beta = 0.4 \\
\text{then}: \quad x^* &= \frac{3}{1-0.4} = \frac{3}{0.6} = 5
\end{aligned}
$$

Dynamic model fixed point graph

$$x_{t+1} = 3 + 0.4\, x_t$$



Code for the graph

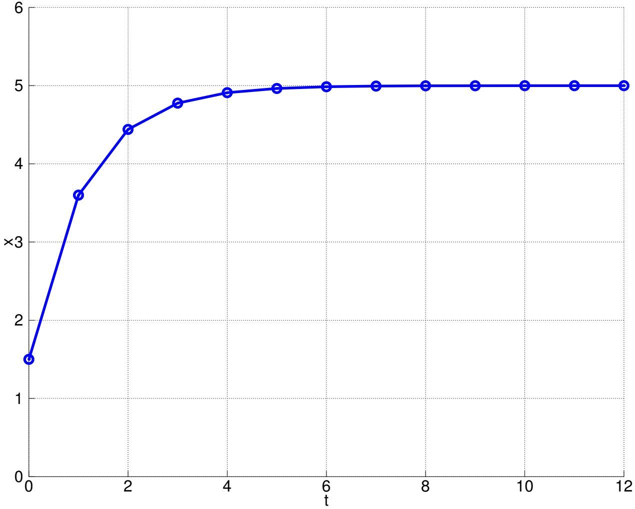
```
clear;
set (gca, 'fontsize', 24)

alpha = 3;
beta  = 0.4;
xstar = alpha / (1-beta);
N     = 8;
t     = 0:N;
x     = alpha + beta*t;

plot(t, x, 'b', 'linewidth', 8, t, t, 'r', 'linewidth', 4);
box off;
legend('x(t+1)=3+0.4*x(t)', 'x(t+1)=x(t)', 'Location', 'SouthEast');
xlabel('x(t)');
ylabel('x(t+1)');
grid on;
hold on;
plot(xstar, xstar,  's', 'markersize', 12);
hold off;

print -depsc2 -landscape  dynamic1.eps
print -djpg dynamic1.jpg
```

Code to experiment with

```
clear;

alpha = 3;
beta  = 0.4;
xstar = alpha / (1-beta);
N     = 8;

x(1)  = 1.5;

for (t = 1:N)
  x(t+1) = alpha + beta*x(t);
end

t = 0:N;
[t' x']
```

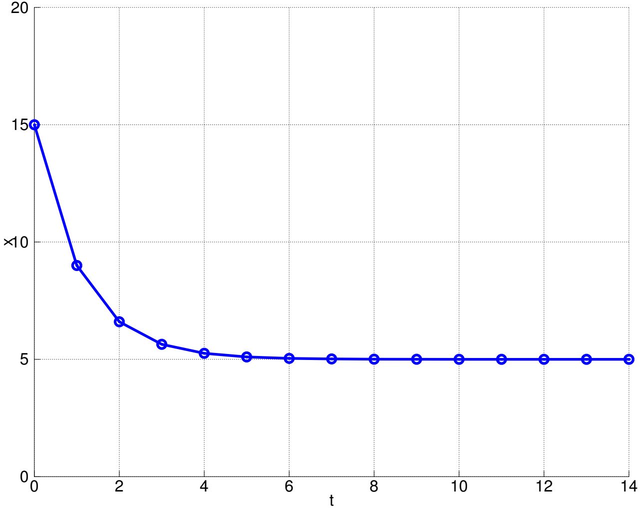
Dynamic model convergence, x(0)=1.5

$$x_{t+1} = 3 + 0.4\,x_t \qquad x_0 = 1.5$$



Dynamic model convergence, x(0)=15

$$x_{t+1} = 3 + 0.4\, x_t \qquad x_0 = 15$$



Sequence convergence

```
alpha   = 3;
beta    = 0.4;
epsilon = 1e-4;
Nmax    = 100;
t       = 1;
x(t)    = 1.5;
x(t+1)  = alpha + beta*x(t);
delta   = abs (x(t+1) - x(t));

conv    = "yes";
while (delta >= epsilon)
  t      = t+1;
  if (t >= Nmax)
    conv = "no";
    break;
  end
  x(t+1) = alpha + beta*x(t);
  delta  = abs (x(t+1) - x(t));
end

x'
printf("convergence = %s\n", conv);
```

