Κλασσική Ηλεκτροδυναμική-ΙΙ (Διδάσκων Κ. Ταμβάκης)

Εξέταση Ιανουαρίου 2014

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1. Θεωρήστε το ηλεκτρικό πεδίο

$$\vec{E}(y) \,=\, \hat{z}\, C\, |y|\, \cos(\omega t)$$

όπου C και ω γνωστές παράμετροι.

α) Βρείτε το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο. Υποθέστε ότι $\vec{B} = 0$ για $t = 0$.

β) Βρείτε την πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος που αντιστοιχεί στο ανωτέρω σύστημα πεδίων.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε

$$\vec{B} \,=\, -\int_0^t dt\, \vec{\nabla}\times\vec{E} \,=\, -C\,\vec{\nabla}|y|\times\hat{z}\int_0^t dt\,\cos(\omega t) \,=\, -\frac{C}{\omega}\frac{d|y|}{dy}\,\hat{y}\times\hat{z}\,\sin(\omega t)\,.$$

Εισάγοντας την *συνάρτηση προσήμου* $\epsilon(y)$ ως

$$\epsilon(y) \,\equiv\, \begin{cases} +1 & (y>0) \\ \\ -1 & (y<0) \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \frac{d|y|}{dy} \,=\, \epsilon(y)$$

παίρνουμε

$$\vec{B} \,=\, \begin{cases} -\hat{x}\frac{C}{\omega}\sin(\omega t) & (y>0) \\ \\ +\hat{x}\frac{C}{\omega}\sin(\omega t) & (y<0) \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{B} \,=\, -\hat{x}\frac{C}{\omega}\,\epsilon(y)\,\sin(\omega t)\,.$$

β) Η πυκνότητα ρεύματος χώρου είναι

$$\vec{J} \,=\, \mu_0^{-1}\vec{\nabla}\times\vec{B} \,-\, \epsilon_0\dot{\vec{E}} \,=\, -\epsilon_0\dot{\vec{E}} \,=\, \hat{z}\,\epsilon_0\,C\,\omega\,|y|\,\sin(\omega t)\,.$$

Υπάρχει όμως και επιφανειακή πυκνότητα, δεδομένου ότι το μαγνητικό πεδίο είναι ασυνεχές

$$\hat{y}\times\vec{B}(0+) \,-\, \hat{y}\times\vec{B}(0-) \,=\, \mu_0\,\vec{K}$$

ή

$$\vec{K} \,=\, \hat{z}\frac{2C}{\mu_0\omega}\,\sin(\omega t)\,.$$

Δεδομένου ότι $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} \,=\, \vec{\nabla}\cdot\vec{K} \,=\, 0$, δεν υπάρχουν πυκνότητες φορτίων ρ ή σ.

Θέμα 2. Θεωρήστε ένα λεπτό σφαιρικό κέλυφος ακτίνας R το οποίο διαρρέεται από επιφανειακό ηλεκτρικό ρεύμα πυκνότητας $\vec{K} \,=\, \hat{\phi}\,\sin\theta\,K_0\,\cos(\omega t)$.

α) Υπολογίστε την μαγνητική διπολική ροπή του κελύφους $\vec{m}(t)$.

β) Το δημιουργούμενο διανυσματικό δυναμικό σε μεγάλες αποστάσεις ($r >> R$) είναι[1]

$$\vec{A} \,=\, \frac{\mu_0}{4\pi c r}\dot{\vec{m}}\times\hat{r}\,.$$

Από αυτό υπολογίστε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ακτινοβολίας.

γ) Υπολογίστε την ηλεκτρομαγνητική δύναμη $F_i \,=\, \int dS_j\,\sigma_{ij}$ που εξασκείται σε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $r >> R$ ομόκεντρη με το δίπολο, όπου σ_{ij} ο τανυστής ηλεκτρομαγνητικής τάσης.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε

$$\vec{m} \,=\, \frac{1}{2}\int dS\,\vec{r}\times\vec{K} \,=\, \frac{R^3}{2}K_0\cos(\omega t)\int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\,\hat{r}\times\hat{\phi}\,\sin\theta$$

$$= \frac{R^3}{2}K_0\cos(\omega t)\int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\,\Big(\sin\theta\,\hat{\rho}\times\hat{\phi} \,+\, \cos\theta\,\hat{z}\times\hat{\phi}\Big)\,\sin\theta$$

$$= \frac{R^3}{2}K_0\cos(\omega t)\int_0^{2\pi}d\phi\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\,\left(\,\sin\theta\,\hat{z} \,-\cos\theta\,\hat{\rho}\,\right)\,\sin\theta$$

$$= \frac{R^3}{2}K_0\cos(\omega t)\,2\pi\int_{-1}^{1}d(\cos\theta)\,\sin^2\theta\,\hat{z} \,=\, \hat{z}\frac{4\pi R^3}{3}K_0\cos(\omega t)$$

