

## Διάλεξη 7: ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν για ένα νεογέννητο παιδί η πιθανότητα να είναι αγόρι ισούται με 0.5, να υπολογιστούν οι ακόλουθες πιθανότητες:
  - α) Σε 10 γεννήσεις να μην υπάρχει κανένα αγόρι.
  - β) Σε 100 γεννήσεις να μην υπάρχει κανένα αγόρι.
2. Αν σε μια μεγάλη παρτίδα προϊόντων η αναλογία των ελαττωματικών ισούται με 0.40 και  $X$  είναι ο αριθμός των ελαττωματικών σε τυχαίο δείγμα  $n$  προϊόντων, να υπολογιστούν οι  $P(10 \leq X \leq 12)$  και  $P(X = 15)$  για μέγεθος δείγματος  $n = 20$  και  $n = 100$  αντίστοιχα.
3. Στις τελευταίες εκλογές (4 Οκτ. 2009) η αναλογία των ψηφοφόρων που ψήφισε (Κ.Ο.Τ.Ε.Σ.) ΚΑΠΝΙΣΤΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΕΧΝΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΙΚΑΣΤΙΚΗ ΣΥΓΚΡΟΤΗΣΗ ήταν ίση με  $p = 0.43$  (αυτό το ποσοστό δεν είναι το πραγματικό, αλλά αυτό που κάποιοι από εμάς προσμέναμε και ονειρευόμασταν)



- Σε τυχαίο δείγμα  $n = 300$  ατόμων που ψήφισαν στις τελευταίες εκλογές να υπολογιστούν:
- α) Η πιθανότητα να βρούμε περισσότερα από 200 άτομα που ψήφισαν Κ.Ο.Τ.Ε.Σ.
  - β) Η πιθανότητα ο αριθμός των ατόμων που ψήφισαν Κ.Ο.Τ.Ε.Σ να είναι μεταξύ 120 και 150.
4. Στην πρόοδο που δώσατε δίνονταν συνολικά 40 ερωτήσεις με 4 δυνατές απαντήσεις από τις οποίες ήταν σωστή μόνο μια.
    - α) Αν κάποιος δεν γνωρίζει καμία απάντηση και απαντά σε όλες τις ερωτήσεις με τυχαίο τρόπο, ποια είναι η πιθανότητα να απαντήσει σωστά στις μισές ερωτήσεις;
    - β) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός σωστών τυχαίων απαντήσεων ανά γραπτό;

5. Ο αριθμός  $X$  των τηλεφωνικών κλήσεων που δέχεται ημερησίως η αστυνομική διεύθυνση Ιωαννίνων ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο αριθμό κλήσεων  $\lambda = 30$  ημερησίως. Να υπολογιστούν οι ακόλουθες πιθανότητες:

(α)  $P(25 \leq X \leq 35)$

(β)  $P(X > 45)$

(γ)  $P(X < 10)$

6. Έστω ότι η ζήτηση ενός προϊόντος στη διάρκεια μιας ημέρας ακολουθεί την κατανομή Poisson με  $\lambda = 25$  προϊόντα την ημέρα. Ποιος είναι ο αριθμός των προϊόντων που πρέπει να έχει κάθε πρωί στα ράφια του το κατάστημα έτσι ώστε η πιθανότητα να μη μπορεί να εξυπηρετήσει τη ζήτηση να ισούται με 1%;

7. Αν το ύψος  $Y$  (σε εκατοστά) του ενήλικου άνδρα ακολουθεί  $N(167, 9)$ , ζητούνται:

α) Το ποσοστό των ανδρών που έχουν ύψος πάνω από 170 εκατοστά.

β) Σε τυχαίο δείγμα 4 ανδρών, ποια είναι η πιθανότητα, να έχουν όλοι ύψος πάνω από 170 εκατοστά; Ποια η πιθανότητα να έχουν οι δυο από τους 4 ύψος μεγαλύτερο του μέσου ύψους;

**Ασκήσεις από το βιβλίο:** Δ. Χατζηνικολάου, *Στατιστική για Οικονομολόγους*, Β' Έκδοση, Ιωάννινα 2002

6.1. Μία εταιρεία παράγει μαρμελάδα και τη διοχετεύει στο εμπόριο σε βάζα. Η κατανομή του καθαρού βάρους (σε γραμμάρια) αυτών των βάζων είναι κανονική με μέσο 500 και τυπική απόκλιση 10. Υποθέσατε ότι παίρνετε ένα τυχαίο δείγμα 4 βάζων μαρμελάδας της εταιρείας. Ποιά είναι η πιθανότητα το μέσο καθαρό βάρος των 4 βάζων του δείγματος να είναι λιγότερο από 490 γραμμάρια;

