ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Πράξεις επί Συνόλων και Σώματα Αριθμών

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ : ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΣΥΝΟΛΩΝ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

1.1 Ο Χώρος των Ελευθέρων Διανυσμάτων

Από την Αναλυτική Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι αν $\mathcal{V}_3$ είναι το σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων του χώρου τριών διαστάσεων που μας περιβάλλει, τότε μπορούμε με φυσικό τρόπο να προσθέσουμε δύο ελεύθερα διανύσματα καθώς και να "πολλαπλασιάσουμε" ένα ελεύθερο διάνυσμα με έναν πραγματικό αριθμό.

Έστω $\mathcal{E}$ ο συνήθης χώρος τριών διαστάσεων που μας περιβάλλει, και θεωρούμε στον $\mathcal{E}$ το σύνολο $\mathcal{D}$ όλων των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων. Υπενθυμίζουμε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι προσανατολισμένο αν έχουμε καθορίσει μια διάταξη για τα άκρα του, δηλαδή έχουμε καθορίσει την αρχή και το τέλος του. Ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα θα συμβολίζεται με $\overline{AB}$ και με αυτό το συμβολισμό το A συμφωνούμε να είναι η αρχή και B το τέλος του. Έτσι το $\vec{AB}$ είναι διαφορετικό από το $\overline{BA}$, η αρχή του οποίου είναι το σημείο B και τέλος το σημείο A.

Κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα $\overline{AB}$ του συνόλου $\mathcal{D}$, βρίσκεται πάνω σε μια μοναδική ευθεία (ϵ), στην οποία έχει καθορισθεί μια *φορά* κίνησης ή *προσανατολισμός*: από το σημείο A στο σημείο B. Θα λέμε ότι δύο προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα $\overline{AB}$ και $\overline{CD}$ έχουν την ίδια *διεύθυνση* αν-ν κείνται σε παράλληλες ευθείες. Τέλος το *μήκος* του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος $\overline{AB}$ ορίζεται να είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει το σημείο A με το σημείο B. Στο σύνολο $\mathcal{D}$ των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων ορίζουμε μια σχέση $\mathcal{R}$, δηλαδή ένα υποσύνολο $\sim \subseteq \mathcal{D}\times\mathcal{D}$ του καρτεσιανού γινομένου $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$, ως εξής (ως συνήθως γράφουμε $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ για να υποδηλώσουμε ότι το ζεύγος $(\overline{AB}, \overline{CD})$ ανήκει στο υποσύνολο $\sim$):

Αν $\overline{AB}, \overline{CD} \in \mathcal{D}$ είναι δύο προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα, τότε:

$$\overline{AB} \sim \overline{CD}$$

αν και μόνον αν:

1. Τα $\overline{AB}, \overline{CD}$ έχουν την ίδια διεύθυνση (κείνται σε παράλληλες ευθείες).
2. Τα $\overline{AB}, \overline{CD}$ έχουν την ίδια φορά.
3. Τα $\overline{AB}, \overline{CD}$ έχουν το ίδιο μήκος.

Ως γνωστόν η παραπάνω σχέση έχει κάποιες σημαντικές ιδιότητες. Συγκεκριμένα για τυχόντα στοιχεία $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EZ} \in \mathcal{D}$, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. <u>Ανακλαστική Ιδιότητα</u>: $\overline{AB} \sim \overline{AB}$.
2. <u>Συμμετρική Ιδιότητα</u>: $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ αν και μόνον αν $\overline{CD} \sim \overline{AB}$
3. <u>Μεταβατική Ιδιότητα</u>: Αν $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ και $\overline{CD} \mathcal{R} \overline{EZ}$, τότε $\overline{AB} \sim \overline{EZ}$.

Μια σχέση επί ενός συνόλου $\mathcal{D}$ η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες καλείται *σχέση ισοδυναμίας* επί του συνόλου $\mathcal{D}$. Η σχέση $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathcal{D}$ των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων, και επομένως το διαμερίζει σε κλάσεις ισοδυναμίας. Υπενθυμίζουμε ότι μια διαμέριση ενός συνόλου $\mathcal{D}$ είναι μια συλλογή υποσυνόλων Φ του $\mathcal{D}$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

- $\emptyset \in \Phi$.
- $\cup_{A \in \Phi} A = \mathcal{D}$.
- Αν $A, B \in \Phi$ και $A \neq B$, τότε: $A \cap B = \emptyset$.

