ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ανοικτάμαθήματα
opencourses

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Διανυσματικοί Χώροι

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Κεφάλαιο 2

Διανυσματικοι Χωροι

Στο παρόν Κεφάλαιο θα ορίσουμε την πολύ βασική έννοια του διανυσματικού χώρου πάνω από ένα σώμα. Θα μελετήσουμε τις κυριότερες ιδιότητες διανυσματικών χώρων και θα διαπραγματευθούμε μια πληθώρα βασικών παραδειγμάτων επί των οποίων θα εφαρμοσθεί η θεωρία η οποία θα αναπτυχθεί στα επόμενα Κεφάλαια. Τέλος θα αναπτύξουμε μια σειρά θεμελιωδών κατασκευών επί διανυσματικών χώρων οι οποίες θα μας είναι πολύ χρήσιμες στα επόμενα Κεφάλαια.

2.1 Διανυσματικοί Χώροι: Ορισμός και Στοιχειώδεις Ιδιότητες

Από τώρα και στο εξής σταθεροποιούμε ένα σώμα $\mathbb{K}$. Υπενθυμίζουμε από το Κεφάλαιο 1 ότι με το όρο σώμα θα εννοούμε ένα υποσύνολο $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών το οποίο περιέχει το 0 και το 1 και είναι κλειστό στην πρόσθεση, πολλαπλασιασμό, και την ύπαρξη αντιστρόφου (δηλαδή αν $k \in \mathbb{K}$ και $k \neq 0$, τότε $k^{-1} \in \mathbb{K}$.

Διαισθητικά ένας διανυσματικός χώρος είναι ένα σύνολο "διανυσμάτων" στο οποίο μπορούμε να ορίσουμε πρόσθεση καθώς και πολλαπλασιασμό με αριθμούς από ένα σώμα, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι γνωστοί αλγεβρικοί νόμοι που ισχύουν στο σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων του επιπέδου ή του χώρου. Περισσότερο αυστηρά και με βάση τα όσα ισχύουν στην Αναλυτική ή Ευκλείδεια γεωμετρία οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.1.1 *Ένας* **διανυσματικός χώρος** *πάνω από ένα σώμα* $\mathbb{K}$ *είναι ένα μη-κενό σύνολο* $\mathcal{V}$*, του οποίου τα στοιχεία θα καλούμε* **διανύσματα** *και θα τα συμβολίζουμε με* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \cdots$*, το οποίο είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις:*

(a) *Μία εσωτερική πράξη* $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, *η οποία στέλνει το ζεύγος διανυσμάτων* $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ *σε ένα νέο διάνυσμα* $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{V}$, *την οποία καλούμε* **Πρόσθεση** *(διανυσμάτων του* $\mathcal{V}$*).*

(b) *Μία εξωτερική πράξη* $\cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, *η οποία στέλνει το ζεύγος* $(k, \vec{x}) \in \mathbb{K} \times \mathcal{V}$ *σε ένα νέο διάνυσμα* $k \cdot \vec{x} \in \mathcal{V}$, *την οποία καλούμε* **Βαθμωτό Πολλαπλασιασμό** *(στοιχείων του σώματος* $\mathbb{K}$ *με διανύσματα του* $\mathcal{V}$*).*

Το σύνολο $\mathcal{V}$ *μαζί με την πράξη της πρόσθεσης* $+$ *και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού* $\cdot$, *απαιτούμε να ικανοποιούν τα ακόλουθα αξιώματα:*

(ΔΧ1) Προσεταιριστική Ιδιότητα της Πρόσθεσης. *Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}\ \in\ \mathcal{V}:\quad (\vec{x} + \vec{y}\,) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}\,)}$$

(ΔΧ2) Αντιμεταθετική Ιδιότητα Πρόσθεσης. *Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}:\quad \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}}$$

(ΔΧ3) Ύπαρξη Μηδενικού Διανύσματος. *Δηλαδή υπάρχει ένα διακεκριμένο στοιχείο* $\vec{0}$ *του* $\mathcal{V}$, *το οποίο καλείται* **μηδενικό διάνυσμα**, *έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\boxed{\forall \vec{x} \in \mathcal{V}:\quad \vec{x} + \vec{0} = \vec{x} = \vec{0} + \vec{x}}$$

(ΔΧ4) Ύπαρξη Αντιθέτου Διανύσματος. *Δηλαδή για κάθε διάνυσμα* $\vec{x}$ *του* $\mathcal{V}$ *υπάρχει ένα νέο διάνυσμα* $-\vec{x}$ *του* $\mathcal{V}$, *το οποίο καλείται* **αντίθετο διάνυσμα** *του* $\vec{x}$, *έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη ιδιότητα:*

$$\boxed{\forall \vec{x} \in \mathcal{V},\ \exists(-\vec{x}\,) \in \mathcal{V}:\quad \vec{x} + (-\vec{x}\,) = \vec{0} = (-\vec{x}) + \vec{x}\,)}$$

(ΔΧ5) Επιμεριστική Ιδιότητα του Βαθμωτού Πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση στοιχείων του $\mathbb{K}$. *Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall \vec{x} \in \mathcal{V},\ \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{K}:\quad (\kappa + \lambda) \cdot \vec{x} = \kappa \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{x}}$$

(ΔΧ6) Επιμεριστική Ιδιότητα του Βαθμωτού Πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων του $\mathcal{V}$. *Δηλαδή:*

$$\boxed{\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V},\ \forall \kappa \in \mathbb{K}:\quad \kappa \cdot (\vec{x} + \vec{y}\,) = \kappa \cdot \vec{x} + \kappa \cdot \vec{y}}$$

(ΔΧ7) *Μικτή Προσεταιριστική Ιδιότητα. Δηλαδή :*

$$\boxed{\forall \vec{x} \in \mathcal{V},\ \forall \kappa, \lambda \in \mathbb{K} :\ \ \kappa \cdot (\lambda \cdot \vec{x}\,) = (\kappa\lambda) \cdot \vec{x}}$$

(ΔΧ8) *Μοναδιαία Ιδιότητα. Δηλαδή :*

$$\boxed{\forall \vec{x} \in \mathcal{V} :\ \ 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}}$$

Σχόλιο 2.1.1

1. *Σημειώνουμε ότι ένας διανυσματικός χώρος είναι μια τριάδα $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ που ικανοποιεί τα παραπάνω αξιώματα και όχι απλά ένα σύνολο $\mathcal{V}$. Χάριν απλότητας όμως θα παραλείπουμε τα σύμβολα των πράξεων $+, \cdot$, όταν οι πράξεις είναι ευκόλως εννοούμενες ή έχουν αναφερθεί/ορισθεί προηγούμενα, και θα λέμε ότι το σύνολο $\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος.*

2. *Στον ορισμό 2.1.1 δεν θα πρέπει να συγχέουμε την πρόσθεση αριθμών από το σώμα $\mathbb{K}$ με την πρόσθεση διανυσμάτων του $\mathcal{V}$, αν και οι δύο πράξεις εμφανίζονται στα αξιώματα με το ίδιο σύμβολο. Έτσι π.χ. στο Αξίωμα* **(ΔΧ5)***, το σύμβολο $+$ στην αριστερή πλευρά συμβολίζει πρόσθεση αριθμών στο σώμα $\mathbb{K}$ και το το σύμβολο $+$ στην δεξιά πλευρά συμβολίζει πρόσθεση διανυσμάτων στον $\mathcal{V}$.*

3. *Αν $\vec{x}$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathcal{V}$, τότε το διάνυσμα $-\vec{x}$, την ύπαρξη του οποίου μας εξασφαλίζει το Αξίωμα* **(ΔΧ4)***, συμβολίζει ένα νέο διάνυσμα. Θα δούμε άργότερα ότι το $-\vec{x}$ είναι ίσο με το διάνυσμα $(-1) \cdot \vec{x}$.*

4. *Το Αξίωμα* **(ΔΧ1)** *μας επιτρέπει να "απαλείφουμε" παρενθέσεις. Έτσι από τώρα και στο εξής η σχέση $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ θα γράφεται $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ καθώς ο άλλος δυνατός τρόπος για να προσθέσουμε τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, δηλαδή ο $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ δίνει σύμφωνα με το Αξίωμα* **(ΔΧ1)** *το ίδιο αποτέλεσμα. Γενικότερα αν έχουμε να προσθέσουμε μια πεπερασμένη συλλογή διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, τότε όλοι οι δυνατοί τρόποι για να τα προσθέσουμε δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα (να το δείξετε σαν Άσκηση χρησιμοποιώντας επαγωγή), το οποίο από τώρα και στο εξής θα γράφουμε ως: $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n$.*

5. *Το Αξίωμα* **(ΔΧ2)** *μας επιτρέπει να αλλάζουμε την σειρά με την οποία προσθέτουμε διανύσματα. Έτσι για παράδειγμα έχουμε $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 = \vec{x}_3 + \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \vec{x}_1$, κ.ο.κ.*

Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα διανυσματικών χώρων Θα δούμε δούμε κάποιες ιδιότητες που απορρέουν σχετικά άμεσα από τον ορισμό 2.1.1

και οι οποίες θα μας επιτρέψουν να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό και να αποφεύγουμε περιττές επαναλήψεις επιχειρημάτων.