Playing with the parameters

parameter α

1. $\uparrow \quad \alpha \quad \Rightarrow \quad \uparrow \quad x^*$
2. $\downarrow \quad \alpha \quad \Rightarrow \quad \downarrow \quad x^*$

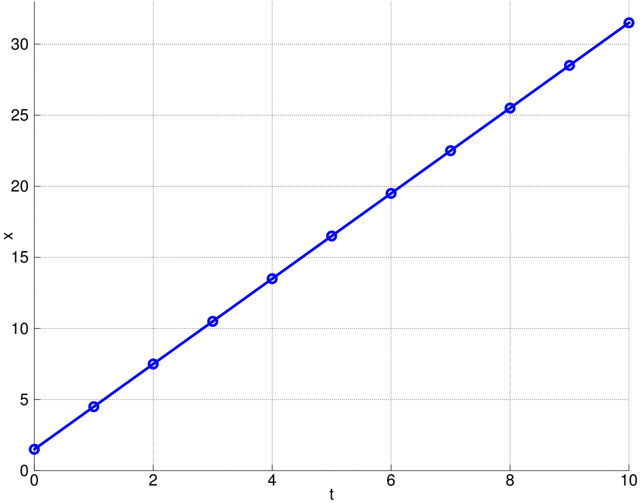
$$x^* = \frac{\alpha}{1-\beta}$$

parameter β

1. $0 < \beta < 1$, converging to x^*.
2. $\beta = 1$, no fixed point
3. $-1 < \beta < 0$, converging to x^*, but only after oscillation.
4. $\beta = -1$, oscillating between two values.
5. $\beta < -1$, oscillating around x^*, but diverging more and more.