ή

$$\vec{m}(t) \,=\, \hat{z}\,m_0\,\cos(\omega t) \qquad \left(m_0 \,\equiv\, \frac{4\pi R^3}{3}K_0\right)\,.$$

β) Έχουμε

$$\vec{E} \,=\, -\dot{\vec{A}} \,=\, -\frac{\mu_0}{4\pi c r}\ddot{\vec{m}}\times\hat{r}, \qquad \vec{B} \,=\, c^{-1}\,\hat{r}\times\vec{E}$$

[1] Το αντίστοιχο βαθμωτό δυναμικό είναι αμεληταίο (συνθήκη Lorentz).

ή

$$\vec{E} \,=\, \frac{\mu_0\omega^2 m_0}{4\pi c r}\,(\hat{z}\times\hat{r})\,\cos(\omega t_R) \,=\, \hat{\phi}\,\frac{\mu_0\omega^2 m_0}{4\pi c r}\,\sin\theta\,\cos(\omega t_R)$$

και

$$\vec{B} \,=\, -\frac{\mu_0\omega^2 m_0}{4\pi c^2 r}\hat{r}\times(\hat{z}\times\hat{r})\,\cos(\omega t_R) \,=\, -\hat{\theta}\,\frac{\mu_0\omega^2 m_0}{4\pi c^2 r}\,\sin\theta\,\cos(\omega t_R)\,.$$

γ) Έχουμε

$$U \,=\, \frac{\epsilon_0}{2}E^2 \,+\, \frac{1}{2\mu_0}B^2 \,=\, \epsilon_0\left(\frac{\mu_0\omega^2 m_0}{4\pi c r}\right)^2\cos^2(\omega t_R)$$

και

$$\vec{E} \,=\, \hat{\phi}\sqrt{\epsilon_0^{-1}U}\,, \quad \vec{B} \,=\, -\hat{\theta}\,\sqrt{\mu_0\,U}\,.$$

Ο τανυστής τάσης είναι

$$\sigma_{ij} \,=\, U\,\left(\hat{\phi}_i\hat{\phi}_j \,+\, \hat{\theta}_i\hat{\theta}_j \,-\delta_{ij}\right)$$

και έχουμε

$$F_i \,=\, \int dS_j\,\sigma_{ji} \,=\, r^2\int d\Omega\,\hat{r}_j\,\sigma_{ji} \,=\, r^2 U\int d\Omega\,\left((\hat{r}\cdot\hat{\phi})\,\hat{\phi}_i \,+\, (\hat{r}\cdot\hat{\theta})\,\hat{\theta}_i \,-\hat{r}_i\right)$$

$$= \,-r^2 U\,\int d\Omega\,\hat{r}_i$$

ή

$$\vec{F} \,=\, -r^2 U\,\int_{-1}^{1} d\cos\theta\,\int_0^{2\pi} d\phi\,\left(\,\hat{x}\cos\phi\sin\theta \,+\, \hat{y}\sin\phi\sin\theta \,+\, \hat{z}\cos\theta\right) \,=\, 0\,.$$

Θέμα 3 . Θεωρήστε ένα στατικό ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ και ένα στατικό και ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ ως προς το οποίο έχουμε

$$\vec{E} \,=\, E_0\,\hat{x}, \quad \vec{B} \,=\, B_0\,(\,\cos\theta\,\hat{x} \,+\, \sin\theta\,\hat{y}\,)\,.$$

Θεωρήστε και ένα σύστημα αναφοράς Σ', το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{V} \,=\, V\,\hat{z}$.

1) Βρείτε ποια θα πρέπει να είναι η γωνία θ ώστε τα πεδία $\vec{E}\,'$ και $\vec{B}\,'$ στο κινούμενο σύστημα να είναι παράλληλα.

2) Στην περίπτωση που ισχύει το (1), ποιος θα πρέπει να είναι ο λόγος E_0/cB_0 ώστε η γωνία να είναι $\pi/2$;

ΛΥΣΗ

1) Έχουμε $E'_{||} = E_{||} = 0$ και $B'_{||} = B_{||} = 0$. Συνεπώς

$$\vec{E}\,' = \gamma\left(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}\right) = \gamma\,(\,\hat{x}\,(E_0 - VB_0 \sin\theta) + \hat{y}VB_0\cos\theta)$$

$$\vec{B}\,' = \gamma\left(\hat{x}B_0\cos\theta + \hat{y}\left(B_0\sin\theta - \tfrac{V}{c^2}E_0\right)\right)$$

Εάν τα $\vec{E}\,'$, $\vec{B}\,'$ είναι παράλληλα, θα έχουμε

$$\vec{E}\,' \times \vec{B}\,' = 0$$

ή

$$(\,\hat{x}\,(E_0 - VB_0\sin\theta) + \hat{y}VB_0\cos\theta) \times \left(\hat{x}B_0\cos\theta + \hat{y}\left(B_0\sin\theta - \frac{V}{c^2}E_0\right)\right) = 0$$

ή

$$(E_0 - VB_0\sin\theta)\left(B_0\sin\theta - \frac{V}{c^2}E_0\right) - VB_0^2\cos^2\theta = 0$$

ή

$$\sin\theta = \frac{\frac{V}{c}\left(1 + \left(\frac{cB_0}{E_0}\right)^2\right)}{\frac{cB_0}{E_0}\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)}$$

2) Για $\theta = \pi/2$ έχουμε, θέτοντας

$$x = \frac{B_0 c}{E_0}, \quad \beta = \frac{V}{c}$$

$$x^2 - x\left(\beta + \beta^{-1}\right) + 1 = 0$$

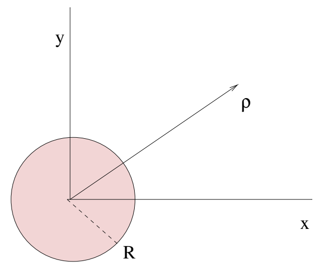
με λύσεις

$$x = \beta,\, \beta^{-1} \Longrightarrow \frac{cB_0}{E_0} = \begin{cases} \beta \\ \beta^{-1} \end{cases}$$

Θέμα 4 . Θεωρήστε ένα άπειρο κυλινδρικό αγωγό κυκλικής διατομής ακτίνας R. Στην εξωτερική περιοχή ($\rho > R$), όπου δεν υπάρχουν φορτία, υπάρχει ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, ενώ τα πεδία μηδενίζονται στο εσωτερικό του αγωγού. Δείξτε ότι τα πεδία είναι της μορφής (σε κυλινδρικές συντεταγμένες)

$$\vec{E} = \hat{\rho}\,E_0(\rho)\,e^{i(kz-\omega t)}, \quad \vec{B} = \hat{\phi}\,B_0(\rho)\,e^{i(kz-\omega t)}$$

και προσδιορίστε τις συναρτήσεις $E_0(\rho)$, $B_0(\rho)$. Επιπλέον, προσδιορίστε τις επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος και φορτίου που υπάρχουν στην επιφάνεια $\rho = R$ και επαληθεύστε ότι ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας.



ΛΥΣΗ

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις Maxwell έχουμε[2]

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \Longrightarrow B_0 = \frac{E_0}{c}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Longrightarrow E_0(\rho) = \frac{C}{\rho}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Longrightarrow 0 = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = c^{-2}\dot{\vec{E}} \Longrightarrow 0 = 0$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες παίρνουμε

$$\hat{\rho} \cdot \vec{E}(R) - 0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Longrightarrow \sigma(z) = \frac{\epsilon_0 C}{R} \cos(kz - \omega t)$$

$$\hat{\rho} \cdot \vec{B}(R) - 0 = 0 \Longrightarrow 0 = 0$$

$$\hat{\rho} \times \vec{E}(R) - 0 = 0 \Longrightarrow 0 = 0$$

$$\hat{\rho} \times \vec{B}(R) - 0 = \mu_0 \vec{K} \Longrightarrow \vec{K}(z) = \hat{z}\frac{C}{\mu_0 c R} \cos(kz - \omega t)$$

[2] Χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\vec{\nabla} \times \hat{\rho} = 0, \ \ \vec{\nabla} \cdot \hat{\rho} = \frac{1}{\rho}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\phi} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \hat{\phi} = \frac{\hat{z}}{\rho}\,.$$

Επίσης έχουμε

$$\vec{\nabla} \cdot K \;=\; \frac{C}{\mu_0 c R}\frac{\partial}{\partial z}\cos(kz-\omega t) \;=\; -\frac{Ck}{c\mu_0 R}\sin(kz-\omega t)$$

και

$$\dot{\sigma} \;=\; \frac{\epsilon_0 \omega C}{R}\sin(kz-\omega t) \;=\; \frac{kC}{c\mu_0 R}\sin(kz-\omega t)$$

που συνεπάγεται

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{K} \,+\, \frac{\partial \sigma}{\partial t} \;=\; 0\,.$$