Η σχέση ισοδυναμίας ορίζει την ακόλουθη διαμέριση επί του συνόλου $\mathcal{D}$:

$$\Phi := \{C_{\overline{AB}} \,|\, \overline{AB} \in \mathcal{D}\}, \quad C_{\overline{AB}} := \{\overline{CD} \in \mathcal{D} \,|\, \overline{CD} \sim \overline{AB}\}$$

Έτσι το σύνολο $C_{\overline{AB}}$ αποτελείται από όλα τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι «ισοδύναμα», μέσω της σχέσης $\sim$, με το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{AB}$. Το σύνολο $C_{\overline{AB}}$ καλείται η κλάση ισοδυναμίας του ευθυγράμμου τμήματος $\overline{AB}$, και η συλλογή συνόλων - διαμέριση Φ του $\mathcal{D}$, καλείται το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των ευθυγράμμων τμημάτων του χώρου. , Συνήθως τα στοιχεία του συνόλου $C_{\overline{AB}}$ καλούνται *αντιπρόσωποι* της κλάσης ισοδυναμίας του ευθυγράμμου τμήματος $\overline{AB}$.

Μια κλάση ισοδυναμίας καλείται **(ελεύθερο) διάνυσμα**. Η κλάση του προσανατολισμένου ευθυγράμμου τμήματος $\overline{AB}$ θα συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$, δηλαδή:

$$\overrightarrow{AB} \;=\; \{\overline{CD} \in \mathcal{D} \;\mid\; \overline{CD} \sim \overline{AB}\}$$

Το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας συμβολίζεται με

$$\mathcal{V}_3 := \mathcal{D}/\sim \;=\; \{\overrightarrow{AB} \;\mid\; \overline{AB} \in \mathcal{D}\}$$

και καλείται ο *χώρος των (ελευθέρων) διανυσμάτων*. Όπως είναι άμεσο από τον ορισμό, τα στοιχεία: διεύθυνση, φορά, μήκος, τέλος, αρχή, επεκτείνονται από τα ευθύγραμμα τμήματα και στα διανύσματα, αν ορίσουμε διεύθυνση, φορά, μήκος, τέλος, αρχή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ την διεύθυνση, φορά, μήκος, τέλος, αρχή του ευθυγράμμου τμήματος $\overline{AB}$. Ιδιαίτερα το μήκος του $\overrightarrow{AB}$ ορίζεται να είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $\overline{AB}$, και συμβολίζεται ως: $|\overrightarrow{AB}|$.

Όπως γνωρίζουμε από την στοιχειώδη Αναλυτική Γεωμετρία, το σύνολο $\mathcal{V}_3$ έχει επιπρόσθετη δομή. Συγκεκριμένα μπορούμε να προσθέσουμε δύο διανύσματα και να πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα με έναν πραγματικό αριθμό.

Έτσι αν μας δοθούν δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in \mathcal{V}_3$, τότε ορίζεται μοναδικά ένα νέο διάνυσμα $\overrightarrow{EZ} := \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, το οποίο καλείται το *άθροισμα* των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$, με τον ακόλουθο τρόπο. Αν (ε) είναι η ευθεία στην οποία κείται το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και (ε') είναι η ευθεία στην οποία κείται το διάνυσμα $\overrightarrow{CD}$, τότε μεταφέρουμε παράλληλα την ευθεία (ε') έτσι ώστε αυτή να συναντήσει την ευθεία (ε) με τέτοιον τρόπο ώστε η αρχή του διανύσματος $\overrightarrow{CD}$ να συμπέσει με την τέλος του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. Η παράλληλη μεταφορά του ευθυγράμμου τμήματος $\overline{CD}$ δημιουργεί τότε ένα νέο διάνυσμα, η αρχή του οποίου είναι το σημείο $B := E$ και το τέλος του οποίου έστω ότι είναι το σημείο Z. Τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{EZ}$, δηλαδή το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ ορίζεται να είναι το διάνυσμα (ή καλύτερα ο κλάση του ευθυγράμμου τμήματος) το οποίο έχει αρχή το A και τέλος το τέλος του ευθυγράμμου τμήματος $\overline{EZ}$. Μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι η παραπάνω κατασκευή του αθροίσματος των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ είναι καλά ορισμένη, δηλαδή δεν εξαρτάται από την επιλογή αντιπροσώπων των κλάσεων ισοδυναμίας των ευθυγράμμων τμημάτων $\overline{AB}$ και $\overline{CD}$.