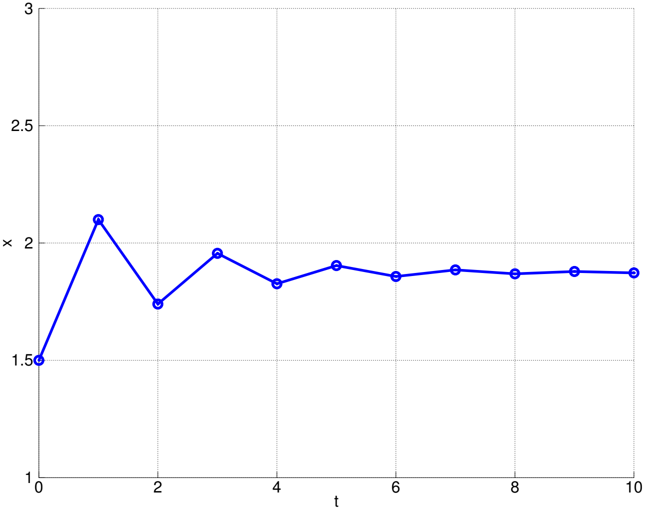
Dynamic model $\beta = 1$

$$x_{t+1} = 3 + 1\,x_t \quad , \quad x_0 = 1.5$$



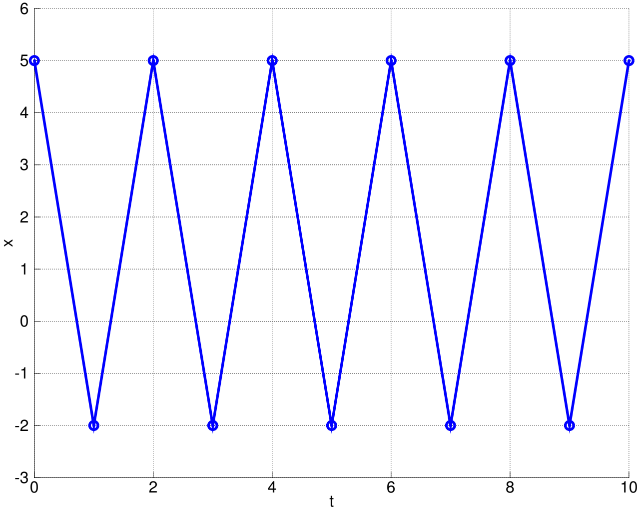
Dynamic model $\beta = -0.6$

$$x_{t+1} = 3 - 0.6\, x_t \quad , \quad x_0 = 1.5$$



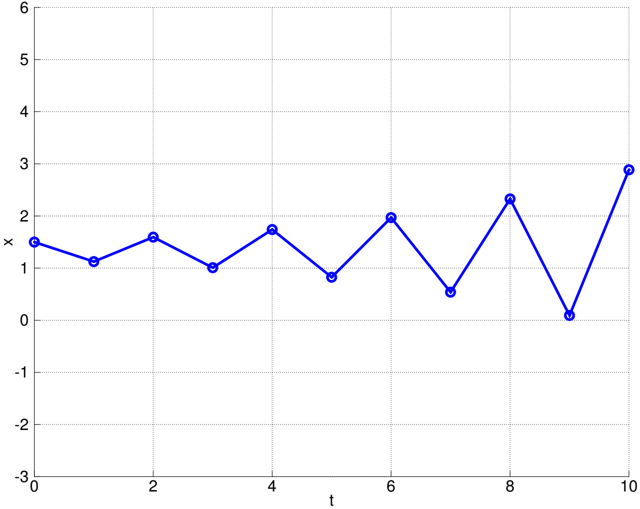
Dynamic model $\beta = -1$

$$x_{t+1} = 3 - 1\,x_t \quad , \quad x_0 = 5$$



Dynamic model $\beta = -1.25$

$$x_{t+1} = 3 - 1.25\, x_t \quad , \quad x_0 = 1.5$$

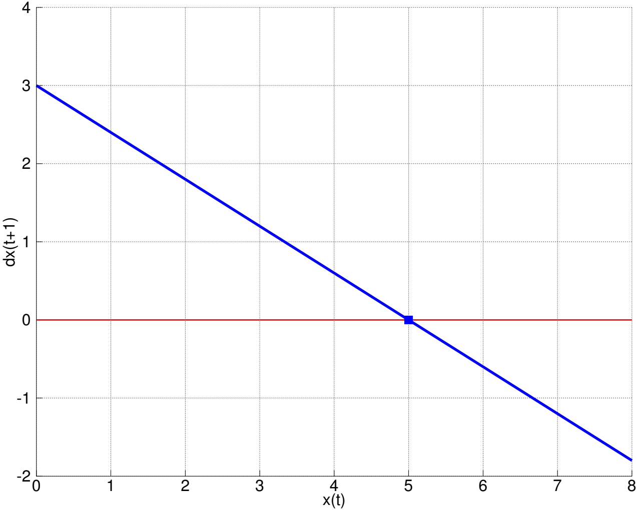


Code for parameter playing

```
alpha = 3;
beta  = -1.25;
xstar = alpha / (1-beta)
N     = 10;
x     = zeros(N,1);
x(1)  = 1.5;

for (t = 1:N)
   x(t+1) = alpha + beta*x(t);
end

t = (0:N)';
[t x]

plot(t, x, '-ob', 'linewidth', 8, 'MarkerSize', 12);

print -depsc2 -landscape dynamics3e.eps
print -djpg dynamics3e.jpg
```