6.4. Οι ηλεκτρικοί λαμπτήρες που παράγονται από τις εταιρείες A και B διαρκούν, κατά μέσο όρο, 1400 και 1200 ώρες με τυπικές αποκλίσεις 200 και 100 ώρες, αντίστοιχα. Αν πάρετε ένα τυχαίο δείγμα 125 λαμπτήρων από κάθε εταιρεία, ποιά είναι η πιθανότητα οι λαμπτήρες της εταιρείας A να διαρκούν, κατά μέσο όρο, τουλάχιστο 250 ώρες περισσότερο απ' όσο διαρκούν οι λαμπτήρες της εταιρείας B;

6.6. Έστω ότι τα μηνιαία εισοδήματα των συνδρομητών ενός περιοδικού ακολουθούν την κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση 4,17365 εκατ. δρχ. Αν πάρετε ένα τυχαίο δείγμα 25 συνδρομητών του περιοδικού, ποιά είναι η πιθανότητα η τυπική απόκλιση του δείγματος να υπερβαίνει τα 3 εκατ. δραχμές;

6.7. Από δύο κανονικούς πληθυσμούς με διακυμάνσεις 20 και 32,9 παίρνουμε δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους 8 και 10 παρατηρήσεων, αντίστοιχα. Ποιά είναι η πιθανότητα η διακύμανση του πρώτου δείγματος να είναι μεγαλύτερη του διπλασίου της διακύμανσης του δευτέρου δείγματος;

6.8. Σε μία πόλη, οι μισοί από τους καταναλωτές ενός προϊόντος το οποίο διατίθεται μονοπωλιακά από ένα εμπορικό κατάστημα είναι δυσαρεστημένοι από τη συμπεριφορά του καταστηματάρχη. Προσεγγίζοντας τη διωνυμική με την κανονική κατανομή και κάνοντας διόρθωση συνεχείας, να υπολογίσετε την πιθανότητα σ' ένα τυχαίο δείγμα 40 καταναλωτών να υπάρχουν τουλάχιστο 16 δυσαρεστημένοι.

**6.9.** Έστω ότι ο αριθμός τηλεφωνημάτων στα οποία το τηλεφωνικό κέντρο μίας εταιρείας απαντά από τις 11 π.μ. μέχρι τις 12 μ. είναι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο  $\lambda = 30$ . Προσεγγίζοντας την κατανομή Poisson με την κανονική κατανομή και κάνοντας διόρθωση συνεχείας, να υπολογίσετε την πιθανότητα ότι ο αριθμός τηλεφωνημάτων από τις 11 π.μ. μέχρι τις 12 μ. μίας συγκεκριμένης ημέρας θα είναι: (α) μεγαλύτερος του 40 και (β) μεταξύ 25 και 30, όπου τα όρια, 25 και 30, δεν συμπεριλαμβάνονται στο διάστημα αυτό.

**6.10.** Έστω ότι έχετε στη διάθεσή σας τη λίστα των ονομάτων όλων των Ελλήνων και των Ελληνίδων που ανήκουν στο εργατικό δυναμικό της χώρας και μπορούν να ταξινομηθούν σε μία από τις εξής δύο κατηγορίες: στους έχοντες και στους μη έχοντες εργασία. Έστω ακόμη ότι διαλέγετε από τη λίστα αυτή κατά τρόπο τυχαίο ένα δείγμα  $n = 40$  ατόμων. Τέλος, υποθέσατε ότι η αληθινή αναλογία των ατόμων στον πληθυσμό που δεν έχουν εργασία είναι  $p = 0,15$ .

(α) Πόσα από τα 40 άτομα του δείγματος αναμένονται να μην έχουν εργασία;  
 (β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ότι στα 40 άτομα του δείγματος θα βρεθούν το πολύ 3 άτομα χωρίς εργασία. Να αναφερθείτε στις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν για να είναι σωστή η διαδικασία που ακολουθείτε. Επίσης, να κάνετε διόρθωση συνεχείας.

