ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Διανυσματικοί Υποχώροι και Κατασκευές

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 3

Διανυσματικοι Υποχωροι και Κατασκευες

Το παρόν Κεφάλαιο θα αφιερωθεί στην μελέτη των ιδιοτήτων διανυσματικών χώρων οι οποίες κληρονομούνται από υποσύνολά τους. Τα υποσύνολα αυτά, τα οποία καλούνται υπόχωροι, είναι επίσης διανυσματικοί χώροι με πράξεις τους περιορισμούς των πράξεων του διανυσματικού χώρου. Επίσης θα μελετήσουμε σημαντικές κατασκευές οι οποίες θα μας επιτρέψουν να παράγουμε νέους διανυσματικούς χώρους από ήδη γνωστούς.

3.1 Διανυσματικοί Υπόχωροι

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε κληρονομικές ιδιότητες διανυσματικών χώρων καθώς και μια άλλη μέθοδο με την οποία μπορούμε να παράγουμε νέους διανυσματικούς χώρους.

Συμβολισμός 3.1.1 *Καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της ενότητας σταθεροποιούμε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του $\mathcal{V}$, θα συμβολίζονται πάντα με $+$ και $\cdot$. Τέλος το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{V}$ θα συμβολίζεται με $\vec{0}$.*

Χάριν ευκολίας όμως από τώρα και στό εξής θα παραλείπουμε το σύμβολο $\cdot$ του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Έτσι ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός του αριθμού $k \in \mathbb{K}$ με το διάνυσμα $\vec{x}$ θα συμβολίζεται με $k\vec{x}$. Δηλαδή: $k \cdot \vec{x} := k\vec{x}$.

Θα χρησιμοποιούμε τα αξιώματα και τις βασικές ιδιότητες διανυσματικών χώρων που αποδείξαμε στις προηγούμενες ενότητες χωρίς περαιτέρω αναφορά.

Έστω $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ ένα μή-κενό υποσύνολο του $\mathcal{V}$, και έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{W}$ και $k \in \mathbb{K}$. Τότε δεν είναι απαραίτητο να ισχύει ότι το διάνυσμα $\vec{x} + \vec{y}$ ή το διάνυσμα $k\vec{x}$

ανήκει στο $\mathcal{W}$. Δηλαδή δεν είναι απαραίτητο το υποσύνολο $\mathcal{W}$ να είναι κλειστό στην πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του $\mathcal{V}$.

Παράδειγμα 3.1.2 *Έστω $\mathbb{R}^2$ ο διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ των 2-άδων πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε το ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$:*

$$\mathcal{W}_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}, \quad \mathcal{W}_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 \geq 0\}$$

Τότε είναι φανερό ότι τα διανύσματα $\vec{x} = (1, 0)$ και $\vec{y} = (0, 1)$ ανήκουν στον $\mathcal{W}_1$, αλλά το διάνυσμα $\vec{x} + \vec{y} = (1, 1)$ δεν ανήκει στο $\mathcal{W}_1$. Επίσης το διάνυσμα $\vec{z} = (1, 1)$ ανήκει στο $\mathcal{W}_2$, αλλά το διάνυσμα $-\vec{x} = (-1, -1)$ δεν ανήκει στο $\mathcal{W}_2$.

Μη-κενά υποσύνολα ένος διανυσματικού χώρου τα οποία είναι κλειστά στην πρόσθεση και στον βαθμωτό πολλαπλασιασμό, όπως θα δούμε, διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο στην θεωρία των διανυσματικών χώρων. Έτσι προκύπτει φυσιολογικά ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 3.1.1 *Έστω $\mathcal{W}$ ένα υποσύνολο του $\mathcal{V}$. Το $\mathcal{W}$ καλείται* **υπόχωρος** *του $\mathcal{V}$ αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες.*

1. $\mathcal{W} \neq \emptyset$.
2. *Το $\mathcal{W}$ είναι κλειστό στην πράξη της πρόσθεσης του $\mathcal{V}$. Δηλαδή:*
$$\boxed{\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{W}: \quad \vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{W}}$$
3. *Το $\mathcal{W}$ είναι κλειστό στην πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του $\mathcal{V}$. Δηλαδή:*
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{K}, \ \forall \vec{x} \in \mathcal{W}: \quad k \cdot \vec{x} \in \mathcal{W}}$$

Πρίν περάσουμε να δούμε παραδείγματα υπόχωρων, θα αποδείξουμε κάποιες βασικές ιδιότητες που κληρονομούν από τους υπερκείμενους διανυσματικούς χώρους, και οι οποίες είναι σχετικά άμεσες συνέπειες του ορισμού 3.1.1.

Λήμμα 3.1.2 *Έστω $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$.*

1. *$\vec{0} \in \mathcal{W}$. Δηλαδή το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{V}$ ανήκει στον $\mathcal{W}$.*
2. *Αν $\vec{x} \in \mathcal{W}$, τότε $-\vec{x} \in \mathcal{W}$. Δηλαδή ο $\mathcal{W}$ περιέχει το αντίθετο κάθε διανύσματος του.*

Απόδειξη: Επειδή το υποσύνολο $\mathcal{W}$ είναι μη-κενό, έπεται ότι υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{W}$. Τότε όμως και $0\vec{x} \in \mathcal{W}$ σύμφωνα με την συνθήκη 3. του ορισμού 3.1.1 . Επειδή $0\vec{x} = \vec{0}$, έχουμε $\vec{0} \in \mathcal{W}$. Αν τώρα $\vec{x} \in \mathcal{W}$, τότε παρόμοια $(-1)\vec{x} \in \mathcal{W}$. Έπειδή $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$, έχουμε ότι $-\vec{x} \in \mathcal{W}$. □

Πρόχειρη Δοκιμασία

1. Να δείξετε ότι ένα μη κενό υποσύνολο $\mathcal{W}$ του $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$ αν-ν $k\vec{x} + l\vec{y} \in \mathcal{W}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{W}$ και $\forall k, l \in \mathbb{K}$.

2. Τι μορφή έχουν οι υπόχωροι ενός σώματος $\mathbb{K}$ όταν το $\mathbb{K}$ θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος πάνω από τον ευατό του;

Οι συνθήκες 2. και 3. του ορισμού 3.1.1 μας επιτρέπουν να περιορίσουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του $\mathcal{V}$ σε κάθε υπόχωρο $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Έτσι ο $\mathcal{W}$ είναι εφοδιασμένος με μια πράξη πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς αν με αυτές τις πράξεις ο $\mathcal{W}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Αυτό πράγματι συμβαίνει:

Λήμμα 3.1.3 *Έστω $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$. Τότε με τις πράξεις του $\mathcal{V}$ ο υπόχωρος $\mathcal{W}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{W}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{W}$ και το αντίθετο ενός διανύσματος $\vec{x}$ του $\mathcal{W}$ είναι το αντίθετο του $\vec{x}$ όταν αυτό θεωρηθεί σαν διάνυσμα του $\mathcal{V}$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση σημειώνοντας ότι είναι άμεση συνέπεια του ορισμού 3.1.1 και του Λήμματος 3.1.2. □

Δοθέντος του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$, τίθεται το ερώτημα αν υπάρχουν πάντοτε υπόχωροι του $\mathcal{V}$, και αν η απάντηση είναι ναι πως μπορούμε να βρούμε υπόχωρους του $\mathcal{V}$; Μια πρώτη απάντηση δίνεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.1.4 1. *Όλος ο χώρος $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$.*

2. *Το σύνολο $\{\vec{0}\}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$.*

3. *Για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{V}$, το υποσύνολο $\langle\vec{x}\rangle := \{k\vec{x} \in \mathcal{V} \mid k \in \mathbb{K}\}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$.*

Απόδειξη: 1., 2. Η απόδειξη είναι προφανής καθώς οι συνθήκες του ορισμού 3.1.1 ικανοποιούνται κατά τετριμμένο τρόπο.

3. Κατ' αρχήν το σύνολο $\langle\vec{x}\rangle$ δεν είναι κενό διότι περιέχει το μηδενικό διάνυσμα: $\vec{0} = 0\vec{x} \in \langle\vec{x}\rangle$. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \langle\vec{x}\rangle$, τότε υπάρχουν $k, l \in \mathbb{K}$, έτσι ώστε:

$\vec{\alpha} = k\vec{x}$ και $\vec{\beta} = l\vec{x}$. Τότε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = k\vec{x} + l\vec{x} = (k+l)\vec{x} \in \langle \vec{x} \rangle$. Τέλος αν $\vec{\alpha} = k\vec{x} \in \langle \vec{x} \rangle$, και $r \in \mathbb{K}$, τότε θα έχουμε: $r\vec{\alpha} = r(k\vec{x}) = (rk)\vec{x} \in \langle \vec{x} \rangle$. □

Σχόλιο 3.1.3 *Ο υπόχωρος $\{\vec{0}\}$ καλείται ο* **μηδενικός υπόχωρος** *του $\mathcal{V}$. Ο υπόχωρος $\{\vec{0}\}$ καλείται και* **τετριμμένος υπόχωρος** *του $\mathcal{V}$. Ένας υπόχωρος $\mathcal{W}$ του $\mathcal{V}$ καλείται* **γνήσιος υπόχωρος**, *αν δεν συμπίπτει με τον $\mathcal{V}$: $\mathcal{W} \subsetneqq \mathcal{V}$.*

Παράδειγμα 3.1.4 *Στο παράδειγμα αυτό θα περιγράψουμε όλους τους υπόχωρους του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ πάνω από το $\mathbb{R}$.*

Έστω $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ με $\mathcal{W} \neq \{\vec{0}\}$. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathcal{W}$ με $(x_1, x_2) \neq (0,0)$. Τότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.1, $r\vec{x} \in \mathcal{W}$, $\forall r \in \mathbb{R}$. Τότε θέτοντας, όπως και στην Πρόταση 3.1.4, $\langle \vec{x} \rangle := \{r\vec{x} \mid r \in \mathbb{R}\}$, έπεται ότι $\langle \vec{x} \rangle \subseteq \mathcal{W}$. Γεωμετρικά το σύνολο $\langle \vec{x} \rangle$ είναι μιά ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο $\mathbb{R}^2$ η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων $\vec{0} = (0,0)$. Υποθέτουμε ότι $\langle \vec{x} \rangle \neq \mathcal{W}$. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathcal{W}$ με $\vec{y} \notin \langle \vec{x} \rangle$. Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει:

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0 \tag{$*$}$$

*Πραγματικά υποθέτουμε ότι $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ και θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Επειδή το διάνυσμα $\vec{x} = (x_1, x_2) \neq (0,0)$, έπεται ότι είτε $x_1 \neq 0$ ή $x_2 \neq 0$. Αν ισχύει $x_1 \neq 0$, τότε επειδή δεχθήκαμε ότι $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$, θα έχουμε $y_2 = \frac{y_1}{x_1} x_2$ και επομένως $\vec{y} = (y_1, y_2) = \frac{y_1}{x_1}(x_1, x_2) \in \langle \vec{x} \rangle$ το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση μας. Αν ισχύει $x_2 \neq 0$, τότε εργαζόμενοι παρόμοια θα έχουμε $\vec{y} = (y_1, y_2) = \frac{y_2}{x_2}(x_1, x_2) \in \langle \vec{x} \rangle$ το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση. Επομένως η σχέση $(*)$ ισχύει. Θα δείξουμε τώρα ότι η σχέση $(*)$ έχει σαν συνέπεια ότι $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$. Πραγματικά: έστω $\vec{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ ένα τυχόν διάνυσμα. Τότε εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ισχύει η σχέση (*ΝΑ ΤΟ ΔΕΙΞΕΤΕ ΣΑΝ ΑΣΚΗΣΗ):

$$\vec{z} = (z_1, z_2) = k\vec{x} + l\vec{y} = k(x_1, x_2) + l(y_1, y_2), \tag{$**$}$$

$$\text{όπου:} \quad k = \frac{z_1 y_2 - z_2 y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \qquad \text{και} \qquad l = \frac{x_1 z_2 - x_2 z_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}$$