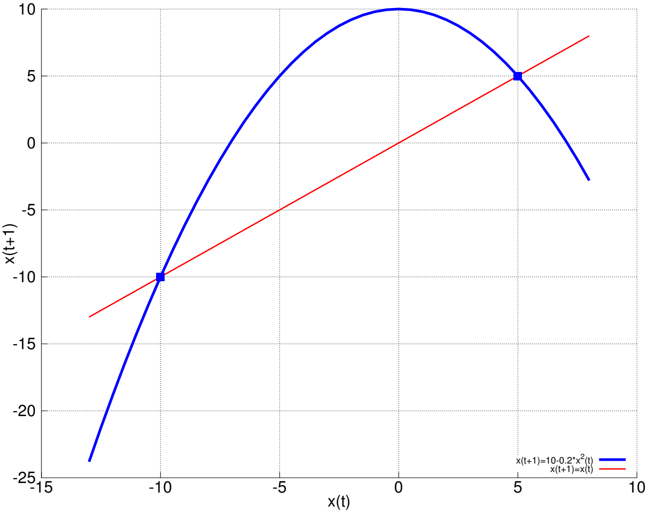
Difference equation of a dynamic model

$$\Delta x_{t+1} = 3 - 0.6\, x_t$$



Non linear dynamic model

$$\Delta x_{t+1} = 10 - 0.2\, x_t^2$$

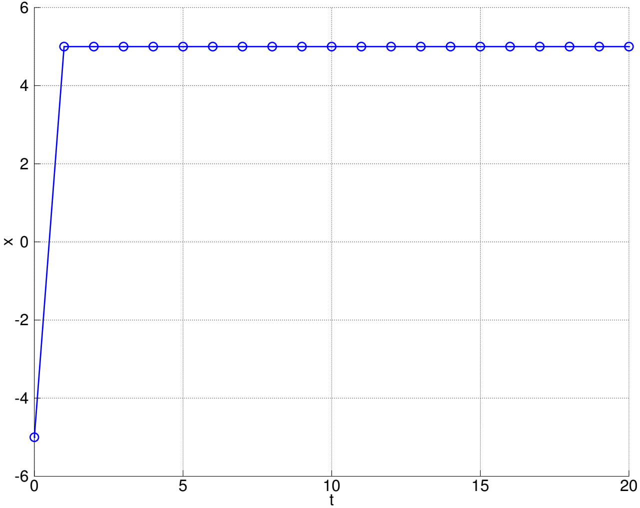


Code for the nonlinear graph

```
alpha  = -0.2;
beta   = 0;
gamma  = 10;
xstar  = roots([ alpha beta-1 gamma ])
x      = linspace(-13, 8, 43)';
y      = alpha*x.^2 + beta*x + gamma;
ystar  = alpha*xstar.^2 + beta*xstar + gamma;

plot(x, y, 'b', 'linewidth', 8, x, x, 'r', 'linewidth', 4
axis([-5 4 -10 6]);
box off;
legend('x(t+1)=4-0.64*x^2(t)', 'x(t+1)=x(t)', 'Location',
xlabel('x(t)');
ylabel('x(t+1)');
grid on;
hold on;
plot(xstar, ystar,  's', 'markersize', 12);
hold off;
```

