Κλασσική Ηλεκτροδυναμική-ΙΙ (Διδάσκων Κ. Ταμβάκης)

Λύσεις Θεμάτων Εξέτασης Σεπτεμβρίου 2013

Θέμα 1. (2 μονάδες) Θεωρήστε το ηλεκτρικό πεδίο

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & 0 \leq \rho < R \\ \hat{\phi}\, E_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} & R < \rho < \infty \end{cases}$$

όπου E_0, R και $\tau > 0$ γνωστές παράμετροι. $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ είναι η ακτίνα σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

α) Βρήτε το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο ($\vec{B}(t \leq 0) = 0$).

β) Υπολογίστε τις υπάρχουσες πυκνότητες φορτίου και ρεύματος.

Λύση Θέματος 1

α) Από τον Νόμο της Επαγωγής έχουμε

$$\dot{\vec{B}} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{cases} 0 & (0 \leq \rho < R) \\ -\frac{\hat{z}}{\rho} E_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} & (\rho > R) \end{cases}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\vec{\nabla} \times \hat{\phi} = \hat{z}/\rho$. Ολοκληρώνοντας ως προς τον χρόνο έχουμε

$$\vec{B} = \begin{cases} 0 & (0 \leq \rho < R) \\ \frac{\hat{z}}{\rho} E_0 \tau \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right) & (\rho > R) \end{cases}$$

β) Δεδομένου ότι

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \propto \vec{\nabla} \cdot \hat{\phi} = \ldots = 0\,,$$

συμπεραίνουμε ότι η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου μηδενίζεται παντού. Η πυκνότητα ρεύματος στην περιοχή $\rho > R$ είναι μη-μηδενική και μπορει να υπολογισθεί από τον Νόμο του Ampere ως

$$\vec{J} = \mu_0^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \dot{\vec{E}} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \hat{z}\, \mu_0^{-1} E_0 \tau \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right) + \epsilon_0 E_0 \tau^{-1}\, \hat{\phi}\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= \hat{\phi}\, E_0 \left(\frac{\mu_0^{-1}\tau}{\rho^2} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) + \epsilon_0 \tau^{-1}\, e^{-\frac{t}{\tau}} \right) .$$

Λόγω της ασυνέχειας του μαγνητικού πεδίου στην κυλινδρική επιφάνεια $\rho = R$ θα υπάρχει και επιφανειακό ρεύμα πυκνότητας ($\epsilon \to 0$)

$$\vec{\mathcal{K}} = \mu_0^{-1}\hat{\rho} \times \vec{B}(R+\epsilon) - \mu_0^{-1}\hat{\rho} \times \vec{B}(R-\epsilon) = -\hat{\phi}\frac{E_0 \tau}{\mu_0 R} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right) .$$

Θέμα 2. (3 μονάδες) Θεωρήστε το μαγνητικό πεδίο

$$\vec{B} = (\, B_1\, \hat{x} + i B_2 \hat{z})\, e^{i(kx - \omega t)}\, e^{-\alpha z} ,$$

όπου B_1, B_2, k, ω, $\alpha > 0$ δεδομένες παράμετροι. Το πεδίο αυτό υπάρχει στον κενό χώρο ($\vec{J} = \rho = 0$).

α) Βρήτε την σχέση που πρέπει να ισχύει μεταξύ των k, ω και α ώστε να ικανοποιεί το πεδίο $\vec{B}$ την εξίσωση κύματος.

β) Προσδιορίστε τον λόγο B_1/B_2.

γ) Προσδιορίστε το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο.

δ) Υπολογίστε την πυκνότητα ενέργειας του κύματος.