**6.11.** Έστω η τυχαία μεταβλητή  $X =$  χρόνος (σε δευτερόλεπτα), ο οποίος απαιτείται από ένα ψυγείο με συγκεκριμένα τεχνικά χαρακτηριστικά για να κρυώσει ένα ποτήρι νερό. Υποθέσατε ότι η μεταβλητή  $X$  κατανέμεται κανονικά με μέσο  $\mu = 2000$  και τυπική απόκλιση  $\sigma = 400$  δευτερόλεπτα. Υποθέσατε ακόμη ότι εργάζεσθε για μία εταιρεία εισαγωγής ψυγείων από διάφορα εργοστάσια και ότι πρόκειται να παραλάβετε μία μεγάλη παραγγελία ψυγείων με τα παραπάνω τεχνικά χαρακτηριστικά. Το κριτήριο για την αποδοχή της παραγγελίας είναι το εξής: παίρνετε ένα τυχαίο δείγμα  $n = 16$  ψυγείων από την παραγγελία και απαιτείτε η πιθανότητα τα ψυγεία αυτά να χρειάζονται κατά μέσο όρο περισσότερο χρόνο από 2100 δευτερόλεπτα για να κρυώσουν ένα ποτήρι νερό να είναι μικρότερη ή ίση με 0,20. Δηλαδή, απορρίπτετε την παραγγελία, αν η πιθανότητα ο μέσος του δείγματος να υπερβαίνει τα 2100 δευτερόλεπτα είναι μεγαλύτερη από 0,20. Με το κριτήριο αυτό, θα δεχθείτε ή θ' απορρίψετε την παραγγελία;

**6.12.** Έστω ότι έχετε στη διάθεσή σας τα δελτία ταυτότητας όλων των Ελλήνων και Ελληνίδων και, σύμφωνα με ό,τι έχουν δηλώσει, μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες: σε «Ορθόδοξους Χριστιανούς» («Ο.Χ.») και σε «μη Ο.Χ.». Έστω ότι γνωρίζετε εκ των προτέρων ότι η αναλογία των ατόμων του πληθυσμού που δηλώνουν στην ταυτότητά τους «Ο.Χ.» είναι  $p = 0,98$ . Υποθέσατε ότι διαλέγετε τυχαία  $n = 500$  δελτία.

(α) Σε πόσα από τα 500 δελτία του δείγματος αναμένετε ν' αναγράφεται το «Ο.Χ.»;  
 (β) Προσεγγίζοντας τη διωνυμική με την κανονική κατανομή και κάνοντας διόρθωση συνεχείας (παρά το γεγονός ότι το δείγμα είναι σχετικά μεγάλο), να υπολογίσετε την πιθανότητα ότι στα 500 δελτία ταυτότητας του δείγματος θα βρεθούν από ένα μέχρι και 5 το πολύ δελτία στα οποία θ' αναγράφεται θρήσκευμα διαφορετικό από «Ο.Χ.». Ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις για να είναι καλή η προσέγγισή σας;

(γ) Όπως και στο μέρος (β), να υπολογίσετε την πιθανότητα ότι στα 500 δελτία ταυτότητας του δείγματος θα βρεθούν τουλάχιστον 475 στα οποία θ' αναγράφεται το «Ο.Χ.».

**6.13.** Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή  $X$  = αριθμός νέων πελατών που καταφθάνουν σ' ένα ξενοδοχείο σ' ένα 24ωρο κατά τη διάρκεια των θερινών διακοπών ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο και διακύμανση  $\lambda = 36$ . Έστω ακόμη ότι παίρνουμε ένα τυχαίο δείγμα  $n = 64$  ημερών από την περίοδο των θερινών διακοπών. Προσεγγίζοντας την κατανομή Poisson με την κανονική κατανομή και κάνοντας διόρθωση συνεχείας, να υπολογίσετε την πιθανότητα ότι κατά τις 64 ημέρες του δείγματος ο μέσος όρος νέων πελατών κατά 24ωρο θα κυμανθεί από 37 μέχρι και 40, όπου τα όρια 37 και 40 συμπεριλαμβάνονται στο διάστημα αυτό.

**6.14.** Έστω ότι η διακύμανση ενός κανονικού πληθυσμού θεωρείται ότι είναι  $\sigma^2 = 10$ , αλλά η θεωρία αυτή πρόκειται να υποβληθεί σε έλεγχο. Έτσι, αποφασίζεται να ληφθεί ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους 20 από αυτόν τον πληθυσμό και ο ισχυρισμός  $\sigma^2 = 10$  ν' απορριφθεί, αν η διακύμανση του δείγματος είναι μεγαλύτερη από 15,863. Ποιά είναι η πιθανότητα ν' απορριφθεί ότι  $\sigma^2 = 10$ , όταν στην πραγματικότητα είναι σωστό;