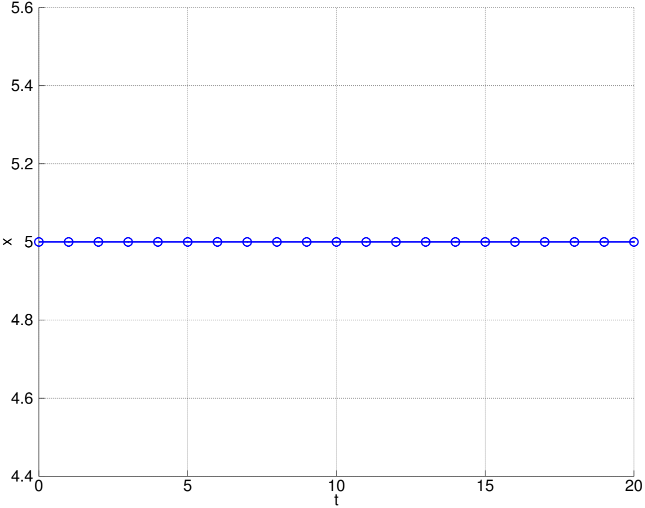
Non linear dynamic model

$$x_{t+1} = 10 - 0.2\, x_t^2 \quad , \quad x_0 = -5$$



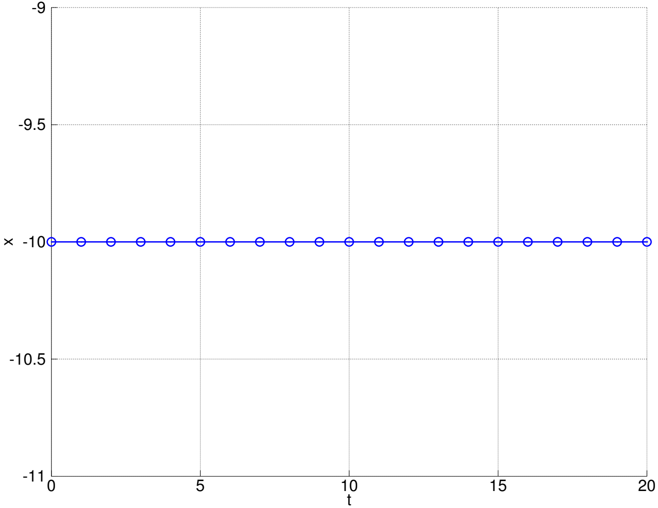
Non linear dynamic model

$$x_{t+1} = 10 - 0.2\,x_t^2 \quad , \quad x_0 = 5$$



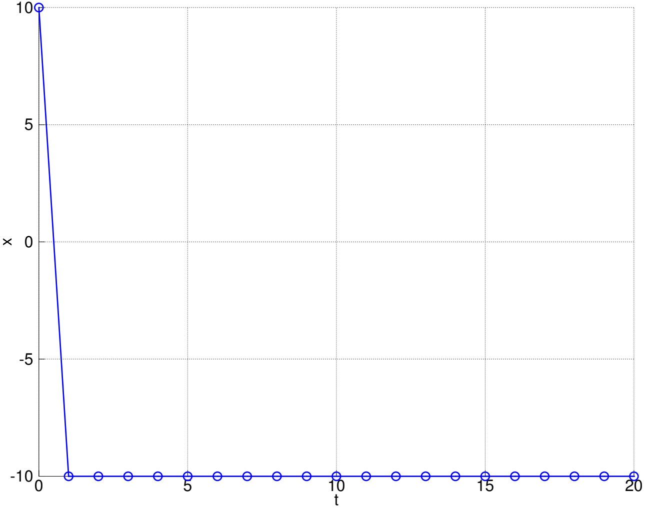
Non linear dynamic model

$$x_{t+1} = 10 - 0.2\, x_t^2 \quad , \quad x_0 = -10$$

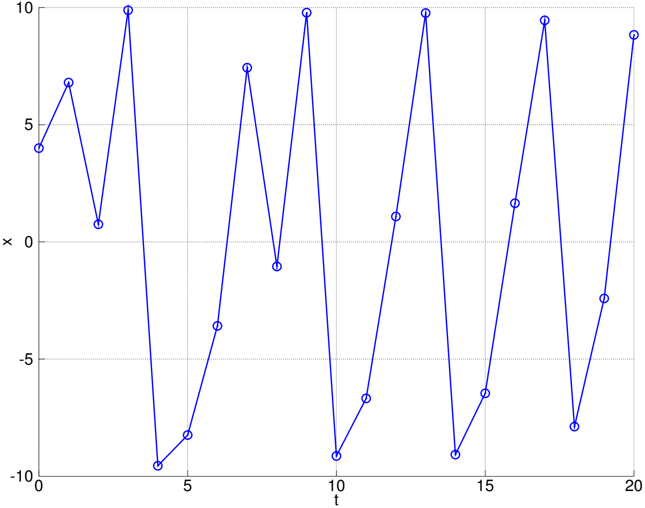


Non linear dynamic model

$$x_{t+1} = 10 - 0.2\, x_t^2 \quad , \quad x_0 = 10$$

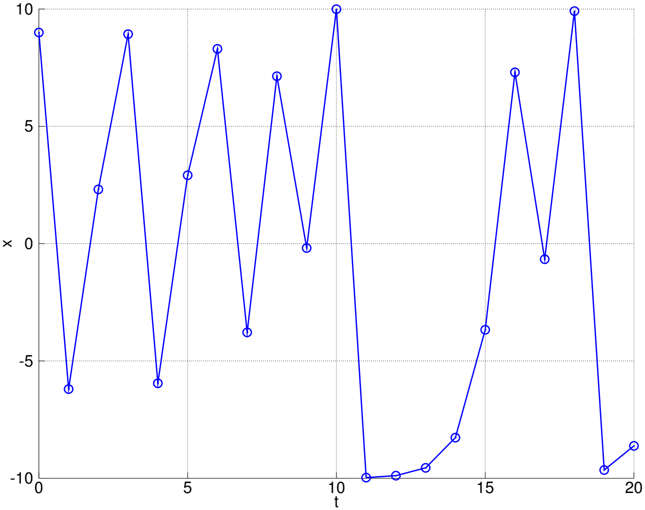


$$x_{t+1} = 10 - 0.2\, x_t^2 \quad , \quad x_0 = 4$$



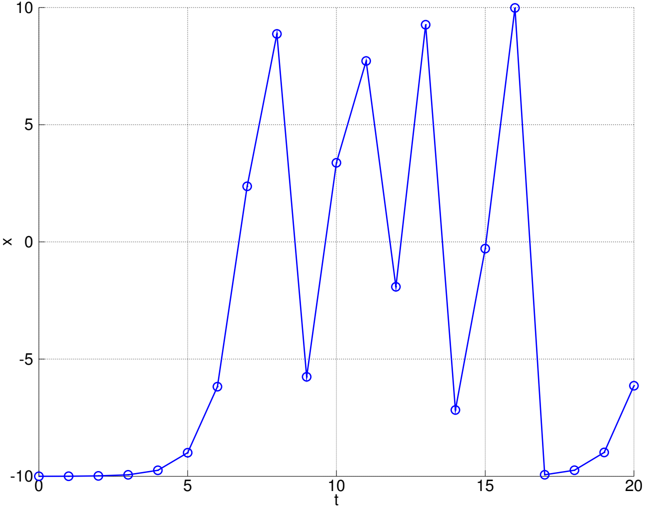
Non linear dynamic model

$$x_{t+1} = 10 - 0.2\,x_t^2 \quad , \quad x_0 = 9$$