Επειδή $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{W}$ και ο $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$, από τον Ορισμό 3.1.1 έπεται ότι (δες και την Πρόχειρη Δοκιμασία 3.1): $\vec{z} = k\vec{x} + l\vec{y} \in \mathcal{W}$. Επομένως το τυχόν διάνυσμα $\vec{z}$ του $\mathbb{R}^2$ ανήκει στο υποσύνολο $\mathcal{W}$ και άρα $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$. Σ' αυτό το συμπέρασμα καταλήξαμε υποθέτοντας ότι $\langle \vec{x} \rangle \neq \mathcal{W}$. Επομένως είτε $\mathcal{W} = \{\vec{0}\}$, ή $\mathcal{W} = \langle \vec{x} \rangle$ ή $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$. Αντίστροφα από την Πρόταση 3.1.4 έχουμε ότι τα σύνολα $\{\vec{0}\}, \mathbb{R}^2$ και τα σύνολα της μορφής $\langle \vec{x} \rangle$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$. Συνοψίζοντας:

$$\boxed{\mathcal{W} \text{ είναι υπόχωρος του } \mathbb{R}^2 \ \Leftrightarrow \ \mathcal{W} = \{\vec{0}\} \text{ ή } \mathcal{W} = \mathbb{R}^2 \text{ ή } \mathcal{W} = \langle \vec{x} \rangle, \text{ όπου } \vec{0} \neq \vec{x} \in \mathcal{W}}$$

Παράδειγμα 3.1.5 *Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ καλείται* **άρτια** *αν $f(-x) = f(x)$ και* **περιττή** *αν $f(-x) = -f(x)$.*

Τότε το σύνολο $\mathcal{F}_A(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των άρτιων και το σύνολο $\mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των περιττών συναρτήσεων είναι υπόχωροι του $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Θα δούμε τώρα μια μέθοδο κατασκευής υπόχωρων ο οποίος καλύπτει πολλά ενδιαφέροντα παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.1.6 *Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$ και έστω $k_1, k_2, \cdots, k_n$ σταθεροί αριθμοί απο το σώμα $\mathbb{K}$. Τότε το σύνολο:*

$$\mathcal{W} := \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n = 0\}$$

είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$. Πραγματικά:

Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0} = (0, 0, \cdots, 0)$ προφανώς ανήκει στο $\mathcal{W}$. Αν $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, \alpha_n)$ και $\vec{\beta} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ είναι δύο στοιχεία του $\mathcal{W}$, τότε $k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n = 0$ και $k_1b_1 + k_2b_2 + \cdots + k_nb_n = 0$. Προσθέτοντας κατά μέλη θα έχουμε $0 = (k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n) + (k_1b_1 + k_2b_2 + \cdots + k_nb_n) = k_1(a_1 + b_1) + k_2(a_2 + b_2) + \cdots + k_n(a_n + b_n)$. Άρα το διάνυσμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)$ ανήκει στο $\mathcal{W}$. Τέλος αν $r \in \mathbb{K}$, και $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathcal{W}$, τότε για το διάνυσμα $r\vec{\alpha} = (ra_1, ra_2, \cdots, ra_n)$ του $\mathbb{K}^n$, θα έχουμε: $k_1(ra_1) + k_2(ra_2) + \cdots + k_n(ra_n) = (k_1r)a_1 + (k_2r)a_2 + \cdots + (k_nr)a_n = r(k_1a_1 + k_2a_2 + \cdots + k_na_n) = r0 = 0$. Άρα $r\vec{\alpha} \in \mathcal{W}$. Επομένως το $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$.

Σχόλιο 3.1.7 *Ο υπόχωρος του Παραδείγματος 3.1.6 περιγράφει το σύνολο λύσεων της εξίσωσης:*

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = 0 \qquad (*)$$

Δηλαδή το σύνολο των n-αδων αριθμών $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ από το σώμα $\mathbb{K}$ οι οποίες ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση. Μια εξίσωση της μορφής $(*)$ καλείται **ομογενής γραμμική εξίσωση** *n αγνώστων $x_1, x_2, \cdots, x_n$ με (σταθερούς) συντελεστές $k_1, k_2, \cdots, k_n$ από το σώμα $\mathbb{K}$.*

Έτσι για παράδειγμα το σύνολο

$$\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2a_1 - 3a_2 + 8a_n + a_4 = 0\}$$

είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ ο οποίος μας περιγράφει το σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης $2x_1 - 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 0$.

Παράδειγμα 3.1.8 *Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}[t]$ των πολυωνύμων πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$, και έστω $n \geq 0$. Τότε το υποσύνολο $\mathbb{K}_n[t]$ των πολυωνύμων με βαθμό $\leq n$, είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}[t]$.*

Θα κλείσουμε την παρούσα ενότητα με κάποια παραδείγματα υπόχωρων του διανυσματικού χώρου $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$.

Έστω $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας.

1. Ο πίνακας A καλείται **συμμετρικός** αν-ν $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j, \leq n$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{S}_{n\times n}(\mathbb{K})$ το υποσύνολο όλων των συμμετρικών πινάκων:

$$\boxed{\mathbb{S}_{n\times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = a_{ji},\ 1 \leq i, j, \leq n\}}$$

2. Ο πίνακας A καλείται **αντισυμμετρικός** αν-ν $a_{ji} = -a_{ij}$, $1 \leq i, j, \leq n$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{A}_{n\times n}(\mathbb{K})$ το υποσύνολο όλων των αντισυμμετρικών πινάκων:

$$\boxed{\mathbb{A}_{n\times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ji} = -a_{ij},\ 1 \leq i, j, \leq n\}}$$

3. Ο πίνακας A καλείται **άνω τριγωνικός** αν-ν $a_{ij} = 0, \forall i, j = 1, 2, \cdots, n$ με $i > j$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{AT}_{n\times n}(\mathbb{K})$ το υποσύνολο όλων των άνω τριγωνικών πινάκων:

$$\boxed{\mathbb{AT}_{n\times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0, \forall i, j = 1, \cdots, n : i > j\}}$$

4. Ο πίνακας A καλείται **κάτω τριγωνικός** αν-ν $a_{ij} = 0, \forall i, j = 1, 2, \cdots, n$ με $i < j$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{KT}_{n\times n}(\mathbb{K})$ το υποσύνολο όλων των άνω τριγωνικών πινάκων:

$$\boxed{\mathbb{KT}_{n\times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0, \forall i, j = 1, \cdots, n : i < j\}}$$

5. Συμβολίζουμε με $\mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{K})$ τα υποσύνολο των διαγωνίων πινάκων και με $\mathbb{B}_{n\times n}(\mathbb{K})$ τα υποσύνολο των βαθμωτών πινάκων:

$$\boxed{\mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ij} = 0\ \forall i, j = 1, \cdots, n :\ \ i \neq j\}}$$

$$\boxed{\mathbb{B}_{n\times n}(\mathbb{K}) := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid a_{ii} = a_{jj}\ \forall i, j = 1, \cdots, n\}}$$

όπως αυτοί ορίσθηκαν στην ενότητα 2.3

Για παράδειγμα για τους πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 4 & 2 & 8 \\ -5 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

έχουμε: $A \in \mathbb{S}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{A}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $C \in \mathbb{AT}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $D \in \mathbb{KT}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να δείξετε ότι τα υποσύνολα

$$\mathbb{D}_{n\times n}(\mathbb{K}),\; \mathbb{B}_{n\times n}(\mathbb{K}),\; \mathbb{S}_{n\times n}(\mathbb{K}),\; \mathbb{A}_{n\times n}(\mathbb{K}),\; \mathbb{AT}_{n\times n}(\mathbb{K}),\; \mathbb{KT}_{n\times n}(\mathbb{K})$$

είναι υπόχωροι του $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

3.2 Γραμμικοί Συνδυασμοί

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε έναν σημαντικό τρόπο κατασκευής υπόχωρων του $\mathcal{V}$. Όπως και πριν από τώρα σταθεροποιούμε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$,

Πρώτα όμως χρειαζόμαστε έναν ορισμό.

Ορισμός 3.2.1 *Έστω $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο διανυσμάτων του χώρου $\mathcal{V}$.* **Γραμμικός συνδιασμός** *του συνόλου S ή των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, καλείται κάθε διάνυσμα του $\mathcal{V}$ το οποίο είναι της μορφής:*

$$k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n, \quad \text{όπου} \quad k_i \in \mathbb{K},\; \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

Τα στοιχεία k_i καλούνται **συντελεστές** *του γραμμικού συνδιασμού. Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδιασμών του συνόλου S ή των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, συμβολίζεται ως εξής: $\langle S\rangle$ ή $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\rangle$. Δηλαδή:*

$$\langle S\rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\rangle := \{k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n \mid k_i \in \mathbb{K},\; \forall i = 1, 2, \cdots, n\}$$

Παράδειγμα 3.2.1 *Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ πάνω από το $\mathbb{R}$, το διάνυσμα*

$$3(1,0,0) + \sqrt{2}(4,3,1) - 7(6,1,0) + (7,8,9)$$

είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{x}_1 = (1,0,0), \vec{x}_2 = (4,3,1), \vec{x}_3 = (6,1,0), \vec{x}_4 = (7,8,9)$ *με αντίστοιχους συντελεστές* $k_1 = 3, k_2 = \sqrt{2}, k_3 = -7, k_4 = 1$. *Παρόμοια στον διανυσματικό χώρο* $\mathbb{C}^2$ *πάνω από το* $\mathbb{C}$, *το διάνυσμα* $i(2,2) - 8(3+5i,-4) + \sqrt{7}(1,-1+i)$ *είναι γραμμικός συνδιασμός των διανυσμάτων* $\vec{x}_1 = (2,2), \vec{x}_2 = (3+5i,-4), \vec{x}_3 = (1,-1+i)$, *με αντίστοιχους συντελεστές* $k_1 = i$, $k_2 = -8$ *και* $k_3 = \sqrt{7}$.

Σχόλιο 3.2.2 *Μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του γραμμικού συνδυασμού άπειρου πλήθους διανυσμάτων ως εξής. Έστω* $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}, \cdots, \}$ *ένα άπειρο σύνολο διανυσμάτων του* $\mathcal{V}$. *Ένας* **γραμμικός συνδυασμός** *του συνόλου* S *ή των διανυσμάτων* $\{\vec{x}_i\}$ *είναι κάθε διάνυσμα του* $\mathcal{V}$ *της μορφής:*

$$k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n + k_{n+1}\vec{x}_{n+1} + \cdots$$

στο οποίο υποθέτουμε ότι το πλήθος των μη-μηδενικών συντελεστών $k_i \in \mathbb{K}$ *είναι πεπερασμένο.*

Παράδειγμα 3.2.3 *Έστω ο διανυσματικός χώρος* $\mathbb{K}[t]$ *των πολυωνύμων με συντελεστές από ένα σώμα* $\mathbb{K}$. *Τότε κάθε διάνυσμα, δηλαδή πολυώνυμο,* $P(t)$ *του* $\mathbb{K}[t]$ *γράφεται ως εξής:* $P(t) = k_0 + k_1t + k_2t^2 + \cdots + k_nt^n$, *όπου* $n \in \mathbb{N}_0$ *και* $k_i \in \mathbb{K}$, $\forall n \geq 0$. *Θέτοντας* $k_m = 0, \forall m > n$, *βλέπουμε ότι το* $P(t)$ *είναι γραμμικός συνδυασμός του απείρου συνόλου διανυσμάτων* $\{1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots\}$.