Επίσης αν $k \in \mathbb{R}$ είναι ένας πραγματικός αριθμός, και $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}_3$ είναι ένα διάνυσμα, τότε ορίζεται μοναδικά ένα νέο διάνυσμα $k \cdot \overrightarrow{AB}$, το οποίο καλείται ο *βαθμωτός πολλαπλασιασμός* του k με το $\overrightarrow{AB}$, ως εξής. Αν $k = 0$, ή αν $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε θέτουμε $k \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Αν $k \neq 0$ και $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, τότε η διεύθυνση του $k \cdot \overrightarrow{AB}$ είναι η διεύθυνση του $\overrightarrow{AB}$. Η φορά του $k \cdot \overrightarrow{AB}$ είναι η φορά του $\overrightarrow{AB}$ αν $k > 0$ και την φορά του αντιθέτου διανύσματος $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ αν $k < 0$. Τέλος το μήκος του $k \cdot \overrightarrow{AB}$ ορίζεται να είναι ο αριθμός: $|k||\overrightarrow{AB}|$

Έτσι στο σύνολο $\mathcal{V}_3$ έχουμε ορίσει δύο απεικονίσεις:

1. Πρόσθεση:

$$+ \,:\, \mathcal{V}_3 \times \mathcal{V}_3 \longrightarrow \mathcal{V}_3,\ \ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \longmapsto \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$

2. Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V}_3 \longrightarrow \mathcal{V}_3,\ \ (k, \overrightarrow{AB}) \mapsto k \cdot \overrightarrow{AB}$$

Από την Ευκλείδεια η την στοιχειώδη Αναλυτική Γεωμετρία, γνωρίζουμε τότε ότι το σύνολο $\mathcal{V}_3$ των ελευθέρων διανυσμάτων του χώρου, εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, ικανοποιεί τις ακόλουθες βασικές ιδιότητες:

(ΔΧ1) Προσεταιριστική Ιδιότητα της Πρόσθεσης. Δηλαδή:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{CD},\, \overrightarrow{EZ} \in \mathcal{V}_3 : \quad (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EZ})}$$

(ΔΧ2) Αντιμεταθετική Ιδιότητα Πρόσθεσης. Δηλαδή:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in \mathcal{V}_3 : \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}}$$

(ΔΧ3) Ύπαρξη Μηδενικού Διανύσματος. Δηλαδή υπάρχει ένα διακεκριμένο στοιχείο $\vec{0}$ του $\mathcal{V}_3$, το οποίο καλείται **μηδενικό διάνυσμα**, έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}_3 : \quad \overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} = \vec{0} + \overrightarrow{AB}}$$

Το διάνυσμα $\vec{0}$ με την παραπάνω ιδιότητα είναι η κλάση ισοδυναμίας του ευθυγράμμου τμήματος του οποίου τα άκρα συμπίπτουν, δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα το μήκος του οποίου είναι ίσο με μηδέν.

(ΔΧ4) Ύπαρξη Αντιθέτου Διανύσματος. Δηλαδή για κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ του $\mathcal{V}_3$ υπάρχει ένα νέο διάνυσμα $-\overrightarrow{AB}$ του $\mathcal{V}_3$, το οποίο καλείται **αντίθετο διάνυσμα** του $\overrightarrow{AB}$, έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}_3,\ \exists(-\overrightarrow{AB}\,) \in \mathcal{V}_3 : \quad \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}\,) = \vec{0} = (-\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB}\,)}$$

Το αντίθετο διάνυσμα του $\overrightarrow{AB}$ είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$, το οποίο έχει την ίδια διεύθυνση και το ίδιο μήκος με το $\overrightarrow{AB}$, αλλά έχει αντίθετη φορά.