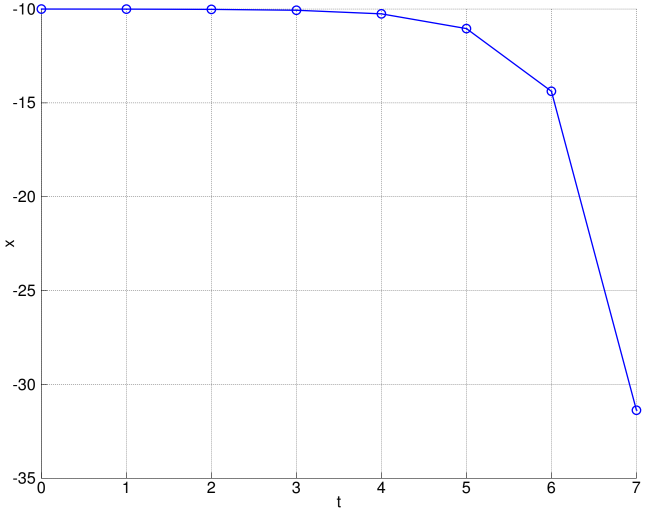
Non linear dynamic model

$$x_{t+1} = 10 - 0.2\,x_t^2 \quad , \quad x_0 = -9.999$$



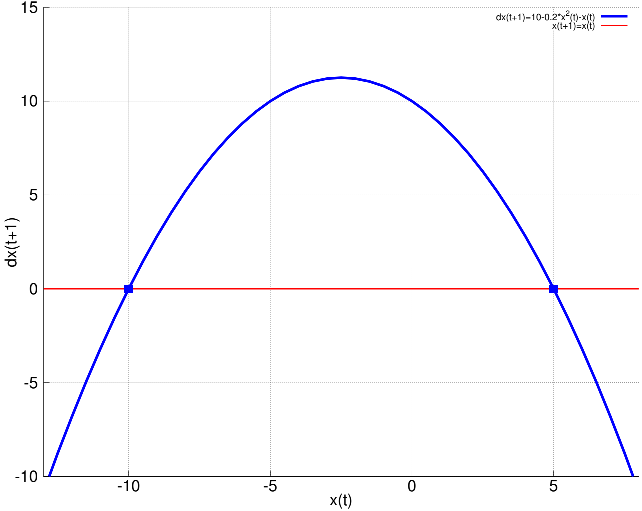
Non linear dynamic model

$$x_{t+1} = 10 - 0.2\, x_t^2 \quad , \quad x_0 = -10.001$$



Non linear dynamic differences

$$\Delta x_{t+1} = 10 - 0.2\,x_t^2 - x_t$$



Continuous time

Differential equation

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Example

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3}{5}x + 3$$

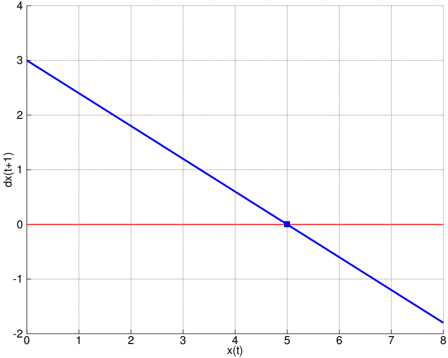
Alternative

$$\dot{x} = -\frac{3}{5}x + 3$$

- Differential equations are preferred for continuous time models.
- Difference equations are preferred for discrete time models.