Επομένως το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών του συνόλου διανυσμάτων $\{1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots\}$ *συμπίπτει με το σύνολο όλων των πολυωνύμων:*

$$\mathbb{K}[t] = \langle 1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots \rangle.$$

Παράδειγμα 3.2.4 *Έστω ο διανυσματικός χώρος* $\mathbb{K}^n$ *πάνω από το σώμα* $\mathbb{K}$. *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του* $\mathbb{K}^n$:

$$\vec{e}_1 := (1,0,0,\cdots,0,0),\ \ \vec{e}_2 := (0,1,0,\cdots,0,0),\ \ \cdots,\ \ \vec{e}_n := (0,0,0,\cdots,0,1)$$

Τότε ισχυριζόμαστε ότι: $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n \rangle = \mathbb{K}^n$. *Πραγματικά αρκεί να δείξουμε ότι κάθε διάνυσμα* $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *του* $\mathbb{K}^n$ *είναι γραμμικός συνδυασμός των* $\{\vec{e}\}_{i=1}^n$. *Αυτό συμβαίνει διότι:*

$$\begin{aligned} \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) &= x_1(1,0,0,\cdots,0,0) + \\ & x_2(0,1,0,\cdots,0,0) + \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & x_n(0,0,0,\cdots,0,1) = \\ &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n. \end{aligned}$$

Τα Παραδείγματα 3.2.3 και 3.2.4 δείχνουν ιδιαίτερα ότι οι γραμμικοί συνδυασμοί $\langle 1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots \rangle$ και $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n \rangle$ είναι διανυσματικοί χώροι καθώς συμπίπτουν με τους $\mathbb{K}[t]$ και $\mathbb{K}^n$ αντίστοιχα. Αυτό δεν είναι τυχαίο όπως δείχνει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.2.2 *Έστω $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων στον $\mathcal{V}$. Τότε το σύνολο $\langle S \rangle = \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \rangle$ όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων του S είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχει το S και έχει την ιδιότητα να είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχει το S.*

Δηλαδή αν $\mathcal{W}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχει το S, τότε $\langle S \rangle \subseteq \mathcal{W}$.

Απόδειξη: Επειδή $\vec{0} = 0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \cdots 0\vec{x}_n$, έπεται ότι $\vec{0} \in \langle S \rangle$ και ιδιαίτερα $\langle S \rangle \neq \emptyset$. Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \langle S \rangle$. Τότε $\vec{\alpha} = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n$ και $\vec{\beta} = l_1\vec{x}_1 + l_2\vec{x}_2 + \cdots + l_n\vec{x}_n$, όπου $k_i, l_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Επομένως $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n) + (l_1\vec{x}_1 + l_2\vec{x}_2 + \cdots + l_n\vec{x}_n) = (k_1 + l_1)\vec{x}_1 + (k_2 + l_2)\vec{x}_2 + \cdots + (k_n + l_n)\vec{x}_n \in \langle S \rangle$. Άρα το $\langle S \rangle$ είναι κλειστό στην πρόσθεση του $\mathcal{V}$. Αν $r \in \mathbb{K}$, τότε $r\vec{\alpha} = r(k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n) = (rk_1)\vec{x}_1 + (rk_2)\vec{x}_2 + \cdots + (rk_n)\vec{x}_n \in \langle S \rangle$. Επομένως το $\langle S \rangle$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$. Επιπρόσθετα ο υπόχωρος $\langle S \rangle$ περιέχει το S διότι για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, έχουμε $\vec{x}_i = 0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \cdots + 0\vec{x}_{i-1} + 1\vec{x}_i + 0\vec{x}_{i+1} + \cdots + 0\vec{x}_n \in \langle S \rangle$. Επομένως $S \subseteq \langle S \rangle$. Έστω τώρα $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$ με $S \subseteq \mathcal{W}$, και έστω $\vec{\alpha} = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n$ ένα τυχόν διάνυσμα του $\langle S \rangle$. Επειδή ο $\mathcal{W}$ περιέχει το S, δηλαδή τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, έπεται εύκολα από τον ορισμό 3.1.1 με χρήση επαγωγής επί του πλήθους n των διανυσμάτων του S, ότι $k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n \in \mathcal{W}$. Δηλαδή $\vec{\alpha} \in \mathcal{W}$. Επομένως $\langle S \rangle \subseteq \mathcal{W}$. □

Ορισμός 3.2.3 *Αν $S \subseteq \mathcal{V}$ είναι ένα (πεπερασμένο) υποσύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$, τότε ο υπόχωρος $\langle S \rangle$ καλείται* **ο υπόχωρος του $\mathcal{V}$ που παράγεται από το** *S.*

Η επόμενη πρόταση, η οποία μας δείχνει κάποιες σημαντικές πράξεις οι οποίες δεν μεταβάλουν τον υπόχωρο που παράγεται από κάποια διανύσματα, θα μας είναι πολύ χρήσιμη σε υπολογισμούς.

Πρόταση 3.2.4 *Έστω $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων σε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

1. $\boxed{(\mathbf{\Sigma\Pi1})}$ *Ο υπόχωρος που παράγεται από το S, δεν αλλάζει αν αλλάξουμε την σειρά των διανυσμάτων $\vec{x}_i$. Δηλαδή, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$:*

$$\boxed{\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle}$$

2. $\boxed{(\mathbf{\Sigma\Pi 2})}$ *Ο υπόχωρος που παράγεται από το S, δεν αλλάζει αν πολλαπλασιάσουμε βαθμωτά ένα από τα $\vec{x}_i$ με ένα μη-μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{K}$. Δηλαδή, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, $\forall k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$:*

$$\boxed{\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_1, \cdots, k\vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle}$$

3. $\boxed{(\mathbf{\Sigma\Pi 3})}$ *Ο υπόχωρος που παράγεται από το S, δεν αλλάζει αν αντικαταστήσουμε ένα από τα διανύσματα $\vec{x}_i$ με ένα διάνυσμα της μορφής $\vec{x}_i + k\vec{x}_j$, όπου $k \neq 0$ και $i \neq j$. Δηλαδή, $\forall i, j = 1, 2, \cdots, n$, $\forall k \in \mathbb{K}$, με $k \neq 0$ και $i \neq j$:*

$$\boxed{\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i + k\vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_n \rangle}$$

Απόδειξη: 1. Προκύπτει άμεσα χρησιμοποιώντας την αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης, δηλαδή το Αξίωμα **(ΔΧ2)**.

2. Έστω $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$. Τότε $\vec{x} = l_1\vec{x}_1 + \cdots + l_i\vec{x}_i + \cdots + l_n\vec{x}_n$. Επειδή $k \neq 0$, η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί και ως εξής: $\vec{x} = l_1\vec{x}_1 + \cdots + (l_i k^{-1})k\vec{x}_i + \cdots + l_n\vec{x}_n$. Αυτή η σχέση δείχνει ότι $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \cdots, k\vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$ και επομένως $\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle \subseteq \langle \vec{x}_1, \cdots, k\vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$. Αντίστροφα αν $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \cdots, k\vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$, τότε $\vec{x} = m_1\vec{x}_1 + \cdots + m_i(k\vec{x}_i) + \cdots + m_n\vec{x}_n$. Η τελευταία σχέση γράφεται $\vec{x} = m_1\vec{x}_1 + \cdots + (m_i k)\vec{x}_i + \cdots + m_n\vec{x}_n$ και αυτό σημαίνει ότι $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$. Άρα $\langle \vec{x}_1, \cdots, k\vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle \subseteq \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$. Επομένως τελικα θα έχουμε $\langle \vec{x}_1, \cdots, k\vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$.

3. Έστω $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$, και επομένως $\vec{x} = l_1\vec{x}_1 + \cdots + l_i\vec{x}_i + \cdots + l_j\vec{x}_j + \cdots + l_n\vec{x}_n$, όπου $l_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα $\vec{x} = l_1\vec{x}_1 + \cdots + l_i(\vec{x}_i + k\vec{x}_j) + \cdots + (l_j - kl_i)\vec{x}_j + \cdots + l_n\vec{x}_n$, δηλαδή προσθέσαμε και αφαιρέσαμε το διάνυσμα $l_i k\vec{x}_j$ στο $\vec{x}$. Η τελευταία σχέση δείχνει ότι $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i + k\vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_n \rangle$ και επομένως $\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle \subseteq \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i + k\vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_n \rangle$. Αντίστροφα έστω $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i + k\vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_n \rangle$, επομένως $\vec{x} = m_1\vec{x}_1 + \cdots + m_i(\vec{x}_i + k\vec{x}_j) + \cdots + m_j\vec{x}_j + \cdots + m_n\vec{x}n$, όπου $m_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Η τελευταία σχέση γράφεται προφανώς $\vec{x} = m_1\vec{x}_1 + \cdots + m_i\vec{x}_i + \cdots + (m_i k + m_j)\vec{x}_j + \cdots + m_n\vec{x}_n$. Αυτό δείχνει ότι $\vec{x} \in \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$ και επομένως $\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i + k\vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_n \rangle \subseteq \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$. Έτσι τελικά θα έχουμε $\langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i + k\vec{x}_j, \cdots, \vec{x}_n \rangle = \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_i, \cdots, \vec{x}_n \rangle$. □

Οι τρεις πράξεις (ΣΠ1), (ΣΠ2), (ΣΠ3) της Πρότασης 3.2.4 καλούνται **στοιχειώδεις πράξεις** μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$.

Ας δούμε με ένα παράδειγμα πως εφαρμόζουμε τις στοιχειώδεις πράξεις.

Παράδειγμα 3.2.5 *Έστω $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ τρία διανύσματα στον $\mathcal{V}$ για τα οποία γνωρίζουμε ότι ικανοποιούν την σχέση $(*)$: $2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 - 4\vec{x}_3 = \vec{0}$. Θα δείξουμε ότι:*

$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = \langle \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle$. *Πραγματικά εκτελώντας διαδοχικά τις στοιχειώδεις πράξεις (ΣΠ2), (ΣΠ3), (ΣΠ2), (ΣΠ1), και λαμβάνοντας υπ' όψιν μας την σχέση* $(*)$, *θα έχουμε:*

$$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = \langle 2\vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = \langle 2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle = \langle 4\vec{x}_3, \vec{x}_2 \rangle = \langle \vec{x}_3, \vec{x}_2 \rangle = \langle \vec{x}_2, \vec{x}_3 \rangle$$

Παράδειγμα 3.2.6 *Θα προσδιορίσουμε τον υπόχωρο του* $\mathbb{R}^3$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα* $\vec{x} = (1,0,1)$ *και* $\vec{y} = (0,2,0)$. *Χρησιμοποιώντας τον ορισμό υπόχωρου έχουμε:*

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle (1,0,1), (0,2,0) \rangle = \{k(1,0,1) + l(0,2,0) \mid k,l \in \mathbb{R}\} =$$
$$\{(k,0,k) + (0,2l,0) \mid k,l \in \mathbb{R}\} = \{(k,2l,k) \mid k,l \in \mathbb{R}\}$$

Έτσι για παράδειγμα το διάνυσμα $(2,2,2)$ *ανήκει στον υπόχωρο* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ *(διαλέγουμε* $k = 2, l = 1$*).*

Παράδειγμα 3.2.7 *Στον διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}^3$ *πάνω από το* $\mathbb{R}$, *θεωρούμε τα διανύσματα:*

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1,0,1), \;\; \vec{\varepsilon}_1 = (0,1,0), \;\; \vec{\varepsilon}_1 = (0,1,1)$$

Θα δείξουμε ότι: $\mathbb{R}^3 = \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, \rangle$.