Από τώρα σταθεροποιούμε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$.

Συμβολισμός 2.1.2 *Αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$, τότε θα γράφουμε:*

$$\boxed{\vec{x} + (-\vec{y}) \ := \ \vec{x} - \vec{y}}$$

όπου $-\vec{y}$ είναι το αντίθετο του διανύσματος $\vec{y}$. Σημειώνουμε ότι η παραπάνω γραφή είναι απλά ένας συμβολισμός, καθώς τυπικά δεν έχουμε ορίσει αφαίρεση διανυσμάτων. Μπορεί όμως κανείς να θεωρήσει τον παραπάνω συμβολισμό ως ορισμό **αφαίρεσης διανυσμάτων** *στον $\mathcal{V}$.*

Λήμμα 2.1.2 *Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.*

1. $\forall \kappa, \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in \mathcal{V}$: $(\kappa - \lambda) \cdot \vec{x} = \kappa \cdot \vec{x} - \lambda \cdot \vec{x}$.
2. $\forall \kappa \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$: $\kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \kappa \cdot \vec{x} - \kappa \cdot \vec{y}$.
3. $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$: $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.
4. $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$: $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$.
5. $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$: $-(-\vec{x}) = \vec{x}$.
6. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$: $-(\vec{x} + \vec{y}) = -\vec{x} - \vec{y}$.
7. $\forall \kappa \in \mathbb{K}$: $\kappa \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
8. *Αν $\lambda \in \mathbb{K}$ και $\vec{x} \in \mathcal{V}$ και ισχύει $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$, τότε: είτε $\lambda = 0$ ή $\vec{x} = \vec{0}$.*

Απόδειξη:

1. Εάν προσθέσουμε στο διάνυσμα $(\kappa - \lambda) \cdot \vec{x}$ το διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{x}$ και χρησιμοποιήσουμε το Αξίωμα **(ΔΧ5)** θα έχουμε: $(\kappa - \lambda) \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{x} = (\kappa - \lambda + \lambda) \cdot \vec{x} = \kappa \cdot \vec{x}$. Αν στην τελευταία σχέση προσθέσουμε και στα δύο μέλη το διάνυσμα $-(\lambda \cdot \vec{x})$ και χρησιμοποιήσουμε διαδοχικά τα Αξιώματα **(ΔΧ1)**, **(ΔΧ4)**, **(ΔΧ3)** θα έχουμε την ζητούμενη σχέση:

$$\begin{aligned} \kappa \cdot \vec{x} - \lambda \cdot \vec{x} &= [(\kappa - \lambda) \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{x}] - (\lambda \cdot \vec{x}) \\ &= (\kappa - \lambda) \cdot \vec{x} + [\lambda \cdot \vec{x} - (\lambda \cdot \vec{x})] \\ &= (\kappa - \lambda) \cdot \vec{x} + \vec{0} \\ &= (\kappa - \lambda) \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

2. Αν προσθέσουμε στο διάνυσμα $\kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y})$ το διάνυσμα $\kappa \cdot \vec{y}$, θα έχουμε το διάνυσμα $\kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + \kappa \cdot \vec{y}$. Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τα Αξίωματα **(ΔΧ1)**, **(ΔΧ4)**, **(ΔΧ3)** θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + \kappa \cdot \vec{y} &= \kappa \cdot [(\vec{x} - \vec{y}) + \vec{y}] \\ &= \kappa \cdot [\vec{x} + (-\vec{y}) + \vec{y})] \\ &= \kappa \cdot (\vec{x} + \vec{0}) \\ &= \kappa \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

Αν τώρα στην σχέση $\kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + \kappa \cdot \vec{y} = \kappa \cdot \vec{x}$ προσθέσουμε και στα δύο μέλη το διάνυσμα $-(\kappa \cdot \vec{y})$ και χρησιμοποιήσουμε διαδοχικά τα Αξίωματα **(ΔΧ1)**, **(ΔΧ4)**, **(ΔΧ3)** θα έχουμε τελικά την ζητούμενη σχέση:

$$\begin{aligned} [\kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + \kappa \cdot \vec{y}] - (\kappa \cdot \vec{y}) = \kappa \cdot \vec{x} - \kappa \cdot \vec{y} &\implies \\ \kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + (\kappa \cdot \vec{y} - \kappa \cdot \vec{y}) = \kappa \cdot \vec{x} - \kappa \cdot \vec{y} &\implies \\ \kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y}) + \vec{0} = \kappa \cdot \vec{x} - \kappa \cdot \vec{y} &\implies \\ \kappa \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \kappa \cdot \vec{x} - \kappa \cdot \vec{y} & \end{aligned}$$

3. Στην σχέση 1. που αποδείξαμε θέτουμε $\kappa = \lambda$. Τότε θα έχουμε την σχέση $0 \cdot \vec{x} = \kappa \cdot \vec{x} - \kappa \cdot \vec{x}$, το δεύτερο μέλος της οποίας είναι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ σύμφωνα με το Αξίωμα **(ΔΧ4)**. Επομένως $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

4. Στην σχέση 1. που αποδείξαμε θέτουμε $\kappa = 0$ και $\lambda = 1$. Τότε θα έχουμε την σχέση $(-1) \cdot \vec{x} = -(1 \cdot \vec{x})$, το δεύτερο μέλος της οποίας είναι ίσο με το διάνυσμα $-\vec{x}$ σύμφωνα με το Αξίωμα **(ΔΧ8)**. Επομένως $(-1) \cdot \vec{x} = -\vec{x}$.

5. Από την ιδιότητα 4. η σχέση $-(-\vec{x})$ γράφεται ισοδύναμα $(-1) \cdot [(-1) \cdot \vec{x})]$. Χρησιμοποιώντας τα Αξιώματα **(ΔΧ7)** και **(ΔΧ8)**, θα έχουμε $-(-\vec{x}) = (-1) \cdot [(-1) \cdot \vec{x})] = [(-1)(-1)] \cdot \vec{x} = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

6. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 4., και το Αξίωμα **(ΔΧ6)**, θα έχουμε: $-(\vec{x} + \vec{y}) = (-1) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = (-1) \cdot \vec{x} + (-1) \cdot \vec{y} = -\vec{x} - \vec{y}$.

7. Στην σχέση 2. που αποδείξαμε θέτουμε $\vec{x} = \vec{y}$. Τότε θα έχουμε την σχέση $\kappa \cdot (\vec{x} - \vec{x}) = \kappa \cdot \vec{x} - \kappa \cdot \vec{x}$, το δεύτερο μέλος της οποίας είναι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ και το πρώτο μέλος είναι ίσο με το διάνυσμα $\kappa \cdot \vec{0}$, σύμφωνα με το Αξίωμα **(ΔΧ4)**. Επομένως $\kappa \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

8. Υποθέτουμε ότι $\kappa \neq 0$ και δείχνουμε ότι αναγκαστικά θα πρέπει να ισχύει $\vec{x} = \vec{0}$. Επειδή $\kappa \neq 0$, ο αριθμός $\kappa \in \mathbb{K}$ είναι αντιστρέψιμος και

επομένως υπάρχει ο αντίστροφος του $\kappa^{-1} \in \mathbb{K}$ και ισχύει $\kappa\kappa^{-1} = 1 = \kappa^{-1}\kappa$. Πολλαπλασιάζοντας βαθμωτά και από τα δύο μέλη την δοθείσα σχέση $\kappa \cdot \vec{x} = \vec{0}$ με κ^{-1}, θα έχουμε την σχέση

$$\kappa^{-1} \cdot (\kappa \cdot \vec{x}) = \kappa^{-1} \cdot \vec{0} \qquad (*)$$

Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τα Αξιώματα **(ΔΧ7)** και **(ΔΧ8)**, το πρώτο μέλος της σχέσης $(*)$ είναι ίσο με $(\kappa^{-1}\kappa) \cdot \vec{x}) = 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$. Το δεύτερο μέλος της σχέσης $(*)$ είναι ίσο με το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ σύμφωνα με την ιδιότητα 5. που αποδείξαμε παραπάνω. Επομένως $\vec{x} = 0$.

□

Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε αν το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ και το αντίθετο ενός δοθέντος διανύσματος $\vec{x}$ του $\mathcal{V}$, την ύπαρξη των οποίων μας εξασφαλίζουν τα Αξιώματα **(ΔΧ3)** και **(ΔΧ4)**, είναι μοναδικά. Αυτό πράγματι ισχύει όπως θα δείξουμε στο επόμενο Λήμμα το οποίο περιέχει και δύο ιδιότητες οι οποίες μας επιτρέπουν να απλοποιήσουμε περαιτέρω τις πράξεις με διανύσματα.