(ΔΧ5) Επιμεριστική Ιδιότητα του Βαθμωτού Πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση στοιχείων του $\mathbb{R}$. Δηλαδή:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}_3,\ \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{R} : \quad (\kappa + \lambda) \cdot \overrightarrow{AB} = \kappa \cdot \overrightarrow{AB} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}}$$

(ΔΧ6) Επιμεριστική Ιδιότητα του Βαθμωτού Πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων του $\mathcal{V}_3$. Δηλαδή:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \in \mathcal{V}_3,\ \forall \kappa \in \mathbb{R} : \quad \kappa \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\,) = \kappa \cdot \overrightarrow{AB} + \kappa \cdot \overrightarrow{CD}}$$

(ΔΧ7) Μικτή Προσεταιριστική Ιδιότητα. Δηλαδή:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}_3,\ \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{R} : \quad \kappa \cdot (\lambda \cdot \overrightarrow{AB}\,) = (\kappa\lambda) \cdot \overrightarrow{AB}}$$

(ΔΧ8) Μοναδιαία Ιδιότητα. Δηλαδή:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}_3 : \quad 1 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}}$$

Σκοπός μας είναι να γενικεύσουμε τα βασικά δομικά στοιχεία και τις βασικές ιδιότητες οι οποίες υπάρχουν στο παράδειγμα των ελευθέρων διανυσμάτων του επιπέδου, και οποίες περιγράφονται παραπάνω σε δύο κύριες κατευθύνσεις:

1. Το σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων να αντικατασταθεί με ένα πιο γενικό σύνολο, π.χ. με σύνολα πινάκων, πολυωνύμων, συναρτήσεων, ακολουθιών, κτλ. Φυσικά απαιτούμε τα σύνολα αυτά των "γενικευμένων διανυσμάτων" να ικανοποιούν τις τυπικές ιδιότητες που ικανοποιεί το σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων όπως περιγράψαμε παραπάνω.

Η γενίκευση αυτή μας απελευθερώνει κατά κάποιον τρόπο και από τον περιορισμό των τριών διαστάσεων.

2. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών με το οποίο πολλαπλασιάζουμε βαθμωτά να αντικατασταθεί με ένα πιο γενικό σύνολο, π.χ. με το σύνολο των ρητών ή των μιγαδικων αριθμών. Παρόμοια απαιτούμε τα σύνολα αυτά των "γενικευμένων αριθμών" να ικανοποιούν τις τυπικές ιδιότητες που ικανοποιεί το σύνολο των πραγματικών αριθμών όπως περιγράψαμε παραπάνω.

Η βασική ιδέα είναι να ξεκινήσουμε με ένα σύνολο αφηρημένων στοιχείων $\mathcal{V}$ επί του οποίου υποθέτουμε ότι έχουν ορισθεί δύο πράξεις, με την έννοια του επόμενου εδαφίου: μια πράξη πρόσθεσης και μια πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού «γενικευμένων» αριθμών με στοιχεία του $\mathcal{V}$, και να δεχθούμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες (**ΔΧ1**)-(**ΔΧ8**) παραπάνω, τις οποίες πλέον δεχόμαστε ως αξιώματα. Έτσι το παράδειγμα του χώρου των (ελευθέρων διανυσμάτων του χώρου θα αποτελέσει το βασικό μοντέλο για τον ορισμό της αφηρημένης έννοιας του διανυσματικού χώρου η οποία θα μελετηθεί στο επόμενο Κεφάλαιο.

Στην παρόν Κεφάλαιο θα δούμε με ποιόν τρόπο μπορούμε να γενικεύσουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Στο επόμενο Κεφάλαιο θα μελετήσουμε διεξοδικά με ποιόν τρόπο μπορούμε να γενικεύσουμε το σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων.

1.2 Εσωτερικές και Εξωτερικές Πράξεις

Έστω $\mathcal{S}$ ένα σύνολο.

Μια **εσωτερική πράξη** επί του $\mathcal{S}$, είναι μια απεικόνιση

$$\star : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \quad (s_1, s_2) \mapsto \star(s_1, s_2).$$

Αν $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$, τότε συνήθως την τιμή $\star(s_1, s_2)$ θα την συμβολίζουμε με $s_1 \star s_2$:

$$\forall s_1, s_2 \in \mathcal{S} : \quad \star(s_1, s_2) := s_1 \star s_2.$$

Έστω τώρα $\mathbb{K}$ και $\mathcal{S}$ δύο σύνολα.