Ας προσδιορίσουμε πρώτα τον υπόχωρο $\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \rangle$. *Θα έχουμε:*

$$\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \rangle = \{k\varepsilon_1 + l\varepsilon_2 + m\varepsilon_3 \in \mathbb{R}^3 \mid k,l,m \in \mathbb{R}\} =$$
$$\{k(1,0,1) + l(0,1,0) + m(0,1,1) \in \mathbb{R}^3 \mid k,l,m \in \mathbb{R}\} =$$
$$\{(k, l+m, k+m) \in \mathbb{R}^3 \mid k,l,m \in \mathbb{R}\}$$

Επειδή πάντα ισχύει $\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, *αρκεί να δείξουμε ότι κάθε διάνυσμα* $\vec{x} = (x,y,z)$ *του* $\mathbb{R}^3$ *μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσματων* $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$, *δηλαδή είναι της μορφής* $(k, l+m, k+m)$, *για κατάλληλα* $k,l,m \in \mathbb{R}$.

Όμως $\vec{x} = (x,y,z) \in \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \rangle$ *αν-ν υπάρχουν* $k,l,m \in \mathbb{R}$, *έτσι ώστε:* $\vec{x} = (x,y,z) = (k, l+m, k+m)$. *Ισοδύναμα:* $\vec{x} = (x,y,z) \in \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \rangle$ *αν-ν το σύστημα*

$$k = x, \;\; y = l + m, \;\; z = k + m$$

με αγνώστους τα k,l,m *έχει λύση ως πρός* x,y,z. *Αφαιρώντας την τρίτη από την δεύτερη εξίσωση, έχουμε* $y - z = l - k$. *Αν στην τελευταία προσθέσουμε την πρώτη έχουμε* $x + y - z = l$. *Άρα* $m = y - l = y - (x + y - z) = z - x$. *Επομένως:* $k = x, l = x+y-z, m = z-x$, *δηλαδή το παραπάνω σύστημα έχει λύση. Συνοψίζοντας το τυχόν διάνυσμα* $\vec{x} = (x,y,z)$ *γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των* $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$ *ως εξής:*

$$\vec{x} = (x,y,z) = x\vec{\varepsilon}_1 + (x+y-z)\vec{\varepsilon}_2 + (z-x)\vec{\varepsilon}_3$$

Επομένως: $\langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Στον $\mathbb{R}^3$ θεωρούμε τα διανύσματα:

$$\vec{x} = (1,1,0),\ \ \vec{y} = (0,0,1),\ \ \vec{z} = (1,1,1),\ \ \vec{w} = (-1,-1,1).$$

Να δείξετε ότι: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle$.

Παράδειγμα 3.2.8 *Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}[t]$ των πολυωνύμων πάνω από το $\mathbb{K}$. Έστω $n \in \mathbb{N}_0$ ένας σταθερός φυσικός αριθμός και θεωρούμε τα διανύσματα $\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ του $\mathbb{K}[t]$.*

Τότε ο υπόχωρος του $\mathbb{K}[t]$ που παράγεται από τα διανύσματα $\{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ συμπίπτει με το σύνολο όλων των πολυωνύμων με βαθμό μικρότερο ή ίσο με n μαζί με το μηδενικό πολυώνυμο 0 (το οποίο υπενθυμίζουμε δεν έχει βαθμό):

$$\langle 1, t, t^2, \cdots, t^n \rangle = \{P(t) \in \mathbb{K}[t] \mid \deg P(t) \leq n\} \cup \{0\}$$

Τον υπόχωρο αυτόν τον συμβολίζουμε με $\mathbb{K}_n[t]$. Έτσι από τώρα και στο εξής $\mathbb{K}_n[t]$ θα συμβολίζει τον **υπόχωρο** *του $\mathbb{K}[t]$* **όλων των πολυωνύμων με βαθμό** $\leq n$.

Μια ενδιαφέρουσα περίπτωση, την οποία θα αναλύσουμε διεξοδικά στο επόμενο Κεφάλαιο, είναι αυτή κατά την οποία ο υπόχωρος που παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων συμπίπτει με όλον το χώρο $\mathcal{V}$. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 3.2.5 *Ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}$ πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$ καλείται* **πεπερασμένα παραγόμενος**, *αν υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο διανυσμάτων $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ του $\mathcal{V}$, έτσι ώστε $\mathcal{V} = \langle S \rangle$. Σ' αυτή την περίπτωση τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$ καλούνται* **γεννήτορες** *του $\mathcal{V}$ και το σύνολο S καλείται* **σύνολο γεννητόρων** *του $\mathcal{V}$.*

Άμεση συνέπεια του ορισμού 3.2.5 είναι το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.2.6 *Έστω $\mathcal{V}$ ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$ με σύνολο γεννητόρων $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$. Τότε κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathcal{V}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του S.*

Δηλαδή υπάρχουν στοιχεία $k_1, k_2, \cdots, k_n$ από το σώμα $\mathbb{K}$, έτσι ώστε: $\vec{x} = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n$.

Παράδειγμα 3.2.9 *1. Από το Παράδειγμα 3.2.4 έπεται ότι διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}^n$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος με σύνολο γεννητόρων το σύνολο $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$, δηλαδή:*

$$\boxed{\mathbb{K}^n = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n \rangle}$$

όπου $\vec{e}_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$ είναι το διάνυσμα που έχει 1 στην i-συντεταγμένη και παντού αλλού 0.

2. *Από το Παράδειγμα 3.2.8 έπεται ότι διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}_n[t]$ των πολυωνύμων με βαθμό $\leq n$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος με σύνολο γεννητόρων το σύνολο $S = \{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$, δηλαδή $\mathbb{K}_n[t] = \langle 1, t, t^2, \cdots, t^n \rangle$.*

3. *Το σύνολο $\{1, i\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}$ πάνω από το $\mathbb{R}$, και επομένως το $\mathbb{C}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος πάνω από το $\mathbb{R}$.*

Σχόλιο 3.2.10 *1. Η έννοια του πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου εξαρτάται από το σώμα $\mathbb{K}$ επί του οποίου είναι ορισμένος ο χώρος. Πραγματικά έχουμε ήδη δεί ότι το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ αλλά και πάνω από το το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών. Τότε ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος πάνω από το $\mathbb{R}$ με σύνολο γεννητόρων $S = \{1\}$ (αυτό ισχύει διότι $\forall r \in \mathbb{R} : r = r1$). Μπορεί όμως να δειχθεί ότι το $\mathbb{R}$ θεωρούμενος σαν διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{Q}$ <u>δεν</u> έχει πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων.*

2. Ένας διανυσματικός χώρος έχει γενικά άπειρα το πλήθος σύνολα γεννητόρων. Για παράδειγμα το $\{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$ είναι σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ πάνω από το $\mathbb{R}$, όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.2.4. Αν $k \in \mathbb{R}$ και $k \neq 0$, τότε και το σύνολο $\{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{\varepsilon} = (0, k)\}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{R}^2$ (να το δειξετε σαν Ασκηση).

Εφαρμογή 3.2.11 *Θα προσδιορίσουμε ένα σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{W}$ των λύσεων της ομογενούς γραμμικής εξίσωσης:*

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n = 0 \qquad (*)$$

ο οποίος ορίσθηκε στο Παράδειγμα 3.1.6.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) $k_i = 0, \forall i = 1, 2, \cdots, n$. Τότε κάθε διάνυσμα $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ ικανοποιεί την $(*)$ και άρα $\mathcal{W} = \mathbb{K}^n$ για τον οποίο βρήκαμε ένα σύνολο γεννητόρων στο Παράδειγμα 3.2.4.

(β) Έστω ότι κάποιο (τουλάχιστον ένα) $k_i \neq 0$. Τότε εργαζόμαστε ώς εξής: Πολλαπλασιάζοντας την $(*)$ με το k_i^{-1} θα έχουμε την εξίσωση

$$\frac{k_1}{k_i}x_1 + \frac{k_2}{k_i}x_2 + \cdots + \frac{k_{i-1}}{k_i}x_{i-1} + x_i + \frac{k_{i+1}}{k_i}x_{i+1} + \cdots + \frac{k_n}{k_i}x_n = 0 \qquad (**)$$

η οποία προφανώς είναι ισοδύναμη (δηλαδή έχει το ίδιο σύνολο λύσεων με την $(*)$). Από την εξίσωση $(**)$ βλέπουμε ότι, εάν θέσουμε

$$l_1 := -\frac{k_1}{k_i},\ l_2 := -\frac{k_2}{k_i}, \cdots, l_{i-1} := -\frac{k_{i-1}}{k_i}, l_{i+1} := -\frac{k_{i+1}}{k_i}, \cdots, l_n := -\frac{k_n}{k_i}$$

τότε θα έχουμε την εξίσωση:

$$x_i = l_1x_1 + l_2x_2 + \cdots + l_{i-1}x_{i-1} + l_{i+1}x_{i+1} + \cdots + l_nx_n \qquad (\dagger)$$

η οποία είναι προφανώς ισοδύναμη με την $(**)$, άρα και με την $(*)$. Έστω τώρα $\vec{\alpha}$ μια λύση της $(*)$, δηλαδή μια n-άδα $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ έτσι ώστε: $k_1a_i + k_1a_2 + \cdots + k_na_n = 0$. Χρησιμοποιώντας ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ικανοποιεί και τις ισοδύναμες εξισώσεις $(**)$, $(\dagger)$, θα έχουμε:

$$a_i = l_1a_1 + l_2a_2 + \cdots + l_{i-1}a_{i-1} + l_{i+1}a_{i+1} + \cdots + l_na_n \qquad (\dagger\dagger)$$

και επομένως:

$$\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \cdots, a_n) =$$
$$(\alpha_1, \cdots, a_{i-1}, l_1a_1 + l_2a_2 + \cdots + l_{i-1}a_{i-1} + l_{i+1}a_{i+1} + \cdots + l_na_n, a_{i+1}, \cdots, a_n) =$$
$$a_1(1, 0, \cdots, 0, l_1, 0, \cdots, 0) + a_2(0, 1, \cdots, 0, l_2, 0, \cdots, 0) +$$
$$\cdots + a_{i-1}(0, 0, \cdots, 1, l_{i-1}, 0, \cdots, 0) + a_{i+1}(0, 0, \cdots, 0, l_{i+1}, 1, \cdots, 0) +$$
$$a_n(0, 0, \cdots, 0, l_n, 0, \cdots, 1)$$