Fixed point differential equation

$$\dot{x} = 3 - 0.6\,x$$



- Solve $3 - 0.6\,x^* = 0 \Rightarrow x^* = 5$
- Exactly the same solution as $\Delta x_{t+1} = 3 - 0.6\,x_t$

Differential equation solution

Remember Maxima?

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= 3 - \frac{3}{5}x \\
x(0) &= 1
\end{aligned}
$$

Differential equation solution

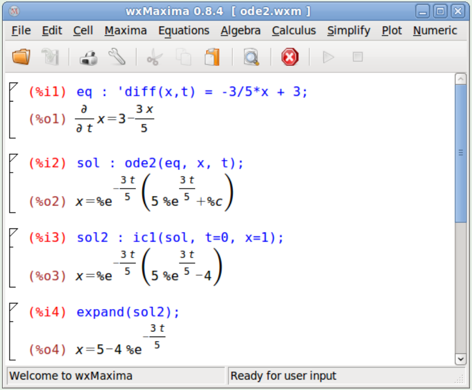
Remember Maxima?

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3 - \frac{3}{5}\,x \\ x(0) &= 1\end{aligned}$$

$$x = 5 - 4\,e^{-\frac{3\,t}{5}}$$

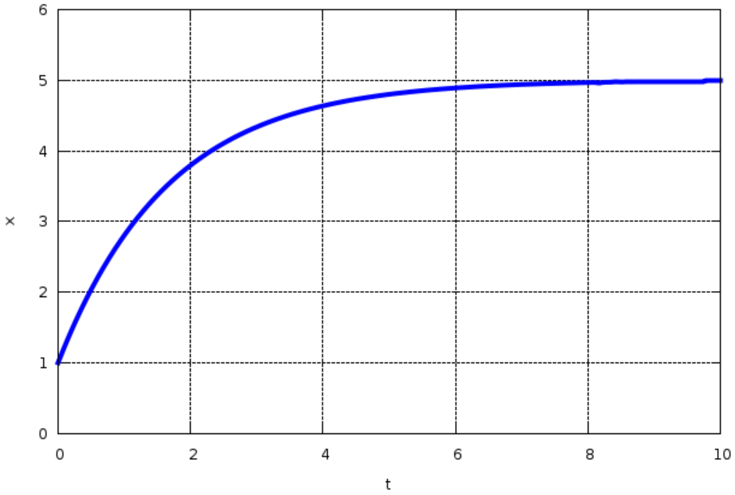
Remember Maxima?

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= 3 - \tfrac{3}{5}\,x \\
x(0) &= 1 \\
\\
x &= 5 - 4\,e^{-\frac{3\,t}{5}}
\end{aligned}
$$



Plot solution differential equation

$$x_t = 5 - 4\,e^{-\frac{3\,t}{5}}$$



Find the fixed points, establish the stability properties and graph the following systems:

$$
\begin{aligned}
x_{t+1} &= 3 + \tfrac{1}{2}\,x_t \quad , \quad x_0 = 1 \\
x_{t+1} &= x_t^2 - 5\,x_t + 4 \quad , \quad x_0 = 1 \\
\dot{x} &= x^2 + x - 2, \quad , \quad x(0) = 1
\end{aligned}
$$

Σας ευχαριστώ για την προσοχή σας.

Είμαι στη διάθεσή σας για σχόλια, απορίες και ερωτήσεις.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ. http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1155.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Επίκουρος Καθηγητής Αθανάσιος Σταυρακούδης. «Ηλεκτρονικοί Υπολογιστές IV. Εισαγωγή στα δυναμικά συστήματα». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1155.

Σημείωμα Αδειοδότησης