Λήμμα 2.1.3 1. *Αν $\vec{0}_1$ και $\vec{0}_2$ είναι δύο διανύσματα του $\mathcal{V}$ τα οποία ικανοποιούν το Αξίωμα* **(ΔΧ3)**, *δηλαδή $\vec{x} + \vec{0}_1 = \vec{x}$ και $\vec{x} + \vec{0}_2 = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$, τότε: $\vec{0}_1 = \vec{0}_2$.*

2. *Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο διανύσματα $\vec{x}_1$ και $\vec{x}_2$ τα οποία ικανοποιούν το Αξίωμα* **(ΔΧ4)**, *δηλαδή $\vec{x} + \vec{x}_1 = \vec{0}$ και $\vec{x} + \vec{x}_2 = \vec{0}$. Τότε $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$.*

3. *Έστω $\lambda \in \mathbb{K}$, με $\lambda \neq 0$, και $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$. Αν $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{y}$, τότε $\vec{x} = \vec{y}$.*

4. *Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ και $\vec{x} \in \mathcal{V}$ με $\vec{x} \neq \vec{0}$. Αν $\lambda_1 \cdot \vec{x} = \lambda_2 \cdot \vec{x}$, τότε $\lambda_1 = \lambda_2$.*

Απόδειξη:

1. Θέτοντας $\vec{x} = \vec{0}_1$ στο Αξίωμα **(ΔΧ3)** και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $\vec{0}_2$ ικανοποιεί αυτό το Αξίωμα, έχουμε: $\vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_1$. Παρόμοια θέτοντας $\vec{x} = \vec{0}_2$ στο Αξίωμα **(ΔΧ3)** και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $\vec{0}_1$ ικανοποιεί αυτό το Αξίωμα, έχουμε: $\vec{0}_2 + \vec{0}_1 = \vec{0}_2$. Όμως από το Αξίωμα **(ΔΧ2)** έχουμε $\vec{0}_1 + \vec{0}_2 = \vec{0}_2 + \vec{0}_1$. Επομένως $\vec{0}_1 = \vec{0}_2$.

2. Προσθέτοντας στην σχέση $\vec{x} + \vec{x}_1 = \vec{0}$ το διάνυσμα $\vec{x}_2$ θα έχουμε την σχέση $(\vec{x} + \vec{x}_1) + \vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{x}_2$, το δεύτερο μέλος της οποίας είναι ίσο με το $\vec{x}_2$ σύμφωνα με το Αξίωμα **(ΔΧ3)**. Εφαρμόζοντας διαδοχικά τα Αξιώματα **(ΔΧ1)**, **(ΔΧ2)**, **(ΔΧ3)**, και την σχέση $\vec{x} + \vec{x}_2 = \vec{0}$, θα έχουμε:

$$\vec{x}_2 = (\vec{x} + \vec{x}_1) + \vec{x}_2 = \vec{x} + (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{x} + (\vec{x}_2 + \vec{x}_1) =$$

$$(\vec{x} + \vec{x}_2) + \vec{x}_1 = \vec{0} + \vec{x}_1 = \vec{x}_1 + \vec{0} = \vec{x}_1.$$

3. Προσθέτοντας και στα δύο μέλη της σχέσης $\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{y}$ το διάνυσμα $-(\lambda \cdot \vec{y})$ θα έχουμε την σχέση $\lambda \cdot \vec{x} - (\lambda \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{y} - (\lambda \cdot \vec{y}) = \vec{0}$. Επομένως η αρχική σχέση γράφεται ισοδύναμα $\lambda \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = 0$. Επειδή $\lambda \neq 0$, από την ιδιότητα 8 του Λήμματος 2.1.2, έπεται ότι $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$. Προσθέτοντας στην τελευταία σχέση το διάνυσμα $\vec{y}$ θα έχουμε $\vec{x} - \vec{y} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{0}$ και επομένως $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x} = \vec{y}$.

4. Σκεπτόμενοι όπως στην απόδειξη του 3. η σχέση $\lambda_1 \cdot \vec{x} = \lambda_2 \cdot \vec{x}$ γράφεται ισοδύναμα $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Επειδή $\lambda_1 \neq \lambda_2$, από την ιδιότητα 8. του Λήμματος 2.1.2, έπεται ότι $\vec{x} = \vec{0}$.

□

Πρόχειρη Δοκιμασία

1. Να δείξετε ότι το Αξίωμα **(ΔΧ2)** προκύπτει από τα τα υπόλοιπα αξιώματα.

   (Υπόδειξη: Θεωρείστε δύο τυχόντα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ του $\mathcal{V}$ και εκφράστε το διάνυσμα $(1+1) \cdot (\vec{x} + \vec{y})$ με δύο διαφορετικούς τρόπους, χρησιμοποιώντας τα Αξιώματα **(ΔΧ5)**, **(ΔΧ6)**.)

2. Στο σύνολο $\mathbb{R}^2 = \{(\kappa, \lambda) \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\}$, ορίζουμε “πρόσθεση” $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ως εξής: $(\kappa_1, \kappa_2) + (\lambda_1, \lambda_2) = (\kappa_1 + \lambda_1, \kappa_2 + \lambda_2)$. Επίσης ορίζουμε “βαθμωτό πολλαπλασιασμό” $\circledast : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ως εξής: $\lambda \circledast (\kappa_1, \kappa_2) = (\lambda\kappa_1, 0)$. Να δείξετε ότι η τριάδα $(\mathbb{R}^2, +, \circledast)$ ικανοποιεί όλα τα Αξιώματα του ορισμού 2.1.1, *εκτός* από το Αξίωμα **(ΔΧ8)**.

   (Υπόδειξη: Για το **(ΔΧ8)** θεωρείστε τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό $1 \circledast (1, 1)$.)

3. Στο σύνολο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε “πρόσθεση” $\dot{+} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ως εξής: $(\kappa_1, \kappa_2) \dot{+} (\lambda_1, \lambda_2) = (\kappa_1 + \lambda_1 + 1, \kappa_2 + \lambda_2 + 1)$. Επίσης ορίζουμε “βαθμωτό πολλαπλασιασμό” $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ως εξής: $\lambda \cdot (\kappa_1, \kappa_2) = (\lambda\kappa_1, \lambda\kappa_2)$. Να εξετασθεί αν η τριάδα $(\mathbb{R}^2, \dot{+}, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$. Ποια Αξιώματα ισχύουν και ποιά όχι;

4. Έστω $\mathbb{R}_+$ το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε “πρόσθεση” $\otimes : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ως εξής: $\kappa \otimes \lambda := \kappa\lambda$. Επίσης ορίζουμε “βαθμωτό πολλαπλασιασμό” $\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ως εξής: $r \star \kappa := \kappa^r$. Να δείξετε ότι η τριάδα $(\mathbb{R}_+, \otimes, \star)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$.

- Από τώρα και στο εξής θα χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες που αποδείξαμε στο Λήμμα 2.1.2 χωρίς περαιτέρω αναφορά.

2.2 Κατασκευές και Παραδείγματα Διανυσματικών Χώρων

Στην παρούσα ενότητα θα αναπτύξουμε μια σειρά παραδειγμάτων διανυσματικών χώρων. Αυτά τα παραδείγματα, καθώς και πολλά άλλα τα οποία θα αναφέρουμε στην συνέχεια, θα τα χρησιμοποιούμε καθ' όλη την διάρκεια των σημειώσεων σαν πρότυπα εφαρμογής της θεωρίας την οποία θα αναπτύξουμε.

Παράδειγμα 2.2.1 *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα. Για παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών ή το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ή το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.*

Τότε η πρόσθεση $\mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $(\kappa, \lambda) \mapsto \kappa+\lambda$ του $\mathbb{K}$, και ο πολλαπλασιασμός $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $(\kappa, \lambda) \mapsto \kappa\lambda$ του $\mathbb{K}$ (τον οποίον για την περίσταση θεωρούμε ως εξωτερική πράξη), ικανοποιούν τα Αξιώματα του ορισμού 2.1.1 (ΝΑ ΤΟ ΔΕΙΞΕΤΕ ΣΑΝ ΑΣΚΗΣΗ). Επομένως κάθε σώμα $\mathbb{K}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Όπως μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα το μηδενικό διάνυσμα είναι ο αριθμός 0 και το αντίθετο διάνυσμα του $\kappa \in \mathbb{K}$ είναι το $-\kappa$.

Το επόμενο αποτελεί κατά κάποιο τρόπο γενίκευση του παραπάνω παραδείγματος.

Παράδειγμα 2.2.2 *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και n ένας φυσικός αριθμός ($n \geq 1$). Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο:*

$$\mathbb{K}^n := \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K} = \{(\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n) \mid \kappa_i \in \mathbb{K},\, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

Χρησιμοποιώντας την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αριθμών στο $\mathbb{K}$, μπορούμε να ορίσουμε μια πράξη πρόσθεσης $+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ και μια πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ στο σύνολο $\mathbb{K}^n$, ως εξής. Αν $\vec{\alpha} = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$, $\vec{\beta} = (l_1, l_2, \cdots, l_n) \in \mathbb{K}^n$, και $r \in \mathbb{K}$, τότε ορίζουμε:

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (k_1 + l_1, k_2 + l_2, \cdots, k_n + l_n) \quad \text{και} \quad r \cdot \vec{\kappa} = (rk_1, rk_2, \cdots, rk_n).$$

Τότε η τριάδα $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Όπως μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα το μηδενικό διάνυσμα είναι $\vec{0} = (0, 0, \cdots, 0)$ και επιπρόσθετα το αντίθετο του διανύσματος $\vec{\alpha} = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ είναι το διάνυσμα $-\vec{\alpha} = (-k_1, -k_2, \cdots, -k_n)$. Για παράδειγμα ας αποδείξουμε ότι ισχύει το Αξίωμα **(ΔΧ5)***. Έστω $r, s \in \mathbb{K}$ και $\vec{\alpha} = (k_1, k_2, \cdots, k_n) \in \mathbb{K}^n$. Τότε:*

$$(r + s) \cdot \vec{\alpha} = (r + s) \cdot (k_1, k_2, \cdots, k_n) =$$

$$((r+s)k_1, (r+s)k_2, \cdots, (r+s)k_n) = (rk_1 + sk_1, rk_2 + sk_2, \cdots, rk_n + sk_n) =$$

$$(rk_1, rk_2, \cdots, rk_n) + (sk_1, sk_2, \cdots, sk_n) =$$
$$r \cdot (k_1, k_2, \cdots, k_n) + s \cdot (k_1, k_2, \cdots, k_n) = r \cdot \vec{\alpha} + s \cdot \vec{\alpha}.$$

Πρόχειρη Δοκιμασία

Επαληθεύστε τα υπόλοιπα αξιώματα στο Παράδειγμα 2.2.2.

Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ότι ένα σύνολο μπορεί να είναι διανυσματικός χώρος πάνω από δύο διαφορετικά σώματα.

Παράδειγμα 2.2.3 *Στο Παράδειγμα 2.2.1 είδαμε ότι κάθε σώμα είναι διανυσματικός χώρος πάνω από τον εαυτό του. Έτσι το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ με πράξεις αυτές που ορίσθηκαν στο Παράδειγμα 2.2.1. Διατηρώντας την πράξη της πρόσθεσης $+$, ορίζουμε έναν βαθμωτό πολλαπλασιασμό $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ως εξής. Αν $r \in \mathbb{R}$ και $z \in \mathbb{C}$, τότε $r \cdot z = rz$. Δηλαδή αν $z = a + bi$, τότε $r \cdot z = ra + rbi$. Τότε είναι εύκολο να δειχθεί ότι η τριάδα $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ (δειξτε το σαν Ασκηση).*

Σχόλιο 2.2.4 *Ταυτίζοντας το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών με το σύνολο $\mathbb{R}^2$, μέσω της 1-1 και επί απεικόνισης $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ η οποία στέλνει τον μιγαδικό αριθμό $z = a + bi$ στο ζεύγος πραγματικών αριθμών (a, b), είναι φανερό ότι η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός στα σύνολα $\mathbb{C}$ και $\mathbb{R}^2$ αντιστοιχούν με κανονικό τροπο, και επομένως μπορούμε να "ταυτίσουμε" το $\mathbb{C}$ με το $\mathbb{R}^2$ σαν διανυσματικού χώρους. Θα δούμε αργότερα μια πιο αυστηρή διατύπωση αυτού του ισχυρισμού.*

Θα δούμε τώρα μια γενίκευση του Παραδείγματος 2.2.2.

Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_n$ είναι n το πλήθος διανυσματικοί χώροι πάνω από το *ίδιο* σώμα $\mathbb{K}$. Συμβολίζουμε με τα ίδια σύμβολα τις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού στους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{V}_i$. Αυτή η σύμβαση δεν θα μας δημιουργήσει σύγχυση, καθώς θα είναι φανερό από τα συμφραζόμενα σε ποιόν διανυσματικό χώρο θα αναφέρομαστε.

Θεωρούμε τώρα το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_n$:

$$\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n := \{(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) \mid \vec{x}_i \in \mathcal{V}_i, \ i = 1, 2, \cdots, n\}$$

στο οποίο ορίζουμε νέα πράξη πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως εξής:

1. Πρόσθεση: Αν $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)$ και $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n)$ είναι δύο στοιχεία του $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n$, τότε:

$$\alpha + \beta := (\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \vec{x}_2 + \vec{y}_2 \cdots, \vec{x}_n + \vec{y}_n) \ \in \ \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n.$$

2. Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός: Αν $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)$ είναι ένα στοιχείο του $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n$ και $k \in \mathbb{K}$, τότε:

$$k \cdot \alpha := (k \cdot \vec{x}_1, k \cdot \vec{x}_2, \cdots, k \cdot \vec{x}_n) \;\in\; \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n.$$

Αν και χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για τις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού στα σύνολα $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_n$ και $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n$ δεν θα δημιουργείται σύγχιση καθώς θα είναι φανερό κάθε φορά σε ποιά σύνολα αναφέρονται οι πράξεις.

Θεώρημα 2.2.1 *Έστω ότι $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_n$ είναι n το πλήθος διανυσματικοί χώροι πάνω από το ίδιο σώμα $\mathbb{K}$. Τότε εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, το καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$.*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε τα Αξιώματα **(ΔΧ1), (ΔΧ3), (ΔΧ4), (ΔΧ6), (ΔΧ7)**. Η απόδειξη των Αξιωμάτων **(ΔΧ2), (ΔΧ5), (ΔΧ8)** είναι παρόμοια και αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη. Στο υπόλοιπο της απόδειξης θέτουμε για συντομία $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \mathcal{V}_n$.

Έστω $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)$, $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n)$ και $\gamma = (\vec{z}_1, \vec{z}_2, \cdots, \vec{z}_n)$ τρία στοιχεία του $\mathcal{V}$, και έστω $k \in \mathbb{K}$.

1. Χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔΧ1)** ισχύει στους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) + [(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n) + (\vec{z}_1, \vec{z}_2, \cdots, \vec{z}_n)] =$$

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) + (\vec{y}_1 + \vec{z}_1, \vec{y}_2 + \vec{z}_2, \cdots, \vec{y}_n + \vec{z}_n) =$$

$$(\vec{x}_1 + (\vec{y}_1 + \vec{z}_1), \vec{x}_2 + (\vec{y}_2 + \vec{z}_2), \cdots, \vec{x}_n + (\vec{y}_n + \vec{z}_n)) =$$

$$((\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + \vec{z}_1, (\vec{x}_2 + \vec{y}_2) + \vec{z}_2, \cdots, (\vec{x}_2 + \vec{y}_2) + \vec{z}_2) =$$

$$(\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \vec{x}_2 + \vec{y}_2, \cdots, \vec{x}_2 + \vec{y}_2) + (\vec{z}_1, \vec{z}_2, \cdots, \vec{z}_n) =$$

$$[(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) + (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n)] + (\vec{z}_1, \vec{z}_2, \cdots, \vec{z}_n) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

2. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{0} := (\vec{0}_1, \vec{0}_2, \cdots, \vec{0}_n)$, όπου $\vec{0}_i$ είναι το μηδενικό διάνυσμα του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}_i$. Τότε χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔΧ3)** ισχύει στους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha + \vec{0} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) + (\vec{0}_1, \vec{0}_2, \cdots, \vec{0}_n) = (\vec{x}_1 + \vec{0}_1, \vec{x}_2 + \vec{0}_2, \cdots, \vec{x}_n + \vec{0}_n) =$$

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) = \alpha.$$

Παρόμοια $\vec{0} + \alpha = \alpha$. Άρα το διάνυσμα $\vec{0}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{V}$.

3. Θεωρούμε το διάνυσμα $-\alpha := (-\vec{x}_1, -\vec{x}_2, \cdots, -\vec{x}_n)$. Χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔΧ4)** ισχύει στους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha + (-\alpha) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) + (-\vec{x}_1, -\vec{x}_2, \cdots, -\vec{x}_n) =$$

$$(\vec{x}_1 + (-\vec{x}_1), \vec{x}_2 + (-\vec{x}_2), \cdots, \vec{x}_n + (-\vec{x}_n)) = (\vec{0}_1, \vec{0}_2, \cdots, \vec{0}_n) = \vec{0}.$$

Παρόμοια $(-\alpha) + \alpha = \vec{0}$. Άρα το διάνυσμα $-\alpha$ είναι το αντίθετο διάνυσμα του α.

4. Χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔΧ6)** ισχύει στους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$k \cdot (\alpha + \beta) = k \cdot [(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) + (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n)] =$$

$$k \cdot (\vec{x}_1 + \vec{y}_1, \vec{x}_2 + \vec{y}_2, \cdots, \vec{x}_n + \vec{y}_n) = (k \cdot (\vec{x}_1 + \vec{y}_1), k \cdot (\vec{x}_2 + \vec{y}_2), \cdots, k \cdot (\vec{x}_n + \vec{y}_n)) =$$

$$(k \cdot \vec{x}_1 + k \cdot \vec{y}_1, k \cdot \vec{x}_2 + k \cdot \vec{y}_2, \cdots, k \cdot \vec{x}_n + k \cdot \vec{y}_n) =$$

$$(k \cdot \vec{x}_1, k \cdot \vec{x}_2, \cdots, k \cdot \vec{x}_n) + (k \cdot \vec{y}_1, k \cdot \vec{y}_2, \cdots, k \cdot \vec{y}_n) =$$

$$k \cdot (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) + k \cdot (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n) = k \cdot \alpha + k \cdot \beta.$$

5. Χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔΧ7)** ισχύει στους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{V}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, θα έχουμε διαδοχικά:

$$k \cdot (l \cdot \alpha) = k \cdot [l \cdot (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n)] = k \cdot (l \cdot \vec{x}_1, l \cdot \vec{x}_2, \cdots, l \cdot \vec{x}_n) =$$

$$(k \cdot (l \cdot \vec{x}_1), k \cdot (l \cdot \vec{x}_2), \cdots, k \cdot (l \cdot \vec{x}_n)) = (kl \cdot \vec{x}_1, kl \cdot \vec{x}_2, \cdots, kl \cdot \vec{x}_n) =$$

$$kl \cdot (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n) = kl \cdot \alpha.$$

□

Παράδειγμα 2.2.5 *1. Διαλέγοντας $\mathcal{V}_i = \mathbb{K}$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$ στο Θεώρημα 2.2.1, έχουμε το παράδειγμα 2.2.2.*

2. Αν $\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, τότε διαλέγοντας $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$ στο Θεώρημα 2.2.1, θα έχουμε ότι το καρτεσιανό γινόμενο $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}$ του $\mathcal{V}$ με τον εαυτό του n φορές, είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathcal{V}$.

3. Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ πάνω από το $\mathbb{R}$ όπως στα Παράδείγματα 2.2.1 και 2.2.3. Τότε το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και έστω $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ ένα υποσύνολο του. Υποθέτουμε ότι το $\mathbb{L}$ περιέχει τα $0, 1$, είναι κλειστό στην πράξη της πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού του $\mathbb{K}$, και ισχύει ότι $l^{-1} \in \mathbb{L}$, αν $l \in \mathbb{L} \setminus \{0\}$. Να δείξετε ότι περιορίζοντας τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού του $\mathbb{K}$ στο $\mathbb{L}$, το σύνολο $\mathbb{L}$ είναι ένα σώμα και το $\mathbb{K}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{L}$.

Για παράδειγμα μπορούμε να διαλέξουμε σαν $\mathbb{L}$ το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών και σαν $\mathbb{K}$ είτε το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ή το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

Δοθέντος ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$, υπάρχουν δύο γενικές μέθοδοι κατασκευής νέων διανυσματικών χώρων. Η μία μέθοδος μας εφοδιάζει με νέους διανυσματικούς χώρους "επεκτείνοντας" με κάποιον τρόπο τον $\mathcal{V}$, και η άλλη μέθοδος μας εφοδιάζει με νέους διανυσματικούς χώρους οι οποίοι είναι υποσύνολα του $\mathcal{V}$. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι το Παράδειγμα 2.2.2 ανήκει στην πρώτη μέθοδο και η παραπάνω Πρόχειρη Δοκιμασία στην δεύτερη μέθοδο. Στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε κυρίως με την πρώτη μέθοδο. Η δεύτερη θα αναπτυχθεί στην επόμενη ενότητα.

2.2.1 Διανυσματικοί Χώροι Συναρτήσεων

Στην παρούσα υπο-ενότητα θα δούμε κάποια παραδείγματα διανυσματικών χώρων τα στοιχεία των οποίων (δηλαδή τα διανύσματα τους) είναι συναρτήσεις. Υπενθυμίζουμε ότι αν $f, g : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ είναι δύο συναρτήσεις μεταξύ δύο συνόλων $\mathcal{S}, \mathcal{T}$, τότε ισχύει εξ' ορισμού: $f = g$ αν και μόνον αν $f(s) = g(s)$, $\forall s \in \mathcal{S}$. Ξεκινάμε με ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.2.6 *Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο συναρτήσεων.*

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \eta\ f\ \text{είναι συνάρτηση}\}$$

Χρησιμοποιώντας την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αριθμών στο $\mathbb{R}$, ορίζουμε στο σύνολο $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ πράξη πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x).$$

$$\forall r \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad r \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (r \cdot f)(x) := rf(x).$$

Τότε η τριάδα $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$. Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ είναι η μηδενική συνάρτηση $\vec{\mathbf{0}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως εξής: $\vec{\mathbf{0}}(x) = 0$. Το αντίθετο διάνυσμα του διανύσματος $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ είναι η συνάρτηση $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως εξής: $(-f)(x) = -f(x)$.

Το Παράδειγμα 2.2.6 είναι ειδική περίπτωση ενός γενικότερου αποτελέσματος το οποίο θα συζητήσουμε τώρα.

Έστω S ένα τυχαίο σύνολο και $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων από το σύνολο S στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{F}(S, \mathcal{V}) := \{f : S \to \mathcal{V} \mid \text{η } f \text{ είναι συνάρτηση}\}$$

Στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ ορίζουμε μια πράξη πρόσθεσης ως εξής:

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(S, \mathcal{V}), \quad f + g : S \to \mathcal{V}, \ s \mapsto (f + g)(s) := f(s) + g(s) \tag{2.1}$$

Επίσης ορίζουμε μια πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού του σώματος $\mathbb{K}$ στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ ως εξής:

$$\forall k \in \mathbb{K}, \ \forall f \in \mathcal{F}(S, \mathcal{V}), \quad k \cdot f : S \to \mathcal{V}, \ s \mapsto (k \cdot f)(s) := k \cdot f(s). \tag{2.2}$$

Εδώ θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Στην σχέση $(f + g)(s) = f(s) + g(s)$ το σύμβολο $+$ στην αριστερή πλευρά συμβολίζει την νέα πράξη πρόσθεσης στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$, και το σύμβολο $+$ στην δεξιά πλευρά συμβολίζει την πράξη πρόσθεσης στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$. Παρόμοια στην σχέση $(k \cdot f)(s) = k \cdot f(s)$ το σύμβολο $\cdot$ στην αριστερή πλευρά συμβολίζει την νέα πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$, και το σύμβολο $\cdot$ στην δεξιά πλευρά συμβολίζει την πράξη βαθμωτού πολλαπλασιασμού στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$. Δεν εισάγουμε νέα σύμβολα για τις νέες πράξεις (α) για να μην βαρύνουμε τον συμβολισμό μας, και (β) θα είναι πάντοτε φανερό από τα συμφραζόμενα για ποια πράξη πρόκειται.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε τώρα το ακόλουθο γενικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.2.2 *Έστω S ένα τυχαίο σύνολο και $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, +, \cdot)$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Τότε με τις παραπάνω πράξεις 2.1 και 2.2 το σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ όλων των συναρτήσεων από το S στον $\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ είναι η συνάρτηση $\vec{\mathbf{0}} : S \to \mathcal{V}, \ s \mapsto \vec{\mathbf{0}}(x) = \vec{0}$ και το αντίθετο διάνυσμα του $f \in \mathcal{F}(S, \mathcal{V})$ είναι η συνάρτηση $-f : S \to \mathcal{V}, \ s \mapsto (-f)(s) = -f(\vec{s})$.*

Απόδειξη: Λαμβάνοντας υπ' όψιν το πως ορίσθηκαν οι πράξεις στο σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathcal{V})$, η ιδέα της απόδειξης βασίζεται στο ότι τα Αξιώματα **(ΔΧ1)**, ..., **(ΔΧ8)** ισχύουν στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$.

Έστω $f, g, h : S \to \mathcal{V}$ τρείς τυχούσες συναρτήσεις, και έστω $k, l \in \mathbb{K}$.

1. Ισχύει $f+(g+h)=(f+g)+h$ αν-ν για κάθε $x \in S$ έχουμε $[f+(g+h)](x)=[(f+g)h](x)$. Όμως $[f+(g+h)](x)=f(x)+(g+h)(x)=f(x)+[g(x)+h(x)]$. Χρησιμοποιώντας ότι το Αξίωμα **(ΔΧ1)** ισχύει στον $\mathcal{V}$, το δεύτερο μέλος της τελευταία σχέσης είναι ίσο με $[f(x)+g(x)]+h(x)=(f+g)(x)+h(x)=[(f+g)+h](x)$. Επομένως $[f+(g+h)](x)=[(f+g)+h](x)$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $x \in \mathcal{V}$, έπεται ότι $f+(g+h)=(f+g)+h$.

2. Η απόδειξη της σχέσης $f+g=g+f$ είναι παρόμοια με την αποδειξη της 1.

3. Θεωρούμε την συνάρτηση $\vec{\mathbf{0}}: S \to \mathcal{V}$, με $\vec{\mathbf{0}}(x)=\vec{0}$. Τότε για κάθε $x \in S$, έχουμε $(f+\vec{\mathbf{0}})(x)=f(x)+\vec{\mathbf{0}}(x)=f(x)+\vec{0}$. Επειδή $f(x) \in \mathcal{V}$, από το Αξίωμα **(ΔΧ3)** για τον $\mathcal{V}$, θα έχουμε $f(x)+\vec{0}=f(x)$. Επομένως $(f+\vec{\mathbf{0}})(x)=f(x), \forall x \in S$, το οποίο σημαίνει ότι $f+\vec{\mathbf{0}}=f$. Παρόμοια $\vec{\mathbf{0}}+f=f$.

4. Θεωρούμε την συνάρτηση $-f : S \to \mathcal{V}$ η οποία ορίζεται ως εξής: $(-f)(x) := -f(x)$. Τότε $[f+(-f)](x)=f(x)+(-f)(x)=f(x)-f(x)=\vec{0}=\vec{\mathbf{0}}(x)$. Έπομένως $f+(-f)=\vec{\mathbf{0}}$ και παρόμοια αποδεικνύεται ότι $(-f)+f=\vec{\mathbf{0}}$.

5. Ισχύει $(k+l)\cdot f=k\cdot f+l\cdot f$ αν-ν για κάθε $x \in S$ έχουμε $[(k+l)\cdot f](x)=(k\cdot f+l\cdot f)(x)$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathcal{F}(S,\mathcal{V})$ και την ισχύ του Αξιώματος **(ΔΧ5)** στον $\mathcal{V}$, έχουμε: $[(k+l)\cdot f](x)=(k+l)\cdot f(x)=k\cdot f(x)+l\cdot f(x)=(k\cdot f)(x)+(l\cdot f)(x)=(k\cdot f+l\cdot f)(x)$. Επομένως $(k+l)\cdot f=k\cdot f+l\cdot f$.

6. Η απόδειξη της σχέσης $k\cdot(f+g)=k\cdot f+k\cdot g$ είναι παρόμοια με την απόδειξη της 5.

7. Ισχύει $k\cdot(l\cdot f)=(kl)\cdot f$ αν-ν για κάθε $x \in S$ έχουμε: $[k\cdot(l\cdot f)](x)=[(kl)\cdot f](x)$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στο σύνολο $\mathcal{F}(S,\mathcal{V})$ και την ισχύ του Αξιώματος **(ΔΧ7)** στον $\mathcal{V}$, έχουμε: $[k\cdot(l\cdot f)](x)=k\cdot[(l\cdot f)(x)]=k\cdot[l\cdot f(x)]=(kl)\cdot f(x)=[(kl)\cdot f](x)$. Επομένως ισχύει η σχέση $k\cdot(l\cdot f)=(kl)\cdot f$.

8. Ισχύει $1\cdot f=f$ αν-ν για κάθε $x \in S$ έχουμε: $(1\cdot f)(x)=f(x)$. Επειδή το Αξίωμα **(ΔΧ8)** ισχύει στον $\mathcal{V}$, θα έχουμε: $(1\cdot f)(x)=1\cdot f(x)=f(x)$. Άρα $1\cdot f=f$.

□

Έτσι θέτοντας στο Θεώρημα 2.2.2, $S = [0, 2\pi]$ ή $S = [0, 1]$ και $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, αντίστοιχα $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, έπεται ότι τα σύνολα $\mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$, αντίστοιχα $\mathcal{F}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ και $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{C})$, είναι διανυσματικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{R}$, αντίστοιχα πάνω από το $\mathbb{C}$.

2.2.2 Ο Χώρος των Ακολουθιών

Μια σημαντική ειδική περίπτωση του Θεώρηματος 2.2.2 αποτελεί ο διανυσματικός χώρος των ακολουθιών με στοιχεία απο ένα σώμα $\mathbb{K}$, που θα συζητήσουμε τώρα.

Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots\}$ των φυσικών αριθμών μαζί με το 0, και έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα.

Ορισμός 2.2.3 *Μια* **ακολουθία** *με στοιχεία στο σώμα* $\mathbb{K}$ *είναι μια συνάρτηση*

$$\alpha : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{K}$$

Έστω $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ το σύνολο των ακολουθιών με στοιχεία στο σώμα $\mathbb{K}$. Αν $\alpha \in \mathbb{A}(\mathbb{K})$, τότε συμβολίζουμε την τιμή $\alpha(n)$ της συνάρτησης $\alpha : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{K}$ στον φυσικό αριθμό n με $\alpha(n) := \alpha_n$. Επειδή η συνάρτηση α καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της, έπεται ότι η α καθορίζεται πλήρως από τα στοιχεία $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots\}$. Έτσι θα συμβολίζουμε μια ακολουθία με στοιχεία στο σώμα $\mathbb{K}$ και ως εξής: $(\alpha_n)_{n\geq 0}$. Τα στοιχεία α_n, $n \geq 0$, καλούνται **όροι της ακολουθίας**.

Πόρισμα 2.2.4 *Το σύνολο* $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ *των ακολουθιών με στοιχεία από ένα σώμα* $\mathbb{K}$ *αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από το* $\mathbb{K}$ *με τις ακόλουθες πράξεις:*

1. *Πρόσθεση:* *Αν* $(\alpha_n)_{n\geq 0}, (\beta_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{K})$, *τότε:*

$$(\alpha_n)_{n\geq 0} + (\beta_n)_{n\geq 0} := (\gamma_n)_{n\geq 0}, \quad \text{όπου} \quad \gamma_n := \alpha_n + \beta_n, \ \forall n \geq 0.$$

2. *Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός:* *Αν* $(\alpha_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{K})$ *και* $k \in \mathbb{K}$, *τότε:*

$$k \cdot (\alpha_n)_{n\geq 0} := (\delta_n)_{n\geq 0} \quad \text{όπου} \quad \delta_n := k\alpha_n, \ \forall n \geq 0.$$

Απόδειξη: Θέτοντας $S = \mathbb{N}_0$ και $\mathcal{V} = \mathbb{K}$ στο Θεώρημα 2.2.2, παρατηρούμε ότι $\mathbb{A}(\mathbb{K}) = \mathcal{F}(S, \mathbb{K})$. Επίσης η πρόσθεση $(\alpha_n)_{n\geq 0} + (\beta_n)_{n\geq 0}$ των ακολουθιών $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\beta_n)_{n\geq 0}$ συμπίπτει με την πρόσθεση $\alpha + \beta$ των συναρτήσεων $n \mapsto \alpha(n) = \alpha_n$ και $n \mapsto \beta(n) = \beta_n$. Παρόμοια ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός

$k \cdot (\alpha_n)_{n\geq 0}$ συμπιπτει με τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό $k \cdot \alpha$ της συνάρτησης $n \mapsto \alpha(n) = \alpha_n$ με το k. Επειδή, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.2, με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο $\mathcal{F}(S, \mathbb{K})$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$, έπεται ότι και το σύνολο $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. □

2.3 Διανυσματικοί Χώροι Πολυωνύμων και Πινάκων

Θα δούμε τώρα δύο πολύ σπουδαίες ειδικές περιπτώσεις του Θεώρηματος 2.2.2 ή εναλλακτικά του Πορίσματος 2.2.4.

2.3.1 Ο Χώρος των Πινάκων

Από τώρα και στο εξής συμβολίζουμε με $\mathbb{N}_n := \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ το σύνολο των n πρώτων φυσικών αριθμών. Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα.

Ορισμός 2.3.1 *Ένας $m \times n$-**πίνακας** με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ είναι μια συνάρτηση*

$$A : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \to \mathbb{K}, \quad A(i,j) := \alpha_{ij}.$$

Έτσι σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό ένας πίνακας A, δηλαδή μιά συνάρτηση $A : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \to \mathbb{K}$, καθορίζεται από τις τιμές της οι οποίες είναι οι mn το πλήθος αριθμοί $\{a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots, \cdots, a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn}\}$ από το σώμα $\mathbb{K}$. Χάριν ευκολίας και για καλύτερη εποπτεία, συνήθως τις τιμές αυτές τις τοποθετούμε σε μια ορθογώνια διάταξη όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι ένας $m \times n$-πίνακας πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$ είναι μια διάταξη mn αριθμών από το σώμα $\mathbb{K}$ τους οποίους έχουμε διατάξει και παραστήσει όπως παραπάνω. Δηλαδή ταυτίζουμε το στοιχείο a_{ij} της διάταξης με την τιμή της απεικόνισης A στο στοιχείο $(i,j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$. Η τιμή a_{ij} καλείται **το στοιχείο του πίνακα A στην (i,j)-θέση**. Χάριν συντομίας συνήθως έναν $m \times n$-πίνακα A τον συμβολίζουμε ως εξής: $A = (a_{ij})$, όπου $i = 1, 2, \cdots, m$ και $j = 1, 2, \cdots, n$.

Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από τό σώμα $\mathbb{K}$.

Στήλες Για κάθε $j = 1, 2, \cdots, n$, η j-**στήλη** του πίνακα A είναι η ακόλουθη διάταξη m αριθμών:

$$A^j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A αποτελείται από n στήλες $A^1, A^2, \cdots, A^n$ κάθε μία από τις οποίες αποτελείται απο m αριθμούς.

Γραμμές Για κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$, η j-**γραμμή** του πίνακα A είναι η ακόλουθη διάταξη m αριθμών:

$$A_i := \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix}$$

Έτσι μπορούμε να πούμε ότι ο $m \times n$ πίνακας A αποτελείται από m γραμμες $A_1, A_2, \cdots, A_m$ κάθε μία από τις οποίες αποτελείται απο n αριθμούς.

Παρατηρούμε ότι το στοιχείο a_{ij} του πίνακα A βρίσκεται στην "τομή" της i-γραμμής με την j-στήλη.

Συμβολίζουμε με $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ το σύνολο των $m \times n$-πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = \big\{ A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{K},\ \forall i = 1, 2, \cdots m,\ \forall j = 1, 2, \cdots, n \big\}$$

Για παράδειγμα έστω οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} i & \sqrt{2} \\ -1 & 1+2i \end{pmatrix}$$

Τότε $A \in \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$, $C \in \mathbb{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$, $D \in \mathbb{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$, και $E \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

Στο σύνολο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$-πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ ορίζουμε πράξη πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως εξής:

1. Πρόσθεση: Αν $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, τότε $A + B$ είναι ο $m \times n$-πίνακας $(a_{ij} + b_{ij})$. Σχηματικά:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{ij} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mj}+b_{mj} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός: Αν $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, και $k \in \mathbb{K}$, τότε $k \cdot A$ είναι ο $m \times n$-πίνακας (ka_{ij}). Σχηματικά:

$$k\cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{ij} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mj} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Όπως και στην περίπτωση των χώρων συναρτήσεων, παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τους $m\times n$-πίνακες ως συναρτήσεις : $\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \to \mathbb{K}$, τότε η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός που ορίσαμε παραπάνω συμπίπτει με την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό συναρτήσεων. Με βάση αυτή την παρατήρηση το ακόλουθο πόρισμα είναι άμεση απόρροια του θεωρήματος 2.2.2.

Πόρισμα 2.3.2 *Το σύνολο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$-πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Το μηδενικό* *διάνυσμα του $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ είναι ο $m \times n$-πίνακας $\mathbf{0}$ όλα τα στοιχεία του οποίου είναι ίσα με 0:*

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Το αντίθετο διάνυσμα του $m \times n$-πίνακα $A = (a_{ij})$ είναι ο $m \times n$-πίνακας $-A = (-a_{ij})$:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1j} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2j} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{ij} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mj} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $S = \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ και $\mathcal{V} = \mathbb{K}$ στο Θεώρημα 2.2.2, και εργαζόμαστε όπως στο Πόρισμα 2.2.4. □

Ο πίνακας $\mathbf{0}$ καλείται ο **μηδενικός** $m \times n$ πίνακας, και αν $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, τότε ο πίνακας $-A = (-a_{ij})$ καλείται ο **αντίθετος** πίνακας του A.

Ένας $m \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **τετραγωνικός** αν $m = n$. Σπουδαίες κλάσεις τετραγωνικών πινάκων αποτελούν οι διαγώνιοι και οι βαθμωτοί πίνακες.

Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται **διαγώνιος** αν $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$. Δηλαδή αν ο A είναι της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Για παράδειγμα ο **μοναδιαίος** $n \times n$ πίνακας

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

είναι διαγώνιος. Γενικά ένας διαγώνιος πίνακας A καλείται **βαθμωτός** αν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του μοναδιαίου: $A = kI_n$, δηλαδή αν είναι της μορφής:

$$A = kI_n = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}.$$

Θα μελετήσουμε διεξοδικότερα τον χώρο των πινάκων και τον ρόλο που διαδραματίζουν στην Γραμμική Άλγεβρα σε επόμενο Κεφάλαιο.

2.3.2 Ο Χώρος των Πολυωνύμων

Έστω $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ ο διανυσματικός χώρος των ακολουθιών με στοιχεία αριθμούς από ένα σώμα $\mathbb{K}$ όπως αυτός ορίσθηκε στην υποενότητα 2.2.2. Θεωρούμε το υποσύνολο του $\mathbb{S}(\mathbb{K})$ το οποίο αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{K})$ οι οποίες έχουν πεπερασμένο πλήθος από μη-μηδενικούς όρους. Δηλαδή:

$$\mathbb{K}[t] := \big\{(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{K}) \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : \; a_n = 0, \; \forall n > k\big\}. \tag{2.3}$$

Ορισμός 2.3.3 *Μία ακολουθία $(a_n)_{n\geq 0}$ στοιχείων του σώματος $\mathbb{K}$ η οποία έχει πεπερασμένο πλήθος από μη-μηδενικούς όρους, δηλαδή ανήκει στο υποσύνολο $\mathbb{K}[t]$ του $\mathbb{A}(\mathbb{K})$, καλείται* **πολυώνυμο** *πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Τα μη-μηδενικα στοιχεία της ακολουθίας καλούνται* **συντελεστές** *του πολυωνύμου.*

Οι ακολουθίες-πολυώνυμα που θα ορίσουμε τώρα διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο στην θεωρία πολυωνύμων.

Ορισμός 2.3.4 1. *Η ακολουθία $(a_n)_{n\geq 0}$ με $a_0 = 1$ και $a_n = 0$, $\forall n \neq 0$, η οποία προφανώς ανήκει στο $\mathbb{K}[t]$, συμβολίζεται με t^0 και καλείται* **μοναδιαίο πολυώνυμο**. *Δηλαδή το t^0 είναι το πολυώνυμο:*

$$t^0 := (1, 0, 0, 0, \cdots, 0, \cdots) \ \in \mathbb{K}[t]$$

2. *Η ακολουθία $(a_n)_{n\geq 0}$ με $a_1 = 1$ και $a_n = 0$, $\forall n \neq 1$, η οποία προφανώς ανήκει στο $\mathbb{K}[t]$, θα συμβολίζεται με t και καλείται* **μεταβλητή** *ή* **απροσδιόριστη**. *Δηλαδή η t είναι το πολυώνυμο:*

$$t := (0, 1, 0, 0, \cdots, 0, \cdots) \ \in \mathbb{K}[t]$$

3. *Αν $m \geq 1$, η m-***οστή δύναμη** *t^m της μεταβλητής t ορίζεται να είναι το πολυώνυμο $(a_n)_{n\geq 0}$ με $a_m = 1$ και $a_n = 0$, $\forall n \neq m$. Δηλαδή:*

$$t^m := (0, 0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots) \ \in \mathbb{K}[t]$$

όπου το 1 εμφανίζεται σαν ο όρος της ακολουθίας στην $m + 1$ θέση.

Είναι φανερό ότι αν δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ ανήκουν στο υποσύνολο $\mathbb{K}[t]$, δηλαδή είναι πολυώνυμα, τότε και το άθροισμα τους $(a_n)_{n\geq 0} + (b_n)_{n\geq 0}$ ανήκει στο $\mathbb{K}[t]$, και άρα είναι πολυώνυμο. Πραγματικά αν $a_n = 0, \forall n > k$ και $b_n = 0, \forall n > l$, τότε $a_n + b_n = 0, \forall n > \max\{k, l\}$. Παρόμοια αν η ακολουθία $(a_n)_{n\geq 0}$ ανήκει στο υποσύνολο $\mathbb{K}[t]$ και $k \in \mathbb{K}$ είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{K}$, τότε και η ακολουθία $k \cdot (a_n)_{n\geq 0} = (ka_n)_{n\geq 0}$ ανήκει στο $\mathbb{K}[t]$. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού στο υποσύνολο $\mathbb{K}[t]$, περιορίζοντας τις πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού του διανυσματικού χώρου $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ στο υποσύνολο του $\mathbb{K}[t]$:

$$\forall (a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0} \ \in \mathbb{K}[t] : \ \ (a_n)_{n\geq 0} + (b_n)_{n\geq 0} := (a_n + b_n)_{n\geq 0} \ \in \mathbb{K}[t] \tag{2.4}$$

$$\forall (a_n)_{n\geq 0}, \ \forall k \in \mathbb{K} : \ \ k \cdot (a_n)_{n\geq 0} := (ka_n)_{n\geq 0} \ \in \mathbb{K}[t]. \tag{2.5}$$

Χρησιμοποιώντας ότι το σύνολο $\mathbb{A}(\mathbb{K})$ είναι διανυσματικός χώρος, είναι εύκολο να δούμε ότι το σύνολο $\mathbb{K}[t]$ εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις 2.4, 2.5 είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Ό διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}[t]$ καλείται **ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με συντελεστές από το σώμα** $\mathbb{K}$. Προφανώς το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{K}[t]$ είναι το πολυώνυμο $(a_n)_{n\geq 0}$ με $a_n = 0$, $\forall n \geq 0$ το οποίο καλείται **μηδενικό πολυώνυμο**. Το αντίθετο διάνυσμα του πολυωνύμου $(a_n)_{n\geq 0}$ είναι το πολυώνυμο $(-a_n)_{n\geq 0}$.

Συμβολισμός 2.3.1 *Από τώρα και στο εξής το μοναδιαίο πολυώνυμο, δηλαδή το πολυώνυμο $t^0 := (1, 0, 0, \cdots,)$ θα το συμβολίζουμε απλά με 1. Το μηδενικό πολυώνυμο θα το συμβολίζουμε απλά με 0.*

Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο $(k, 0, 0, \cdots)$ είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του μοναδιαίου πολυωνυμου: $(k, 0, 0, \cdots) = k \cdot (1, 0, 0, \cdots) = k \cdot 1$. Ένα πολυώνυμο καλείται **σταθερό** αν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του μοναδιαίου, δηλαδή είναι της μορφής $(k, 0, 0, \cdots)$, όπου $k \in \mathbb{K}$.

Το γεγονός ότι για ένα πολυώνυμο $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}[t]$ υπάρχει ενας αριθμός $m \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $a_n = 0$, $\forall n > m$, μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια του βαθμού ενός πολυωνύμου.

Ορισμός 2.3.5 *Έστω $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}[t]$ ένα μη-μηδενικό πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{K}$. Ο **βαθμός** του $(a_n)_{n\geq 0}$ ορίζεται να είναι ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός n για τον οποίο ισχύει $a_n \neq 0$ και συμβολίζεται με $\deg(a_n)_{n\geq 0}$. Δηλαδή:*

$$\deg(a_n)_{n\geq 0} \;=\; \max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$$

Στο μηδενικό πολυώνυμο δεν επισυνάπτουμε βαθμό.

Παράδειγμα 2.3.2

1. *Το πολυώνυμο t^n έχει βαθμό n: $\deg t^n = n$.*
2. *Το πολυώνυμο $(k, 0, 0, \cdots)$, όπου $k \in \mathbb{K}$, έχει βαθμό 0.*
3. *Αν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, το πολυώνυμο $(1, 0, 4, \sqrt{2}, 3, 0, 0, \cdots)$, έχει βαθμό 4.*

Σχόλιο 2.3.3 *Μπορούμε να ορίσουμε και μια άλλη εσωτερική πράξη στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}[t]$ η οποία είναι γνωστή ως **πολλαπλασιασμός** ή **γινόμενο πολυωνύμων**. Πραγματικά έστω $(a_n)_{n\geq 0}$ και $(b_n)_{n\geq 0}$ δύο πολυώνυμα με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{K}$. Το γινόμενο τους $(a_n)_{n\geq 0} \cdot (b_n)_{n\geq 0}$ ορίζεται να είναι η ακολουθία*

$$(c_n)_{n\geq 0} \qquad \textit{όπου} \qquad c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Περισσότερο αναλυτικά:

$$\begin{aligned}
c_0 &= a_0 b_0 \\
c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\
c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\
&\vdots \\
c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Η ακολουθία $(c_n)_{n\geq 0} = (a_n)_{n\geq 0} \cdot (b_n)_{n\geq 0}$ είναι πολυώνυμο. Πραγματικά αν $a_n = 0$, $\forall n > k$ και $b_n = 0$, $\forall n > l$, τότε όπως είναι φανερό από την τελευταία σχέση όλοι οι όροι της ακολουθίας $(c_n)_{n\geq 0}$ μηδενίζονται μετά τον όρο που βρίσκεται στην $k + l$ θέση.

Επίσης είναι εύκολο να δειχθεί ότι η m-οστή δύναμη t^m της μεταβλητής t δεν είναι παρά το γινόμενο της $t \cdot t \cdot t \cdot \cdots \cdot t$ m φορές. (Να το δειξετε σαν Ασκηση).

Ο συνηθισμένος συμβολισμός πολυωνύμων

Θα δούμε τώρα πως ο παραπάνω ορισμός πολυωνύμων οδηγεί στον συνηθισμένο (διαισθητικό) ορισμό και συμβολισμό πολυωνύμων.

Έστω $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}[t]$ ένα πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{K}$. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό 2.3.3, υπάρχει $m \geq 0$ έτσι ώστε $a_n = 0$, $\forall n > m$. Επομένως το πολυώνυμο $(a_n)_{n\geq 0}$ έχει την μορφή:

$$(a_n)_{n\geq 0} = (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, a_m, 0, 0, \cdots),$$

Χρησιμοποιώντας την μεταβλητή t, και τον ορισμό της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}[t]$ μπορούμε να γράψουμε το πολυώνυμο $(a_n)_{n\geq 0}$ διαδοχικά ως εξής:

$$\begin{aligned}
(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{m-1}, a_m, 0, 0, \cdots) &= \quad (a_0, 0, 0 \cdots) \\
&\quad + (0, a_1, 0, \cdots) \\
&\quad + (0, 0, a_2, 0, \cdots) \\
&\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&\quad + (0, 0, \cdots, 0, a_{m-1}, 0, \cdots) \\
&\quad + (0, 0, \cdots, 0, 0, a_m, 0, \cdots) \\
&= \quad a_0 \cdot (1, 0, 0, \cdots) \\
&\quad + a_1 \cdot (0, 1, 0, \cdots) \\
&\quad + a_2 \cdot (0, 0, 1, 0, \cdots) \\
&\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&\quad + a_{m-1} \cdot (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots) \\
&\quad + a_m \cdot (0, 0, \cdots, 0, 0, 1, 0, \cdots).
\end{aligned}$$

Επομένως θα έχουμε

$$(a_n)_{n\geq 0} = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \cdots + a_{m-1} \cdot t^{m-1} + a_m \cdot t^m \quad (2.6)$$

Η σχέση 2.6 δείχνει ότι ένα πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{K}$ είναι μια τυπική έκφραση της μορφής $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \cdots + a_{m-1} \cdot t^{m-1} + a_m \cdot t^m$ όπου τα a_i είναι αριθμοί από το σώμα $\mathbb{K}$ και m είναι κάποιος φυσικός αριθμός. Δηλαδή έχουμε την γνωστό μας διαισθητικό ορισμό και τρόπο γραφής πολυωνύμου. Η παραπάνω ανάλυση όμως είναι αναγκαία για τον μαθηματικά ακριβή ορισμό τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια. Χάριν απλότητας και ακολουθώντας το οικείο συμβολισμό, από τώρα και στο εξής ένα πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{K}$ θα συμβολίζεται ώς εξής:

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{m-1} t^{m-1} + a_m t^m \tag{2.7}$$

Δηλαδή θα παραλείπουμε το σύμβολο $\cdot$ του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Επιπρόσθετα το γινόμενο δύο πολυωνύμων $P(t)$ και $Q(t)$ θα συμβολίζεται με $P(t)Q(t)$.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να δείξετε ότι αν $P(t), Q(t) \in \mathbb{K}[t]$, τότε:

1. $\deg(P(t) + Q(t)) \leq \min\{\deg P(t), \deg Q(t)\}$.
2. $\deg P(t) = \deg(-P(t))$.
3. $\deg P(t) = 0$ αν-ν το $P(t)$ είναι ένα σταθερό μη-μηδενικό πολυώνυμο.
4. $\deg(P(t)Q(t)) = \deg P(t) + \deg Q(t)$.

2.4 Ασκήσεις

Άσκηση 2.4.1 *Έστω $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε νέες πράξεις ως εξής:*

- *Πρόσθεση: $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$: $x \oplus y := xy$ (ο συνηθισμένος πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών).*
- *Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός: $\forall r \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+$: $r \oplus x := x^r$.*

Να δείξετε ότι με τις παραπάνω πράξεις, το σύνολο $\mathbb{R}_+$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

Άσκηση 2.4.2 *Εφοδιασμένα με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού όπως αυτές ορίσθηκαν στους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$, είναι τα παρακάτω σύνολα διανυσματικοί χώροι; Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.*

1. $\mathcal{V}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0,\, y \in \mathbb{R}\}$.

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

2. $\mathcal{V}_2 = \{(x, 2x+1) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

3. $\mathcal{V}_3 = \{(x, 2x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ *Λάθος*

4. $\mathcal{V}_4 = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ *Λάθος*

5. $\mathcal{V}_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x, y \in \mathbb{R},\ \ z = 1\}$.

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

6. $\mathcal{V}_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y = z\}$.

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ *Λάθος*

7. $\mathcal{V}_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = x + y\}$.

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ *Λάθος*

8. $\mathcal{V}_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xy = 0\}$.

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

Άσκηση 2.4.3 *Να δείξετε ότι με τις συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού πινάκων, το σύνολο $\mathcal{V}$ όλων των 3×3 πινάκων πραγματικών αριθμών της μορφής:*

$$A = \begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$, είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης «Γραμμική Άλγεβρα Ι». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1225.

Σημείωμα Αδειοδότησης