Μια **εξωτερική πράξη** του συνόλου $\mathbb{K}$ επί του $\mathcal{S}$, είναι μια απεικόνιση

$$\odot : \mathbb{K} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \quad (k, s) \mapsto \odot(k, s).$$

Αν $k \in \mathbb{K}$ και $s \in \mathcal{S}$, τότε συνήθως την τιμή $\odot(k, s)$ θα την συμβολίζουμε με $k \odot s$:

$$\forall \in \mathbb{K}, \ \forall s \in \mathcal{S} : \quad \odot(k, s) := k \odot s$$

Παράδειγμα 1.2.1 *Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών, ορίζεται η πράξη της πρόσθεσης, η οποία είναι μια απεικόνιση $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(k, l) \mapsto k + l$. Επίσης ορίζεται και η πράξη του πολλαπλασιασμού, η οποία είναι μια απεικόνιση $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(k, l) \mapsto kl$. Άλλα παραδείγματα αποτελούν τα οικεία μας σύνολα: $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, και $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, εφοδιασμένα με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.*

1.3 Η έννοια του σώματος

Σε ένα γενικό πλαίσιο η Άλγεβρα μελετά τις βασικές ιδιότητες και την δομή συνόλων τα οποία είναι εφοδιασμένα με μία ή περισσότερες (εσωτερικές ή εξωτερικές) πράξεις. Αυτά τα σύνολα, μαζί με αυτές τις πράξεις, αποτελούν γενικεύσεις των οικείων μας συνόλων αριθμών $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ εφοδιασμένα με τις συνηθισμένες πράξεις. Στα πλαίσια της Γραμμικής Άλγεβρας η έννοια του σώματος διαδραματίζει σημαντικό ρόλο.

Ορισμός 1.3.1 *Ένας* **σώμα** *είναι ένα σύνολο $\mathbb{K}$ το οποίο είναι εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις:*

(**a**) $+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, *η οποία στέλνει το ζεύγος στοιχείων $(k_1, k_2) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ σε ένα νέο στοιχείο $k_1 + k_2 \in \mathbb{K}$, την οποία καλούμε* **Πρόσθεση** *(στοιχείων του $\mathbb{K}$).*

(**b**) $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, *η οποία στέλνει το ζεύγος $(k_1, k_2) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ σε ένα νέο στοιχείο $k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{K}$, την οποία καλούμε* **Πολλαπλασιασμό** *(στοιχείων του $\mathbb{K}$).*

Το σύνολο $\mathbb{K}$ μαζί με την πράξη της πρόσθεσης $+$ και του πολλαπλασιασμού $\cdot$, απαιτούμε να ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα:

(ΔΧ1) <u>*Προσεταιριστική Ιδιότητα της Πρόσθεσης*</u>. *Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall k_1,\, k_2, \in \mathbb{K}: \quad (k_1 + k_2) + k_3 = k_1 + (k_2 + k_3)}$$

(ΔΧ2) <u>*Αντιμεταθετική Ιδιότητα Πρόσθεσης*</u>. *Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall k_1, k_2 \in \mathbb{K}: \quad k_1 + k_2 = k_2 + k_1}$$

(ΔΧ3) <u>*Ύπαρξη Μηδενικού Στοιχείου*</u>. *Δηλαδή υπάρχει ένα διακεκριμένο στοιχείο 0 του $\mathbb{K}$, το οποίο καλείται* **μηδενικό στοιχείο**, *έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{K}: \quad k + 0 = k = 0 + k}$$

(ΔΧ4) *Ύπαρξη Αντιθέτου Στοιχείου. Δηλαδή για κάθε στοιχείου k του $\mathbb{K}$ υπάρχει ένα νέο στοιχείο $-k$ του $\mathbb{K}$, το οποίο καλείται* **αντίθετο στοιχείο** *του k, έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{K},\ \exists(-k\,) \in \mathbb{K}:\ \ k + (-k\,) = 0 = (-k) + k}$$

(ΔΧ5) *Προσεταιριστική Ιδιότητα του Πολλαπλασιασμού του $\mathbb{K}$. Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}:\ \ k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3) = (k_1 \cdot k_2) \cdot k_3}$$

(ΔΧ6) *Επιμεριστική Ιδιότητα του Πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση του $\mathbb{K}$. Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}:\ \ k_1 \cdot (k_2 + k_3) = k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3}$$

$$\boxed{\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}:\ \ (k_1 + k_2) \cdot k_3 = k_1 \cdot k_3 + k_2 \cdot k_3}$$