Δηλαδή η τυχούσα λύση $\vec{\alpha}$ του συστήματος $(*)$, είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων:

$$\vec{\lambda}_1 := (1, 0, \cdots, 0, l_1, 0, \cdots, 0),\ \cdots,\ \vec{\lambda}_{i-1} := (0, 0, \cdots, 1, l_{i-1}, 0, \cdots, 0),\ \cdots$$
$$\vec{\lambda}_{i+1} := (0, 0, \cdots, 0, l_{i+1}, 1, \cdots, 0),\ \cdots,\ \vec{\lambda}_n := (0, 0, \cdots, 0, l_n, 0, \cdots, 1)$$

όπου οι αριθμοί $l_j, \forall j \neq i$, εμφανίζονται στην i-συντεταγμένη. Άρα θα έχουμε $\vec{\alpha} \in \langle \vec{\lambda}_1, \cdots, \vec{\lambda}_n \rangle$ και επομένως $\mathcal{W} \subseteq \langle \vec{\lambda}_1, \cdots, \vec{\lambda}_n \rangle$. Αντίστροφα από τις σχέσεις $l_j = -\frac{k_j}{k_i}$, $\forall j \neq i$, βλέπουμε εύκολα ότι τα διανύσματα $\vec{\lambda}_j$, $\forall j \neq i$, είναι λύσεις του $(*)$ και επομένως ανήκουν στο $\mathcal{W}$. Επειδή, σύμφωνα με το Παράδειγμα 3.1.6, το $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$, έπεται ότι $\langle \vec{\lambda}_1, \cdots, \vec{\lambda}_n \rangle \subseteq \mathcal{W}$. Συνοψίζοντας τη παραπάνω ανάλυση, θα έχουμε:

$$\boxed{\mathcal{W} \ = \ \left\langle \vec{\lambda}_1, \cdots, \vec{\lambda}_{i-1}, \vec{\lambda}_{i+1}, \cdots, \vec{\lambda}_n \right\rangle}$$

3.3 Τομή και Άθροισμα Υπόχωρων

Στην παρούσα ενότητα θα ορίσουμε και μελετήσουμε δύο ενδιαφέροντες μεθόδους κατασκευής υπόχωρων. Αυτές οι μέθοδοι σχετίζονται με γνωστές μας συνολοθεωρητικές κατασκευές και ανακύπτουν από το γενικό ερώτημα αν η έννοια του υπόχωρου παραμένει αναλλοίωτη κάτω από διάφορες συνολοθεωρητικές κατασκευές όπως η τομή ή η ένωση.

3.3.1 Τομή Υπόχωρων

Είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς αν η τομή δύο υπόχωρων είναι υπόχωρος. Η απάντηση είναι θετική όπως μας δείχνει η ακόλουθη γενική πρόταση.

Πρόταση 3.3.1 *Έστω $\{\mathcal{W}_i \mid i \in I\}$ μια συλλογή υπόχωρων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$, όπου I είναι ένα (πεπερασμένο ή άπειρο) σύνολο δεικτών. Τότε η τομή των υπόχωρων*

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{W}_i := \{\vec{x} \in \mathcal{V} \mid \vec{x} \in \mathcal{W}_i, \forall i \in I\}$$

είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$.

Απόδειξη: Από το Λήμμα 3.1.2 έπεται ότι κάθε υπόχωρος του $\mathcal{V}$ περιέχει το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ του $\mathcal{V}$. Άρα $\vec{0} \in \mathcal{W}_i$, $\forall \in I$, και επομένως $\vec{0} \in \cap_{i\in I}\mathcal{W}_i$. Ιδιαίτερα $\cap_{i\in I}\mathcal{W}_i \neq \emptyset$. Έστω $\vec{x}, \vec{y}$ δύο διανύσματα τα οποία ανήκουν στην τομή $\cap_{i\in I}\mathcal{W}_i$. Τότε $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{W}_i$, $\forall i \in I$. Επειδή, $\forall i \in I$, το υποσύνολο $\mathcal{W}_i$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$, έπεται ότι $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{W}_i$, $\forall i \in I$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\vec{x} + \vec{y} \in \cap_{i\in I}\mathcal{W}_i$ και επομένως το υποσύνολο $\cap_{i\in I}\mathcal{W}_i$ είναι κλειστό στην πράξη της πρόσθεσης. Τέλος αν $k \in \mathbb{K}$ και $\vec{x} \in \cap_{i\in I}\mathcal{W}_i$, τότε $\vec{x} \in \mathcal{W}_i$, $\forall i \in I$. Επειδή $\forall i \in I$, το υποσύνολο $\mathcal{W}_i$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$, έπεται ότι $k\vec{x} \in \mathcal{W}_i$, $\forall i \in I$. Τότε όπως και παραπάνω θα έχουμε $k\vec{x} \in \cap_{i\in I}\mathcal{W}_i$. Δηλαδή το υποσύνολο $\cap_{i\in I}\mathcal{W}_i$ είναι κλειστό στην πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού και επομένως είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$. □

Είδαμε στην Πρόταση 3.2.2 ότι, αν $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{V}$, τότε το σύνολο $\langle S\rangle$ όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων του S είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχει το S. Η επόμενη Πρόταση δείχνει την σχέση μεταξύ των Προτάσεων 3.2.2 και 3.3.1.

Πρόταση 3.3.2 *Έστω $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα υποσύνολο διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$. Τότε ο υπόχωρος $\langle S\rangle$ που παράγεται από το S συμπίπτει* *με την τομή όλων των υπόχωρων του $\mathcal{V}$ που περιέχουν το S:*

$$\langle S \rangle = \bigcap \{ \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V} \mid \text{ο } \mathcal{W} \text{ είναι υπόχωρος του } \mathcal{V} \text{ με } S \subseteq \mathcal{W} \}$$

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{Z}$ το υποσύνολο στο δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης. Από την Πρόταση 3.2.2 έπεται ότι ο υπόχωρος $\langle S \rangle$ περιέχεται σε κάθε υπόχωρο $\mathcal{W}$ του $\mathcal{V}$ με $S \subseteq \mathcal{W}$. Άρα ο υπόχωρος $\langle S \rangle$ θα περιέχεται και στην τομή τους, και επομένως $\langle S \rangle \subseteq \mathcal{Z}$. Από την άλλη πλευρά το σύνολο $\langle S \rangle$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$ που περιέχει το S και άρα είναι κάποιος από τους υπόχωρους $\mathcal{W}$ που εμφανίζονται στην τομή $\mathcal{Z}$. Αυτό όμως έχει σαν συνέπεια ότι $\mathcal{Z} \subseteq \langle S \rangle$. Επομένως $\langle S \rangle = \mathcal{Z}$. □

Θα δούμε τώρα μια εφαρμογή της θεωρίας η οποία θα μας είναι χρήσιμη στην θεωρία των γραμμικών συστημάτων που θα αναπτύξουμε αργότερα.

Εφαρμογή 3.3.1 *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και έστω οι m το πλήθος ομογενείς γραμμικές εξισώσεις με n αγνώστους $x_1, x_2, \cdots, x_n$ και συντελεστές a_{ij}, $1 \leq m$, $1 \leq j \leq n$, από το σώμα $\mathbb{K}$:*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \qquad (\Sigma_1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \qquad (\Sigma_2)$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \qquad (\Sigma_m)$$

Ένα τέτοιο σύνολο γραμμικών εξισώσεων καλείται **ομογενές γραμμικό σύστημα** *m-εξισώσεων με n-αγνώστους και θα το συμβολίζουμε με (Σ). Ένα διάνυσμα $\vec{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ καλείται* **λύση** *του (Σ), αν το $\vec{\alpha}$ είναι λύση ταυτόχρονα όλων των εξισώσεων $(\Sigma_1), (\Sigma_2), \cdots, (\Sigma_m)$ του (Σ).*

Ισχυρισμός: Το σύνολο λύσεων, έστω Λ, του (Σ) είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$. Πραγματικά, έστω Λ_i, $i = 1, 2, \cdots, m$, το σύνολο λύσεων της ομογενούς εξίσωσης (Σ_i). Από το Παράδειγμα 3.1.6 έπεται ότι το Λ_i είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$. Επειδή προφανώς ισχύει $\Lambda = \Lambda_1 \cap \Lambda_2 \cap \cdots \cap \Lambda_n$, από την Πρόταση 3.3.1 θα έχουμε ότι το Λ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$.

3.3.2 Άθροισμα και Ευθύ Άθροισμα Υπόχωρων

Στην παρούσα υποενότητα θα δούμε μια διαφορετική μέθοδο κατασκευής υπόχωρων η οποία θα μας είναι χρήσιμη αργότερα στην "ανάλυση" ενός διανυσματικού χώρου σε απλούστερους διανυσματικούς (υπό)χωρους.

Όπως πριν σταθεροποιούμε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ πάνω απο ένα σώμα $\mathbb{K}$.

Έχουμε ήδη δει στην Πρόταση 3.3.1 ότι η τομή (πεπερασμένου ή άπειρου) πλήθους υπόχωρων του $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$. Επιπρόσθετα η τομή είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχεται σε όλους του υπόχωρους. Κάτι αντίστοιχο δεν ισχύει για την ένωση υπόχωρων όπως δειχνει η ακολουθη πρόταση.

Πρόταση 3.3.3 *Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{V}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η ένωση $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$.*

2. *Είτε $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$ ή $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1$.*

Απόδειξη: 2. $\Rightarrow$ 1. Αν $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$, τότε προφανώς $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_2$ και αν $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1$, τότε προφανώς $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1$. Έτσι σε κάθε περίπτωση η ένωση είναι υπόχωρος.

1. $\Rightarrow$ 2. Υποθέτουμε ότι η ένωση $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$ και έστω ότι ο $\mathcal{W}_1$ δεν περιέχεται στον $\mathcal{W}_2$, δηλαδή $\mathcal{W}_1 \not\subseteq \mathcal{W}_2$. Θα δείξουμε ότι αναγκαστικά ισχύει $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1$. Επειδή υποθέσαμε ότι $\mathcal{W}_1 \not\subseteq \mathcal{W}_2$, έπεται ότι υπάρχει (τουλάχιστον ένα) διάνυσμα $\vec{x}_0 \in \mathcal{W}_1$ με $\vec{x} \notin \mathcal{W}_2$. Έστω τώρα ένα τυχόν διάνυσμα $\vec{y} \in \mathcal{W}_2$. Επειδή τα $\vec{x}_0, \vec{y}$ ανήκουν προφανώς στην ένωση $\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$ η οποία είναι υπόχωρος, έπεται ότι $\vec{x}_0 + \vec{y} \in \mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2$. Αυτό σημαίνει ότι είτε $\vec{x}_0 + \vec{y} \in \mathcal{W}_1$ ή $\vec{x}_0 + \vec{y} \in \mathcal{W}_2$. Αν $\vec{x}_0 + \vec{y} \in \mathcal{W}_2$, τότε επειδή $\vec{y} \in \mathcal{W}_2$ και ο $\mathcal{W}_2$ είναι υπόχωρος, έπεται ότι $(\vec{x}_0 + \vec{y}) - \vec{y} = \vec{x}_0 \in \mathcal{W}_2$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι $\vec{x}_0 \notin \mathcal{W}_2$. Άρα $\vec{x}_0 + \vec{y} \in \mathcal{W}_1$, και τότε επειδή $\vec{x}_0 \in \mathcal{W}_1$ και ο $\mathcal{W}_1$ είναι υπόχωρος, έπεται ότι $(\vec{x}_0 + \vec{y}) - \vec{x}_0 = \vec{y} \in \mathcal{W}_1$. Επομένως δείξαμε ότι το τυχόν διάνυσμα $\vec{y}$ του $\mathcal{W}_2$ ανήκει στον $\mathcal{W}_1$, δηλαδή $\mathcal{W}_2 \subseteq \mathcal{W}_1$.

Αν $\mathcal{W}_2 \not\subseteq \mathcal{W}_1$, τότε εργαζόμενοι παρόμοια, θα έχουμε $\mathcal{W}_1 \subseteq \mathcal{W}_2$. □

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να βρεθεί συγκεκριμένο παράδειγμα δύο υπόχωρων $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ έτσι ώστε η ένωση $\mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_1$ να μην είναι υπόχωρος.

(Υπόδειξη: Θεωρείστε στο καρτεσιανό επίπεδο $\mathbb{R}^2$ δύο διαφορετικές ευθείες οι οποίες διέρχονται από την αρχη των αξόνων $(0, 0)$.)

Η Προταση 3.3.3 μας οδηγεί στο να αναζητήσουμε τον μικρότερο υπόχωρο του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχει κάποιους δεδομένους υπόχωρους του. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.3.4 *Έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$ ένα πεπερασμένο σύνολο υπόχωρων του $\mathcal{V}$. Το* **άθροισμα** *των υπόχωρων $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$ ορίζεται να είναι το ακόλουθο υποσύνολο του $\mathcal{V}$:*

$$\boxed{\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n := \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_n \mid \vec{x}_i \in \mathcal{W}_i, \ \forall i = 1, 2, \cdots, n\}}$$

Σημειώνουμε ότι το πρώτο μέλος της παραπάνω σχέσης είναι απλά ένας συμβολισμός καθώς η πράξη πρόσθεσης $+$ του $\mathcal{V}$ έχει ορισθεί σε στοιχεία του $\mathcal{V}$ και όχι σε υποσύνολα του.

Η επόμενη πρόταση δικαιολογεί την εισαγωγή της έννοιας του αθροίσματος υπόχωρων.

Πρόταση 3.3.5 *Το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ πεπερασμένου πλήθους υπόχωρων $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$ του $\mathcal{V}$, είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχει όλους τους υπόχωρους $\mathcal{W}_i$. Επιπρόσθετα το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχει τους υπόχωρους $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$.*

Δηλαδή αν $\mathcal{W}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$ έτσι ώστε $\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{W}, \forall i = 1, 2, \cdots, n$, τότε $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n \subseteq \mathcal{W}$.

Απόδειξη: Έχουμε δείξει στο Λήμμα 3.1.2 ότι το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$ του $\mathcal{V}$ ανήκει σε κάθε υπόχωρο, άρα και σε κάθε έναν από τους $\mathcal{W}_i$. Επειδή $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} + \cdots + \vec{0}$, έπεται ότι $\vec{0} \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ και ιδιαίτερα το τελευταίο σύνολο δεν είναι κενό. Έστω τώρα $\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n$ και $\vec{y} = \vec{y}_1 + \cdots + \vec{y}_n$ δύο διανύσματα του $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$. Τότε χρησιμοποιώντας την προσεταιριστικότητα και αντιμεταθετικότητα της πρόσθεσης (Αξιώματα **(ΔΧ1)**, **(ΔΧ2)**), θα έχουμε: $\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n) + (\vec{y}_1 + \cdots + \vec{y}_n) = (\vec{x}_1 + \vec{y}_1) + \cdots + (\vec{x}_n + \vec{y}_n)$. Επειδή οι $\mathcal{W}_i$ είναι υπόχωροι του $\mathcal{V}$ και $\vec{x}_i, \vec{y}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$, έπεται ότι $\vec{x}_i + \vec{y}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Επομένως $\vec{x} + \vec{y} \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$. Αν $k \in \mathbb{K}$ και $\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$, τότε $k\vec{x} = k(\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n) = k\vec{x}_1 + \cdots + k\vec{x}_n$. Επειδή οι $\mathcal{W}_i$ είναι υπόχωροι του $\mathcal{V}$ και $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$, έπεται ότι $k\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Τότε όμως $k\vec{x} \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$. Επομένως το σύνολο $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ είναι ενας υπόχωρος του $\mathcal{V}$.

Για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, έστω $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i$. Τότε επειδή, σύμφωνα με το Αξίωμα **(ΔΧ3)**, έχουμε $\vec{x}_i = \vec{0} + \cdots + \vec{0} + \vec{x}_i + \vec{0} + \cdots + \vec{0}$ και επειδή $\vec{0} \in \mathcal{W}_i$, έπεται ότι $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$. Επομένως θα έχουμε $\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$. Έστω τώρα $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$ με την ιδιότητα $\mathcal{W}_i \subseteq \mathcal{W}$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$. Επειδή ο $\mathcal{W}$ είναι κλειστός στην πράξη της πρόσθέσης και περιέχει κάθε διάνυσμα $\vec{x}_i$, με $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, έπεται οτι θα περιέχει και το άθροισμα τους $\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n$. Με άλλα λόγια θα περιέχει κάθε διάνυσμα του $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ και επομένως $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n \subseteq \mathcal{W}$. □

Σχόλιο 3.3.2 *1. Μπορούμε να ορίσουμε και το άθροισμα άπειρου πλήθους υπόχωρων του $\mathcal{V}$ ως εξής: Έστω $\{\mathcal{W}_i \mid i \in I\}$ μιά συλλογή υπόχωρων του $\mathcal{V}$, όπου I είναι ένα άπειρο σύνολο δεικτών. Τότε το άθροισμα του απείρου πλήθους υπόχωρων $\mathcal{W}_i$ ορίζεται να είναι το υποσύνολο του $\mathcal{V}$:*

$$\sum_{i\in I} \mathcal{W}_i := \Big\{ \sum_{i\in I} \vec{x}_i \;\in\; \mathcal{V} \;\mid\; \vec{x}_i \in \mathcal{W}_i \;\; \textit{και} \;\; \vec{x}_i = \vec{0},$$

$$\forall i \in I \;\; \textit{εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο δεικτών} \Big\}$$

Όπως και στην Πρόταση 3.3.5 μπορεί κανείς να δειξει ότι το υποσύνολο $\sum_{i\in I} \mathcal{W}_i$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$ ο οποίος περιέχει τους $\mathcal{W}_i$ και είναι ο μικρότερος υπόχωρος του $\mathcal{V}$ με αυτή την ιδιότητα.

2. Από την Πρόταση 3.3.5 προκύπτει άμεσα ότι $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n = \langle \cup_{i=1}^n \mathcal{W}_i \rangle$, δηλαδή το άθροισμα των υπόχωρων συμπίπτει με τον υπόχωρο που παράγεται από την ένωση των υπόχωρων $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$.

Όπως θα δούμε αργότερα η πλέον ενδιαφέρουσα περίπτωση, όταν έχουμε να μελετήσουμε ένα άθροισμα υπόχωρων, είναι το άθροισμα αυτό να είναι ευθύ με την έννοια του ακόλουθου ορισμού.

Ορισμός 3.3.6 *Έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$ ένα πεπερασμένο σύνολο υπόχωρων του $\mathcal{V}$. Το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ των υπόχωρων $\mathcal{W}_i$ καλείται* **ευθύ άθροισμα***, αν ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

$$\boxed{\mathcal{W}_i \cap (\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_{i+1} + \cdots + \mathcal{W}_n) = \{\vec{0}\}, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n}$$

Δηλαδή αν η τομή καθενός από τους υπόχωρους $\mathcal{W}_i$ με το άθροισμα των υπολοίπων είναι ο μηδενικός υπόχωρος.

Αν το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ είναι ευθύ, θα το συμβολίζουμε με:

$$\boxed{\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_n}$$

Παρατήρηση 3.3.7 *Αν έχουμε δύο υπόχωρους $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$, τότε από τον ορισμό 3.3.6 προκύπτει άμεσα ότι το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ είναι ευθύ, δηλαδή έχουμε $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$, αν-ν $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{\vec{0}\}$.*

Θα δούμε τώρα δύο παραδείγματα στα οποία το άθροισμα δυο υπόχωρων είναι ευθύ και συμπίπτει με όλον τον διανυσματικό χώρο. Αν και διαφορετικής φύσης και τα δύο βασίζονται πάνω στην ίδια ιδέα.

Παράδειγμα 3.3.3 *Στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, θεωρούμε τον υπόχωρο $\mathcal{F}_A(\mathbb{R},\mathbb{R})$ των άρτιων συναρτήσεων και τον υπόχωρο $\mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R},\mathbb{R})$ των περιττών συναρτήσεων. Θα δείξουμε ότι*

$$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{F}_A(\mathbb{R},\mathbb{R}) \oplus \mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια τυχούσα συνάρτηση. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες ορίζονται ως εξής:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad g(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \textit{και} \quad h(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Τότε $g(-x) = \frac{1}{2}[f(-x)+f(x)] = g(x)$ και $h(-x) = \frac{1}{2}[f(-x)-f(x)] = -\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)] = -h(x)$. Άρα η g είναι άρτια και η h είναι περιττή. Από την άλλη πλευρά $g(x)+h(x) = \frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x)-f(-x)] = f(x)$. Δηλαδή η τυχούσα συνάρτηση f είναι άθροισμα μίας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{F}_A(\mathbb{R},\mathbb{R})+\mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R},\mathbb{R})$ είναι όλος ο χώρος: $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathcal{F}_A(\mathbb{R},\mathbb{R}) + \mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Επομένως για να δείξουμε την ζητούμενη σχέση, αρκεί, σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.3.7, να δειξουμε ότι $\mathcal{F}_A(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{\vec{0}\}$ όπου $\vec{0}$ είναι η μηδενική συνάρτηση $\vec{0}(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Έστω $f \in \mathcal{F}_A(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R},\mathbb{R})$, δηλαδή η f είναι ταυτόχρονα άρτια και περιττή. Τότε, $\forall x \in \mathbb{R}$, θα έχουμε: $f(-x) = f(x) = -f(x)$. Δηλαδή $2f(x) = 0$ και επομένως $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι $f = \vec{0}$. Επομένως $\mathcal{F}_A(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}_\Pi(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{\vec{0}\}$.

Παράδειγμα 3.3.4 *Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ των τετραγωνικών $n \times n$-πινάκων πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$, θεωρούμε τον υπόχωρο $\mathbb{S}_{n\times n}(\mathbb{K})$ των συμμετρικών πινάκων και τον υπόχωρο $\mathbb{A}_{n\times n}(\mathbb{K})$ των αντισυμμετρικών πινάκων, βλέπε την Πρόχειρη δοκιμασία στο τελος της ενότητας 3.1.*

Πρόχειρη Δοκιμασία

Ακολουθώντας την ιδέα του Παραδείγματος 3.3.3 να δείξετε ότι:

$$\boxed{\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) = \mathbb{S}_{n\times n}(\mathbb{K}) \oplus \mathbb{A}_{n\times n}(\mathbb{K})}$$

Θα δούμε τώρα έναν σημαντικό χαρακτηρισμό του ευθέως αθροίσματος υπόχωρων. Πρώτα όμως χρειαζόμαστε έναν ορισμό:

Ορισμός 3.3.8 *1. Έστω $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$. Ένα διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathcal{V}$ (το οποίο υποθέτουμε ότι ανήκει* *στον υπόχωρο $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n \rangle$), θα λέμε ότι* **γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων** $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$*, αν:*

$$\boxed{\vec{x} = k_1\vec{x}_1 + \cdots + k_n\vec{x}_n = l_1\vec{x}_1 + \cdots + l_n\vec{x}_n \implies k_i = l_i, \ \forall i = 1, 2, \cdots, n}$$

Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι το διάνυσμα $\vec{x}$ έχει **μοναδικότητα γραφής ως προς τα διανύσματα** $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$.

2. Έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$ n το πλήθος υπόχωροι του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$. Ένα διάνυσμα $\vec{x}$ το οποίο ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$, θα λέμε ότι **γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν άθροισμα διανυσμάτων των υπόχωρων** $\mathcal{W}_i$*, αν:*

$$\text{Αν } \vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n \ \text{ και } \vec{x} = \vec{y}_1 + \cdots + \vec{y}_n, \ \text{ όπου } \vec{x}_i, \vec{y}_i \in \mathcal{W}_i, \forall i = 1, \cdots, n$$

$$\text{τότε ισχύει: } \ \vec{x}_i = \vec{y}_i, \ \ \forall i = 1, \cdots, n.$$

Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι το διάνυσμα $\vec{x}$ έχει **μοναδικότητα γραφής ως προς τους υπόχωρους** $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$.

Πρόταση 3.3.9 *Έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$ n το πλήθος υπόχωροι του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. *Το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ είναι ευθύ: $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_n$*

2. *Κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ του υπόχωρου $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα διανυσμάτων των υπόχωρων $\mathcal{W}_i$.*

3. *Αν $\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0}$, όπου $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$, τότε ισχύει ότι: $\vec{x}_i = \vec{0}$, $\forall i = 1, \cdots, n$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει κυκλικά: 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 1.

1. $\Rightarrow$ 2. Έστω ότι το άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{W}_i$ είναι ευθύ και έστω $\vec{x}$ ένα διάνυσμα του $\mathcal{W}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_n$ το οποίο υποθέτουμε ότι μπορούμε να το γράψουμε με δύο τρόπους σαν άθροισμα διανυσμάτων από τους $\mathcal{W}_i$:

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{y}_1 + \cdots + \vec{y}_n, \ \ \vec{x}_i, \vec{y}_i \in \mathcal{W}_i, \forall i = 1, \cdots, n \qquad (*)$$

Για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, προσθέτοντας και στα δύο μέλη το διάνυσμα $-\vec{y}_i$, θα έχουμε $\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{i-1} + (\vec{x}_i - \vec{y}_i) + \vec{x}_{i+1} + \cdots + \vec{x}_n = \vec{y}_1 + \cdots + \vec{y}_{i-1} + \vec{y}_{i+1} + \cdots + \vec{y}_n$. Στην τελευταία σχέση μεταφέρουμε τα διανύσματα $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_{i+1}, \cdots, \vec{x}_n$ στο δεύτερο μέλος, δηλαδή προσθέτουμε στο πρώτο μέλος τα διανύσματα $-\vec{x}_1, \cdots, -\vec{x}_{i-1}, -\vec{x}_{i+1}, \cdots, -\vec{x}_n$. Τότε χρησιμοποιώντας τα Αξιώματα του ορισμού 2.1.1 θα έχουμε την σχέση:

$$\vec{x}_i - \vec{y}_i = (\vec{y}_1 - \vec{x}_1) + \cdots + (\vec{y}_{i-1} - \vec{x}_{i-1}) + (\vec{y}_{i+1} - \vec{x}_{i+1}) + \cdots + (\vec{y}_n - \vec{x}_n) \ \ (**)$$

Στην σχέση $(**)$, το πρώτο μέλος ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{W}_i$, διότι $\vec{x}_i, \vec{y}_i \in \mathcal{W}_i$. Το δεύτερο μέλος της σχέσης ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_{i+1} + \cdots + \mathcal{W}_n$, διότι $\vec{x}_j, \vec{y}_j \in \mathcal{W}_j$, $j = 1, \cdots, n$, $j \neq i$. Άρα $\vec{x}_i - \vec{y}_i \in \mathcal{W}_i \cap (\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_{i+1} + \cdots + \mathcal{W}_n)$. Επειδή το άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{W}_i$ είναι ευθύ, η τομή αυτή είναι ίση με $\{\vec{0}\}$, και επομένως $\vec{x}_i = \vec{y}_i$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, συμπεραίνουμε ότι θα έχουμε μοναδικότητα γραφής του διανύσματος $\vec{x}$ ως προς τους υπόχωρους $\mathcal{W}_1, \cdots, \mathcal{W}_n$.

2. $\Rightarrow$ 3. Υποθέτουμε ότι ισχύει το 2. και έστω ότι $\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0}$, όπου $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Επειδή $\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0} + \cdots + \vec{0}$ και το διάνυσμα $\vec{0}$ ανήκει σε καθε υπόχωρο $\mathcal{W}_i$, από την μοναδικότητα της γραφής έπεται ότι $\vec{x}_i = \vec{0}$, $\forall i = 1, \cdots, n$.

3. $\Rightarrow$ 1. Υποθέτουμε ότι ισχύει το 3. και έστω $\vec{x}$ ένα διάνυσμα του $\mathcal{V}$ το οποίο ανήκει στην τομή $\mathcal{W}_i \cap (\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_{i+1} + \cdots + \mathcal{W}_n)$. Αυτό σημαίνει ότι $\vec{x} \in \mathcal{W}_i$ και $\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{i-1} + \vec{x}_{i+1} + \cdots + \vec{x}_n$, όπου $\vec{x}_i \in \mathcal{W}_i$, $\forall i = 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n$. Προσθέτοντας σε αυτή τη σχέση το διάνυσμα $-\vec{x}$, και χρησιμοποιώντας τα Αξιώματα του ορισμού 2.1.1, θα έχουμε την σχέση

$$\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{i-1} + (-\vec{x}) + \vec{x}_{i+1} + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0} \qquad (***)$$

Επειδή ο $\mathcal{W}_i$ είναι υπόχωρος και $\vec{x} \in \mathcal{W}_i$, έπεται ότι $-\vec{x} \in \mathcal{W}_i$. Αυτό σημαίνει ότι στην σχέση $(***)$, το πρώτο μέλος ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_i + \mathcal{W}_{i+1} + \cdots + \mathcal{W}_n$. Τότε όμως από την υπόθεση μας, θα έχουμε $\vec{x} = \vec{0}$ και $\vec{x}_j = 0$, $\forall j = 1, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n$. Αυτό δείχνει ότι $\mathcal{W}_i \cap (\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_{i-1} + \mathcal{W}_{i+1} + \cdots + \mathcal{W}_n) = \{\vec{0}\}$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, θα έχουμε από το ορισμό 3.3.6 ότι το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ είναι ευθύ. $\square$

Το ακόλουθο σημαντικό πόρισμα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.3.9 και του Πορίσματος 3.2.6.

Πόρισμα 3.3.10 *Έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$ n το πλήθος υπόχωροι του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_n$.

2. *Κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathcal{V}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα $\vec{x} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n$ διανυσμάτων $\vec{x}_i$ των υπόχωρων $\mathcal{W}_i$.*

Απόδειξη: 1. $\Rightarrow$ 2. Επειδή $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_n$, θα έχουμε ότι κάθε διάνυσμα του $\mathcal{V}$ θα ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_n$, και επομένως θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων των υπόχωρων $\mathcal{W}_i$. Η μοναδικότητα της γραφής προκύπτει από την Πρόταση 3.3.9 διότι το άθροισμα $\mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_n$ είναι ευθύ.

2. $\Rightarrow$ 1. Η συνθήκη στο 2. έχει σαν συνέπεια ότι $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 + \cdots + \mathcal{W}_n$. Επιπρόσθετα, σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.9, η μοναδικότητα της γραφής δείχνει ότι το άθροισμα είναι ευθύ. $\square$

Θα δούμε τώρα δύο παραδείγματα διανυσματικών χώρων οι οποίοι είναι ευθέα αθροίσματα υπόχωρων τους.

Παράδειγμα 3.3.5 *Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^n$ των n-άδων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Τότε ισχύει:*

$$\boxed{\mathbb{K}^n = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \langle \vec{e}_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle}$$

όπου $\vec{e}_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0, 0)$ είναι το διάνυσμα του $\mathbb{K}^n$ που έχει 1 στην i-οστή συντεταγμένη και παντού αλλού 0.

Από το Παράδειγμα 3.2.9 έπεται ότι κάθε διάνυσμα $\vec{x} = (k_1, \cdots, k_n)$ του $\mathbb{K}^n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{e}_i$, δηλαδή $\vec{x} = k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n$. Επειδή $k_i\vec{e}_i \in \langle \vec{e}_i \rangle$, θα έχουμε $\vec{x} \in \langle \vec{e}_1 \rangle + \langle \vec{e}_2 \rangle + \cdots + \langle \vec{e}_n \rangle$, και επομένως $\mathbb{K}^n = \langle \vec{e}_1 \rangle + \langle \vec{e}_2 \rangle + \cdots + \langle \vec{e}_n \rangle$. Έστω $\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n = \vec{0}$, όπου $\vec{x}_i \in \langle \vec{e}_i \rangle$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Τότε υπάρχουν $k_i \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε $\vec{x}_i = k_i\vec{e}_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Επομένως $\vec{0} = \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_n = k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n$. Επειδή $k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n = k_1(1, 0, \cdots, 0, 0) + \cdots + k_n(0, 0, \cdots, 0, 1) = (k_1, \cdots, k_n)$, θα έχουμε προφανώς $k_i = 0$, δηλαδή $\vec{x}_i = 0$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Τότε όμως από το Πρόταση 3.3.9, συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα $\langle \vec{e}_1 \rangle + \langle \vec{e}_2 \rangle + \cdots + \langle \vec{e}_n \rangle$ είναι ευθύ. Επομένως $\mathbb{K}^n = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \langle \vec{e}_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle$.

Παράδειγμα 3.3.6 *Έστω τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{W}_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}, \quad \mathcal{W}_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$$

Θα δείξουμε ότι: $\mathbb{R}^3 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2$.

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι τα υποσύνολα $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$. Επιπρόσθετα από την μορφή έπεται άμεσα ότι $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{(0, 0, 0)\} = \{\vec{0}\}$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι κάθε διάνυσμα $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, μπορεί να γραφεί ως εξής: $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, όπου $\vec{x}_1 \in \mathcal{W}_1$, και $\vec{x}_2 \in \mathcal{W}_2$. Πραγματικα θα έχουμε: $\vec{x} = (x, y, z) = (x, x, x) + (0, y - x, z - x)$ και προφανώς $\vec{x}_1 := (x, x, x) \in \mathcal{W}_1$ και $\vec{x}_2 := (0, y - x, z - x) \in \mathcal{W}_2$.

Όπως είδαμε η έννοια του ευθέως αθροίσματος υπόχωρων αφορά την μοναδικότητα γραφής διανυσμάτων από τους υπόχωρους. Είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς αν αφορά και την μοναδικότητα των υπόχωρων. Δηλαδή αν $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$ και $\mathcal{W}_3$ είναι υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ και ισχύει $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_3$, μπορούμε τότε να συμπεράνουμε ότι $\mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_3$; Αν και, όπως θα δούμε αργότερα, ισχύει κάτι ασθενέστερο από την ισότητα, η απάντηση είναι αρνητική όπως δείχνει και η ακόλουθη:

Πρόχειρη Δοκιμασία

Έστω ο υπόχωρος $\mathcal{W} = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$. Να βρεθούν άπειροι το πλήθος υπόχωροι $\mathcal{Z}_n$, $n \geq 1$, του $\mathbb{R}^2$ έτσι ώστε: $\mathbb{R}^2 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}_n$, $\forall n \geq 1$, και επιπλέον $\mathcal{Z}_1 \neq \mathcal{Z}_n$, αν $n \geq 1$.

(Υπόδειξη: Θεωρείστε τους ακόλουθους υπόχωρους του $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{Z}_1 := \{(0,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{Z}_n := \{((n-1)x, nx) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}, \forall n \geq 2.$$

)

3.4 Ασκήσεις

Άσκηση 3.4.1 *Να βρεθεί ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:*

$$\vec{x}_1 = (2,1,-3), \quad \vec{x}_2 = (3,2,-5), \quad \vec{x}_3 = (1,-1,1)$$

Ακολούθως να εξετασθεί αν το διάνυσμα $\vec{x} = (6,2,-7)$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$.

Άσκηση 3.4.2 *Ποιοί από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί;*

1. *Το σύνολο $\mathcal{E} := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid ab \geq 0\}$ είναι διανυσματικος χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$, με τις συνηθισμένες πράξεις προσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού.*

   Σωστό $\boxed{\textit{Λάθος}}$

   Λύση *Τα διάνυσματα $\vec{x} = (0,3,0,0)$ και $\vec{y} = (-1,-2,0,0)$ ανήκουν στο $\mathcal{E}$, αλλά $\vec{x} + \vec{y} = (-1,1,0,0) \notin \mathcal{E}$.*

2. *Το σύνολο $\{(k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{K}^n \mid k_1 + \cdots + k_n = 0\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$.*

   $\boxed{\textit{Σωστό}}$ *Λάθος*

   Λύση *Βλέπε το Παράδειγμα 3.1.6.*

3. *Το σύνολο $\mathcal{W} = \{(k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{K}^n \mid k_1 + \cdots + k_n = 1\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$.*

   Σωστό $\boxed{\textit{Λάθος}}$

   Λύση *Τα διανύσματα $\vec{x} = (1,0,\cdots,0), \vec{y} = (0,1,\cdots,0)$ ανήκουν στο $\mathcal{W}$, αλλά το άθροισμα τους δεν ανήκει.*

4. *Το σύνολο* $\{(k_1, \cdots, k_n) \in \mathbb{K}^n \mid k_1 = k_n\}$ *είναι υπόχωρος του* $\mathbb{K}^n$.

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ *Λάθος*

5. *Το σύνολο* $\mathcal{W}$ *των πολυωνύμων με βαθμό ακριβώς* n, $(n \geq 1)$, *είναι υποχωρος του* $\mathbb{R}[t]$.

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

   Λύση *Τα πολυώνυμα* $1+t^n$, t^n *ανήκουν στο* $\mathcal{W}$, *αλλά* $(1+t^n) - t^n = 1 \notin \mathcal{W}$.

6. *Το σύνολο* $\mathcal{W}(\rho)$ *των πολυωνύμων* $P(t)$ *πάνω από το* $\mathbb{R}$ *τα οποία δέχονται τον πραγματικό αριθμό* ρ *σαν ρίζα, δηλαδή* $P(\rho) = 0$, *είναι υπόχωρος του* $\mathbb{R}[t]$.

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ *Λάθος*

7. *Το σύνολο* $\mathcal{W}$ *των ακολουθιών* $(x_n)_{n\geq 0}$ *πραγματικών αριθμών, για τις οποίες ισχύει:* $x_n^2 = x_{n-2}$, $\forall n \geq 2$, *είναι υπόχωρος του χώρου των ακολουθιών* $\mathbb{A}(\mathbb{R})$.

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

   Λύση *Η σταθερή ακολουθία* $(1, 1, \cdots, 1, \cdots)$ *ανήκει στο* $\mathcal{W}$, *αλλά η ακολουθία* $(-3)(1, 1, \cdots, 1, \cdots) = (-3, -3, \cdots, -3, \cdots)$ *δεν ανήκει.*

8. *Το σύνολο* $\mathcal{W}$ *των* n*-άδων* $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ *πραγματικών αριθμών για τις οποίες ισχύει* $k_1 k_2 \ldots k_n = 0$, *είναι υπόχωρος του* $\mathbb{K}^n$.

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

   Λύση $(1, 1, \cdots, 1, 0) \in \mathcal{W}$ *και* $(0, 0, \cdots, 0, 1) \in \mathcal{W}$, *αλλά* $(1, 1, \cdots, 1, 0) + (0, 0, \cdots, 0, 1) = (1, 1, \cdots, 1, 1) \notin \mathcal{W}$.

Άσκηση 3.4.3 *Έστω* $p, q \in \mathbb{R}$, *σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να δειχθεί ότι το σύνολο των «αναδρομικών» ακολουθιών*

$$\mathcal{V} := \{(x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{R}) \mid x_{n+2} = p x_{n+1} + q x_n\}$$

είναι υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ *των ακολουθιών πάνω από το* $\mathbb{R}$.

Άσκηση 3.4.4 *Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός* λ *έτσι ώστε το διάνυσμα* $\vec{x} = (1, -2, \lambda)$ *να είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων* $\vec{x}_1 = (3, 0, -2), \vec{x}_2 = (2, -1, -5) \in \mathbb{R}^3$.

Άσκηση 3.4.5 *Να προσδιορισθούν όλοι οι υπόχωροι του* $\mathbb{R}^3$.
(Υπόδειξη: Εργαστείτε όπως στο Παράδειγμα 3.1.4.)

Άσκηση 3.4.6 *Στον διανυσματικό χώρο* $\mathbb{R}_2[t]$ *των πολυωνύμων πάνω από το* $\mathbb{R}$, *θεωρούμε τους υπόχωρους:*

$$\mathcal{W}_1 = \langle t^2 + t, t + 1 \rangle, \quad \mathcal{W}_2 = \langle -t^2 + t + 2, t + 3 \rangle$$

Να προσδιορισθεί ο υπόχωρος $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$.

Άσκηση 3.4.7 *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του* $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x} = (2, 3, -1), \quad \vec{y} = (1, -2, 2), \quad \vec{z} = (3, 7, 0), \quad \vec{w} = (5, 0, -7)$$

Να δείξετε ότι: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle$.

Άσκηση 3.4.8 *Έστω* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ *τρία διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου* $\mathcal{V}$ *για τα οποία ισχύει:* $k_1\vec{x} + k_2\vec{y} + k_3\vec{z} = \vec{0}$. *Αν* $k_1k_3 \neq 0$, *τότε να δείξετε ότι ισχύει:* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$.

Άσκηση 3.4.9 *Να εξετασθεί αν τα ακόλουθα υποσύνολα*

1. $\mathcal{W}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$.
2. $\mathcal{W}_2 = \{(x, 2x + 1) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.
3. $\mathcal{W}_3 = \{(2x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.
4. $\mathcal{W}_4 = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$.

είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$. *Είναι τα υποσύνολα* $\mathcal{W}_3 \cap \mathcal{W}_4$ *και* $\mathcal{W}_3 + \mathcal{W}_4$ *υπόχωροι του* $\mathbb{R}^2$; *Είναι το υποσύνολο* $\mathcal{W}_3 \cup \mathcal{W}_4$ *υπόχωρος του* $\mathbb{R}^2$;

Άσκηση 3.4.10 *Να δείξετε ότι:* $\mathbb{K}^3 = \langle \vec{x}_1 \rangle \oplus \langle \vec{x}_2 \rangle \oplus \langle \vec{x}_3 \rangle$, *όπου:*

$$\vec{x}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{x}_2 = (1, 1, 0), \quad \vec{x}_3 = (1, 1, 1)$$

Άσκηση 3.4.11 *Έστω* $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ *τρεις υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου* $\mathcal{E}$, *έτσι ώστε* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. *Να δείξετε ότι:*

$$\mathcal{U} + (\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = (\mathcal{U} + \mathcal{V}) \cap (\mathcal{U} + \mathcal{W}$$

Άσκηση 3.4.12 *Να δείξετε ότι τα ακόλουθα υποσύνολα του* $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{W}_1 = \{(a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \ \mathcal{W}_2 = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}, \ \mathcal{W}_1 = \{(d, 0, d) \mid d \in \mathbb{R}\},$$

είναι υπόχωροι και ακολούθως να δείξετε ότι $\mathbb{R}^3 = \mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2 \oplus \mathcal{W}_3$.

Άσκηση 3.4.13 *Να δείξετε ότι:*

$$\mathbb{R}_2[t] = \langle 1, t-1, (t-2)(t-1) \rangle$$

Άσκηση 3.4.14 *Έστω τα ακόλουθα υποσύνολα του διανυσματικού χώρου* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *των* 2×2 *πινάκων πάνω απο το* $\mathbb{R}$*:*

$$\mathcal{W} = \Big\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix} \ | \ x, y, z \in \mathbb{R} \Big\}, \quad \mathcal{Z} = \Big\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \ | \ x, z \in \mathbb{R} \Big\}$$

Να δείξετε ότι τα σύνολα $\mathcal{W}, \mathcal{Z}$ *είναι υπόχωροι του* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *και ακολούθως να προσδιορισθούν οι υπόχωροι* $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}$ *και* $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$.

Άσκηση 3.4.15 *Να βρεθεί το σύνολο λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος*

$$x + 2y + z = 0, \quad x + y + 2z = 0, \quad 2x + y + z = 0$$

Άσκηση 3.4.16 *Θεωρούμε τους* 2×2 *πίνακες πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$*, έτσι ώστε ο πίνακας* $C = \begin{pmatrix} a & b \\ -37 & -3 \end{pmatrix}$ *να είναι γραμμικος συνδυασμός των* A, B.

Άσκηση 3.4.17 *Έστω* $\mathcal{V}$ *ο υπόχωρος του διανυσματικού χώρου* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*, ο οποιος παράγεται από τους πίνακες:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

και έστω $\mathcal{W}$ *ο υπόχωρος του* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*, ο οποιος παράγεται από τους πίνακες:*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Να βρεθούν οι υπόχωροι: $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ *και* $\mathcal{V} + \mathcal{W}$.

Άσκηση 3.4.18 *Έστω* $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *ο διανυσματικός χώρος των* $m \times n$ *πινάκων πάνω από το σώμα* $\mathbb{K}$*. Να βρεθεί ένα σύνολο γεννητόρων του* $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(Υπόδειξη: Θεωρείστε τους mn το πλήθος πίνακες E_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, όπου ο πίνακας E_{ij} έχει στην (i,j)-θέση 1 και παντού αλλού 0. Δηλαδή:

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου το 1 εμφανίζεται στην τομή της j-στήλης με την i-γραμμή. Ακολούθως δείξτε ότι $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = \langle E_{ij} \rangle_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$.)

Άσκηση 3.4.19 *Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ των ακολουθιών με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, και έστω $p, q \in \mathbb{R}$ με $q \neq 0$. Έστω*

$$\mathcal{V} = \{(x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{R}) \,|\, x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}\}$$

το υποσύνολο των αναγωγικών ακολουθιών. Να δείξετε ότι το $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ και ακολούθως να προσδιορίσετε ένα σύνολο γεννητόρων του.

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης «Γραμμική Άλγεβρα Ι». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1225.

Σημείωμα Αδειοδότησης

- Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Παρόμοια Διανομή, Διεθνής Έκδοση 4.0 [1] ή μεταγενέστερη.

[1] https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/.