ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης

Τμήμα: Μαθηματικών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 4

Γραμμική Ανεξαρτησία, Βάσεις και Διάσταση

Στο παρόν Κεφάλαιο θα αναπτύξουμε τις θεμελιώδεις έννοιες της γραμμικής ανεξαρτησίας και της βάσης οι οποίες μας επιτρέπουν να κάνουμε με αναλλοίωτο τρόπο αποτελεσματικούς υπολογισμούς σε διανυσματικούς χώρους. Οι έννοιες αυτές θα μας οδηγήσουν στην βασική έννοια της διάστασης, δηλαδή στην αντιστοίχηση ενός αριθμού σε κάθε διανυσματικό χώρο, η οποία σε συνδυασμό με την έννοια της γραμμικής απεικόνισης θα μας επιτρέψει να ταξινομούμε διανυσματικούς χώρους.

Από τώρα και στο εξής σταθεροποιούμε ένα σώμα $\mathbb{K}$ και έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ υπεράνω του $\mathbb{K}$. Συνήθως αυτό το υποδηλώνουμε γράφοντας $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ εννοώντας ότι ο $\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος ορισμένος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.

4.1 Γραμμική Ανεξαρτησία

Έστω $\{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$. Υπενθυμίζουμε ότι ένας γραμμικός συνδυασμός $k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n$ των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ καλείται *μη-τετριμμένος* αν $(k_1, k_2, \cdots, k_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$, δηλαδή τουλάχιστον ένα από τα k_i είναι διάφορο του μηδενός.

Ορισμός 4.1.1 *Έστω $\mathcal{X} := \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$. Το σύνολο $\mathcal{X}$ καλείται* **γραμμικά εξαρτημένο** *αν υπάρχει μη-τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ ο οποίος να είναι το μηδενικό διάνυσμα του $\mathcal{V}$. Δηλαδή: υπάρχουν αριθμοί $k_1, k_2, \cdots, k_n$*

από το σώμα $\mathbb{K}$ οι οποίοι δεν είναι ταυτόχρονα όλοι ίσοι με 0, έτσι ώστε:

$$k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n = \vec{0}$$

Ένα άπειρο σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{A}$ του $\mathcal{V}$ καλείται **γραμμικά εξαρτημένο** *αν το $\mathcal{A}$ περιέχει ένα πεπερασμένο γραμμικά εξαρτημένο υποσύνολο.*

Στην συνέχεια σημαντικό ρόλο στην θεωρία θα διαδραματίσει η λογικά αντίθετη έννοια της γραμμικής εξάρτησης:

Ορισμός 4.1.2 *Ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{X}$ του $\mathcal{V}$ καλείται* **γραμμικά ανεξάρτητο** *αν το $\mathcal{X}$ δεν είναι γραμμικά εξαρτημένο. Δηλαδή αν $\mathcal{X} := \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$, τότε το $\mathcal{X}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:*

$$\boxed{\forall k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{K}: \; k_1\vec{x}_1 + \cdots + k_n\vec{x}_n = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0}$$

Ένα άπειρο σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{A}$ του $\mathcal{V}$ καλείται **γραμμικά ανεξάρτητο** *αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{A}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.*

Σχόλιο 4.1.1 *Είναι φανερό από το ορισμό ότι η έννοια της γραμμικής εξάρτησης ή ανεξαρτησίας διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ εξαρτάται από το σώμα υπεράνω του οποίου έχει ορισθεί ο $\mathcal{V}$. Το ακόλουθο παράδειγμα είναι ενδεικτικό.*

Θεωρούμε το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών το οποίο, όπως έχουμε δει μπορεί να θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του εαυτού του, και τότε γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$, αλλά μπορεί να θεωρηθεί και σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$ και τότε γράφουμε $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Θεωρούμε το σύνολο διανυσμάτων $\{1, i\} \subseteq \mathbb{C}$. Τότε το σύνολο $\{1, i\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο υποσύνολο του $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$, όπως δείχνει η σχέση: $(-i)1 + 1i = 0$ η οποία είναι μια τετριμμένη σχέση εξάρτησης των $1, i$ με μη-μηδενικούς συντελεστές από το $\mathbb{C}$. Αντίθετα το σύνολο $\{1, i\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Πραγματικά, όπως μπορεί κανείς να δει πολύ εύκολα, δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί k, l έτσι ώστε $k1 + li = 0$ και $(k, l) \neq (0, 0)$.