(ΔΧ7) *Αντιμεταθετική Ιδιότητα του Πολλαπλασιασμού του $\mathbb{K}$. Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}:\ \ k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1}$$

(ΔΧ8) *Ύπαρξη Πολλαπλασιαστικής Μονάδας. Δηλαδή:*

$$\boxed{\exists 1 \in \mathbb{K}, \forall k \in \mathbb{K}:\ \ 1 \cdot k = k = k \cdot 1}$$

(ΔΧ9) *Ύπαρξη Πολλαπλασιαστικού Αντιστρόφου. Δηλαδή για κάθε μη μηδενικό στοιχείο k του $\mathbb{K}$ υπάρχει ένα νέο στοιχείο k^{-1} του $\mathbb{K}$, το οποίο καλείται* **αντίστροφο στοιχείο** *του k, έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \exists k^{-1} \in \mathbb{K}:\ \ k \cdot k^{-1} = 1 = k^{-1} \cdot k}$$

Τα βασικά παραδείγματα σωμάτων με τα οποία θα ασχοληθούμε στις παρούσες σημειώσεις είναι υποσύνολα του συνόλου $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, το οποίο με την σειρά του είναι ένα σώμα.

Παράδειγμα 1.3.1 *Εφοδιασμένα με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, τα ακόλουθα σύνολα αριθμών είναι σώματα:*

1. *Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών.*

2. *Το σύνολο* $\mathbb{R}$ *των πραγματικών αριθμών.*

3. *Το σύνολο* $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών.*

Αντίθετα το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ *δεν είναι είναι σώμα (γιατί;).*

Άσκηση 1.3.2 *Θεωρούμε το ακόλουθα σύνολα:*

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{\kappa + \lambda\sqrt{2} \in \mathbb{R} \,|\, \kappa, \lambda \in \mathbb{Q}\}$$
$$\mathbb{Q}(\sqrt{-1}) := \{\kappa + \lambda\sqrt{-1} \in \mathbb{C} \,|\, \kappa, \lambda \in \mathbb{Q}\}$$

Να δείξετε ότι τα σύνολα $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *και* $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ *εφοδιασμένα με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πραγματικών και μιγαδικών αριθμών αντίστοιχα, είναι σώματα.*

Σύμβαση 1.3.3 *Χάριν ευκολίας στις παρούσες σημειώσεις από τώρα και στο εξής με τον όρο* **σώμα** *θα εννοούμε ένα υποσύνολο* $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών το οποίο περιέχει το* 0 *και το* 1 *και είναι κλειστό στην πρόσθεση, πολλαπλασιασμό, και την ύπαρξη αντιστρόφου (δηλαδή αν* $k \in \mathbb{K}$ *και* $k \neq 0$, *τότε* $k^{-1} \in \mathbb{K}$.

Είναι εύκολο να δειχθεί τότε ότι ένα τέτοιο υποσύνολο $\mathbb{K}$ *εφοδιασμένο με τους περιορισμούς των γνωστών πράξεων πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών είναι σώμα με την έννοια του ορισμού 1.3.1.*

Παρατήρηση 1.3.2 *Τα παραπάνω σώματα έχουν άπειρο πλήθος στοιχείων. Υπάρχουν όμως και σώματα με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Για παράδειγμα έστω* $\mathbb{F}$ *ένα σύνολο με δύο στοιχεία, τα οποία συμβολίζουμε με* $0, 1$*:* $\mathbb{F} = \{0, 1\}$. *Στο σύνολο* $\mathbb{F}$ *ορίζουμε δύο εσωτερικές πράξεις*

$$+ : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, (x, y) \mapsto x + y$$
$$\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}, (x, y) \mapsto x \cdot y$$

ως ακολούθως:

1. $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1$, *και* $1 + 1 = 0$.

2. $0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 0 = 0$, *και* $1 \cdot 1 = 1$.

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο $\mathbb{F}$ *είναι ένα σώμα.*

Γενικά το μεγαλύτερο τμήμα της θεωρίας που θα αναπτυχθεί στα επόμενα Κεφάλαια είναι ανεξάρτητο του πλήθους των στοιχείων ενός σώματος, και άρα ισχύει για τα σώματα με την έννοια του ορισμού 1.3.1. Η σύμβαση που κάναμε παραπάνω έγινε μόνο χάριν απλότητας και οικειότητας με τα σώματα αριθμών $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *και τα υποσύνολα τους .*

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα