

**ΚΛΑΣΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ-II (Κ. Ταμβάκης (2013) )**

**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ-1**

**Άσκηση 1 (Επανάληψη Ηλεκτροστατικής).**

Θεωρείστε μια στατική κατανομή ηλεκτρικού φορτίου σχήματος σφαίρας ακτίνας  $R$  και πυκνότητας φορτίου

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) & 0 \leq r \leq R \\ 0 & r \geq R \end{cases}$$

όπου  $\rho_0$  γνωστή σταθερά.

α) Εξετάστε την συμμετρία του συστήματος και συμπεράνετε την γενική μορφή του ηλεκτρικού πεδίου. Ποια τιμή περιμένετε να έχει το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο της κατανομής;

β) Θεωρείστε την εξίσωση Poisson

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}.$$

Επιλέξτε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων και προσδιορίστε πλήρως το ηλεκτρικό πεδίο επιλύοντας την ανωτέρω διαφορική εξίσωση. Η τιμή του πεδίου που βρήκατε στο κέντρο της κατανομής συμπίπτει με αυτήν που περιμένατε;

γ) Υπολογίστε τον *στροβιλισμό* του πεδίου που βρήκατε.

δ) Υπολογίστε την συνάρτηση δυναμικού  $V(\vec{r})$  στο κέντρο της σφαιρικής κατανομής, επιλέγοντας μηδενική τιμή δυναμικού στο άπειρο ( $V(\infty) = 0$ ).

ε) Η ηλεκτροστατική ενέργεια του συστήματος δίνεται από δύο ισοδύναμους εναλλακτικούς τύπους

$$U_E = \begin{cases} \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r E^2 \\ \frac{1}{2} \int d^3r \rho V \end{cases}$$

Υπολογίστε την ενέργεια και με τους δύο τύπους και επαληθεύστε ότι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

**Άσκηση 2. (Επανάληψη Μαγνητοστατικής)**

Θεωρείστε μια κατανομή ηλεκτρικού ρεύματος κυλινδρικού σχήματος απείρου μήκους και κυκλικής διατομής ακτίνας  $R$ . Η πυκνότητα ρεύματος της κατανομής είναι

$$\vec{J} = \begin{cases} \hat{z} J_0 \left(1 - \frac{\rho}{R}\right) & 0 \leq \rho \leq R \\ 0 & \rho \geq R \end{cases}$$

όπου  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$  και  $J_0$  γνωστή σταθερά.

α) Είναι το ρεύμα αυτό στάσιμο;

β) Εξετάστε την συμμετρία του συστήματος και συμπεράνετε την γενική μορφή του μαγνητικού πεδίου<sup>1</sup>.

γ) Θεωρήστε την εξίσωση του Ampere

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}.$$

Επιλέξτε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων και προσδιορίστε πλήρως το μαγνητικό πεδίο επιλύοντας την ανωτέρω διαφορική εξίσωση.

### Άσκηση 3. (Ηλεκτρομαγνητική Επαγωγή)

Θεωρείστε το σύστημα της προηγούμενης άσκησης τροποποιώντας την πυκνότητα ρεύματος ώστε να εξαρτάται από τον χρόνο, δηλαδή,

$$\vec{J}(t) = \begin{cases} \hat{z} J_0(t) \left(1 - \frac{\rho}{R}\right) & 0 \leq \rho \leq R \\ 0 & \rho \geq R \end{cases}$$

όπου  $J_0(t)$  γνωστή συνάρτηση του χρόνου.

α) Εξακολουθεί αυτό ρεύμα να είναι στάσιμο;

β) Υποθέστε ότι εξακολουθεί να ισχύει ο Νόμος Ampere (ημιστατική προσέγγιση) και γράψτε το σχετικό μαγνητικό πεδίο.

γ) Υπολογίστε το δημιουργούμενο ηλεκτρικό πεδίο επιλύοντας την εξίσωση Maxwell-Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

δ) Από την εξίσωση Poisson υπολογίστε την πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου του συστήματος

$$\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}.$$

---

<sup>1</sup>Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η απόκλιση του μαγνητικού πεδίου μηδενίζεται.