Λύση Θέματος 2

α) Έχουμε

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = \left(-k^2 + \alpha^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \vec{B} .$$

Συνεπώς,

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 - \alpha^2 .$$

β) Από την εξίσωση Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ έχουμε

$$(\, ik\hat{x} - \alpha\hat{z}\,) \cdot (\, B_1\hat{x} + i\, B_2\hat{z}) = ikB_1 - i\alpha B_2 = 0 .$$

Συνεπώς,

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\alpha}{k} .$$

γ) Από τον νόμο του Ampere έχουμε

$$\epsilon_0\mu_0 \dot{\vec{E}} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = (\, ik\hat{x} - \alpha\hat{z}) \times (\, B_1\hat{x} + iB_2\hat{z})\, e^{i(kx-\omega t) - \alpha z}$$

$$= (kB_2\hat{y} - \alpha B_1 \hat{y})\, e^{i(kx-\omega t)-\alpha z} \,=\, \hat{y}\frac{(k^2-\alpha^2)}{\alpha} B_1\, e^{i(kx-\omega t)-\alpha z} \,=\, \hat{y}\frac{\omega^2}{\alpha c^2} B_1\, e^{i(kx-\omega t)-\alpha z}\,.$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\vec{E} \,=\, \hat{y}\frac{i\omega}{\alpha} B_1\, e^{i(kx-\omega t)-\alpha z}\,.$$

δ) Τα πραγματικά μέρη των πεδίων είναι:

$$\vec{B} \,=\, e^{-\alpha z}\,(\,\hat{x} B_1 \cos(kx-\omega t) \,-\, \hat{z} B_2 \sin(kx-\omega t)\,)$$

$$\vec{E} \,=\, -\hat{y}\tfrac{\omega}{\alpha} B_1 e^{-\alpha z} \sin(kx-\omega t)$$

Η πυκνότητα ενέργειας είναι

$$U \,=\, \frac{B_1^2}{2\mu_0} e^{-2\alpha z}\left(1 \,+\, 2\frac{\omega^2}{c^2\alpha^2}\sin^2(kx-\omega t)\right)\,.$$

Θέμα 3. (3 μονάδες) Θεωρήστε ένα άπειρο επίπεδο αγωγό που καταλαμβάνει την περιοχή $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $z \leq 0$. Στην περιοχή $z > 0$ διαδίδεται ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα με ηλεκτρικό πεδίο της μορφής

$$\vec{E} \,=\, \hat{y}\, E_0(z)\, e^{i(kx-\omega t)}\,.$$

α) Προσδιορίστε την συνάρτηση $E_0(z)$ απαιτώντας το ηλεκτρικό αυτό πεδίο να ικανοποιεί την εξίσωση κύματος.

β) Προσδιορίστε το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο.

γ) Υπολογίστε το διάνυσμα Poynting.

Λύση του Θέματος 3

α) Έχουμε

$$\left(\nabla^2 \,-\, \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\hat{y}\, E_0(z)\, e^{i(kx-\omega t)} \,=\, \hat{y}\left(E_0''(z) \,-\, k^2 E_0(z) \,+\, \frac{\omega^2}{c^2}E_0(z)\right) e^{i(kx-\omega t)} \,=\, 0$$

ή

$$E_0''(z) \,=\, -\left(\frac{\omega^2}{c^2} \,-\, k^2\right) E_0(z)\,.$$

Θέτοντας

$$\nu \,\equiv\, \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \,-\, k^2}\,,$$

παίρνουμε την λύση

$$E_0(z) \,=\, C\,\cos(\nu z) \,+\, D\,\sin(\nu z)\,,$$

όπου C, D συντελεστές. Δεδομένου ότι το ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται στον αγωγό, παίρνουμε

$$E_0(0) = 0 \Longrightarrow C \,=\, 0\,.$$

Συνεπώς, η λύση είναι[1]

$$\vec{E} \,=\, \hat{y}\,D\,\sin(\nu z)\,e^{i(kx-\omega t)}\,.$$

β) Από τον Νόμο της Επαγωγής παίρνουμε

$$\dot{\vec{B}} \,=\, -\vec{\nabla}\times\vec{E} \,=\, -\left(ik\hat{z}\sin(\nu z)\,-\nu\hat{x}\cos(\nu z)\,\right)\,D\,e^{i(kx-\omega t)}\,.$$

Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\vec{B} \,=\, -\frac{i}{\omega}\left(ik\hat{z}\sin(\nu z)\,-\nu\hat{x}\cos(\nu z)\,\right)\,D\,e^{i(kx-\omega t)} \,=\, \frac{D}{\omega}\,\left(\,k\sin(\nu z)\hat{z}\,+\,i\nu\hat{x}\cos(\nu z)\,\right)e^{i(kx-\omega t)}\,.$$

γ) Τα πραγματικά μέρη των πεδίων είναι

$$\vec{E} \,=\, \hat{y}D\sin(\nu z)\cos(kx\omega t)$$

$$\vec{B} \,=\, \tfrac{D}{\omega}\,(\,\hat{z}k\sin(\nu z)\cos(kx-\omega t)\,-\,\hat{x}\nu\cos(\nu z)\sin(kx\omega t)\,)$$

Συνεπώς, το διάνυσμα Poynting είναι:

$$\vec{S} \,=\, \frac{D^2}{\mu_0\omega}\,\Big(\,\hat{x}k\sin^2(\nu z)\cos^2(kx-\omega t)\,+\,\hat{z}\nu\cos(\nu z)\sin(\nu z)\cos(kx-\omega t)\sin(kx-\omega t)\Big)\,.$$

Θέμα 4. (2 μονάδες) Ένα σωματίδιο ηλεκτρικού φορτίου q ακινητεί σε ένα σύστημα αναφοράς Σ.

α) Ποια είναι η ταχύτητα του σωματιδίου $\vec{u}\,'$ σε ένα σύστημα Σ', το οποίο κινείται ως προς το Σ με ταχύτητα $\vec{V} \,=\, \hat{x}V$;

β) Στο ακίνητο σύστημα αναφοράς Σ υπάρχει ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = \hat{y}B_0$, ενώ δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, δηλαδή $\vec{E} = 0$. Προσδιορίστε τα πεδία στο κινούμενο σύστημα Σ'.

γ) Υπολογίστε την δύναμη Lorentz που δέχεται το ανωτέρω σωματίδιο στο σύστημα Σ'.

[1]Επιλέγουμε την σταθερά D να είναι πραγματική.

Λύση του Θέματος 4

α) Έχουμε

$$u'_x \,=\, \frac{dx'}{dt'} \,=\, \frac{\gamma(dx - V dt)}{\gamma(dt - V dx/c^2)} \,=\, \frac{u_x - V}{1 - \frac{V u_x}{c^2}} \,=\, -V$$

και

$$u'_y \,=\, \frac{dy'}{dt'} \,=\, \frac{dy}{\gamma(dt - V dx/c^2)} \,=\, \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{V u_x}{c^2})} \,=\, 0$$

$$u'_z \,=\, \frac{dz'}{dt'} \,=\, \frac{dz}{\gamma(dt - V dx/c^2)} \,=\, \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{V u_x}{c^2})} \,=\, 0$$

ή

$$\vec{u}\,' \,=\, -V\hat{x}\,.$$

β) Το ηλεκτρικό πεδίο στο κινούμενο σύστημα είναι

$$E'_x = E_x = 0$$

και

$$\vec{E}'_\perp \,=\, \gamma\left(\vec{E}_\perp + \vec{V}\times\vec{B}\right) \,=\, \hat{z}\gamma V B\,.$$

Το μαγνητικό πεδίο είναι

$$B'_x = B_x = 0$$

και

$$\vec{B}_\perp' \,=\, \gamma\left(\vec{B}_\perp - \frac{\vec{V}}{c^2}\times\vec{E}\right) \,=\, \hat{y}\gamma\, B\,.$$

γ) Η δύναμη Lorentz θα είναι

$$\vec{F}\,' \,=\, q\left(\vec{E}\,' + \vec{u}\,'\times\vec{B}\,'\right) \,=\, q\,(\,\hat{z}\gamma V B\, - V\hat{x}\times(\hat{y}\gamma B)\,) \,=\, 0\,.$$