Σχόλιο 4.1.2 *Σύμφωνα με τον ορισμό για να δείξουμε ότι ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{X} := \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο εργαζόμαστε ως εξής: Υποθέτουμε ότι υπάρχουν αριθμοί $k_1, \cdots, k_n$ από το σώμα $\mathbb{K}$, έτσι ώστε $k_1\vec{x}_1 + \cdots + k_n\vec{x}_n = \vec{0}$. Αν από αυτή τη σχέση γραμμικής εξάρτησης καταφέρουμε να δείξουμε ότι αναγκαστικά έχουμε ότι $k_1 = \cdots k_n = 0$, τότε το σύνολο $\mathcal{X}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Διαφορετικά το $\mathcal{X}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

Το παρακάτω παράδειγμα είναι ενδεικτικό.

Παράδειγμα 4.1.3 *Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ υπεράνω του $\mathbb{R}$, θεωρούμε τα ακόλουθα σύνολα διανυσμάτων:*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (0,0,1)\}$$

$$\mathcal{X} = \{\vec{x}_1 = (0,1,1),\ \vec{x}_2 = (1,0,1),\ \vec{x}_3 = (1,1,0)\}$$

$$\mathcal{Y} = \{\vec{y}_1 = (1,-1,0),\ \vec{y}_2 = (-1,0,-1),\ \vec{y}_3 = (1,2,3)\}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό θα εξετάσουμε αν τα παραπάνω σύνολα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή γραμμικά εξαρτημένα.

1. *Έστω ότι υπάρχουν αριθμοί $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}$, έτσι ώστε: $(*) : k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + k_3\vec{e}_3 = \vec{0}$. Τότε $k_1(1,0,0) + k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$, δηλαδή ισχύει $(k_1,0,0) + (0,k_2,0) + (0,0,k_3) = (0,0,0)$. Ισοδύναμα έχουμε $(k_1,k_2,k_3) = (0,0,0)$, και επομένως $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Δηλαδή δείξαμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

2. *Έστω ότι υπάρχουν αριθμοί $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}$, έτσι ώστε: $(*) : k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + k_3\vec{x}_3 = \vec{0}$. Τότε $k_1(0,1,1) + k_2(1,0,1) + k_3(1,1,0) = (0,0,0)$, δηλαδή ισχύει $(0,k_1,k_1) + (k_2,0,k_2) + (k_3,k_3,0) = (0,0,0)$. Ισοδύναμα θα έχουμε $(k_2+k_3, k_1+k_3, k_1+k_2) = (0,0,0)$. Δηλαδή θα πρέπει οι αριθμοί k_1, k_2, k_3 να ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα:*

$$k_2 + k_3 = 0,\ \ k_1 + k_3 = 0,\ \ k_1 + k_2 = 0$$

Αφαιρώντας την δεύτερη εξίσωση από την πρώτη έχουμε την εξίσωση $k_2 - k_1 = 0$, την οποία αν προσθέσουμε στην τρίτη, θα έχουμε $2k_1 = 0$, δηλαδή $k_1 = 0$. Τότε προφανώς θα έχουμε και $k_2 = k_3 = 0$ και επομένως δείξαμε ότι η σχέση $(*)$ την οποία υποθέσαμε ότι ισχύει μας οδηγεί στο ότι αναγκαστικά ισχύει $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Άρα το σύνολο $\mathcal{X}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

3. *Έστω ότι υπάρχουν αριθμοί $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{K}$, έτσι ώστε: $(*) : k_1\vec{y}_1 + k_2\vec{y}_2 + k_3\vec{y}_3 = \vec{0}$. Τότε $k_1(1,-1,0) + k_2(-1,0,-1) + k_3(1,2,3) = (0,0,0)$, δηλαδή ισχύει $(k_1,-k_1,0) + (-k_2,0,-k_2) + (k_3,2k_3,3k_3) = (0,0,0)$. Ισοδύναμα θα έχουμε $(k_1 - k_2 + k_3, -k_1 + 2k_3, -k_2 + 3k_3) = (0,0,0)$. Δηλαδή θα πρέπει οι αριθμοί k_1, k_2, k_3 να ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα:*

$$k_1 - k_2 + k_3 = 0,\ \ -k_1 + 2k_3 = 0,\ \ -k_2 + 3k_3 = 0$$

Από την δεύτερη εξίσωση έχουμε $k_1 = 2k_3$, *από την τρίτη εξίσωση έχουμε* $k_2 = 3k_3$, *και αυτές οι τιμές ικανοποιούν την πρώτη εξίσωση. Επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και το σύνολο λύσεων είναι* $\{(2t, 3t, t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. *Επιλέγοντας* $t \neq 0$, *π.χ.* $t = 1$, *έχουμε μια μη-μηδενική λύση* $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 1$ *η οποία εκ΄ κατασκευής ικανοποιεί την σχέση* $2\vec{y}_1 + 3\vec{y}_2 + \vec{y}_3 = \vec{0}$. *Σύμφωνα με τον ορισμό το σύνολο* $\mathcal{Y}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

Πρόχειρη Δοκιμασία

Εργαζόμενοι όπως στο Παράδειγμα 4.1.3 να δείξετε ότι στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^n$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, το σύνολο

$$\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0),\ \ \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ \ \cdots\ \ \vec{e}_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Λήμμα 4.1.3 1. *Έστω* $\vec{x} \in \mathcal{V}$. *Τότε το σύνολο* $\{\vec{x}\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν-ν* $\vec{x} \neq \vec{0}$. *Ιδιαίτερα το μηδενικό διάνυσμα* $\vec{0}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

2. *Έστω* $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathcal{V}$. *Τότε το σύνολο* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένο αν-ν ένα εκ των* $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ *είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου. Δηλαδή είτε* $\vec{x}_1 = k\vec{x}_2$ *ή* $\vec{x}_2 = l\vec{x}_1$, *για κατάλληλα* $k, l \in \mathbb{K}$.

Απόδειξη: 1. Αν $\vec{x} = \vec{0}$, τότε $1\vec{x} = \vec{0}$. Επειδή $1 \neq 0$, έπεται ότι το $\{\vec{0}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, και επομένως αν το $\{\vec{x}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε $\vec{x} \neq \vec{0}$. Αντίστροφα αν $\vec{x} \neq \vec{0}$, έστω $k \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $k\vec{x} = \vec{0}$. Αν $k \neq 0$, τότε υπάρχει το k^{-1} και επομένως πολλαπλασιάζοντας με το k^{-1} την σχέση $k\vec{x} = \vec{0}$, θα έχουμε $k^{-1}(k\vec{x}) = k^{-1}\vec{0} = \vec{0}$. Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την σχέση $(k^{-1}k)\vec{x} = 1\vec{x} = \vec{x} = \vec{0}$, η οποία είναι αδύνατη. Άρα $k = 0$, και επομένως το μονοσύνολο $\{\vec{x}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Αν τα $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ •είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε $k\vec{x}_1 + l\vec{x}_2 = \vec{0}$, όπου $k, l \in \mathbb{K}$ και είτε $k \neq 0$ ή $l \neq 0$. Αν $k \neq 0$, τότε $\vec{x}_1 = -\frac{l}{k}\vec{x}_2$· όμοια αν $l \neq 0$, τότε $\vec{x}_2 = \frac{k}{l}\vec{x}_1$. Αντίστροφα αν $\vec{x}_2 = l\vec{x}_1$, τότε $l\vec{x}_1 + (-1)\vec{x}_2 = \vec{0}$, και επομένως τα $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα· παρόμοια αν $\vec{x}_1 = k\vec{x}_2$, τότε $\vec{x}_1 + (-k)\vec{x}_2 = \vec{0}$, και επομένως τα $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. □

Παράδειγμα 4.1.4 *Στον διανυσματικό χώρο* $\mathbb{C}^3$ *υπεράνω του* $\mathbb{C}$, *θεωρούμε τα διανύσματα* $\vec{x} = (1, 0, i)$ *και* $\vec{y} = (1 + i, 1, -1)$. *Αν τα διανύσματα* $\vec{x}$, $\vec{y}$ *ήσαν γραμμικά εξαρτημένα, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.3 θα υπήρχε μιγαδικός* *αριθμός k έτσι ώστε $\vec{x} = k\vec{y}$ ή $\vec{y} = k\vec{x}$. Στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε $(1, 0, i) = k(1 + i, 1, -1) = (k + ki, k, -k)$, δηλαδή $k + ki = 1, k = 0, -k = i$ το οποίο είναι αδύνατον. Παρόμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $\vec{y} = k\vec{x}$. Επομένως το σύνολο $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Παράδειγμα 4.1.5 *Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}_n[t]$ των πολυωνύμων υπεράνω του $\mathbb{K}$ με βαθμό το πολύ n, θεωρούμε $n+1$ πολυώνυμα $P_0(t), P_1(t), \cdots, P_n(t)$, έτσι ώστε $\deg P_i(t) = i, i = 0, 1, \cdots, n$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{P_0(t), P_1(t), \cdots, P_n(t)\}$ είναι γραμμικα ανεξάρτητο.*

Επειδή ο βαθμός του $P_i(t)$ είναι i, έπεται ότι:

$$P_i(t) = a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2 + \cdots + a_{ii-1}t^{i-1} + a_{ii}t^i, \;\; a_{ii} \neq 0, \quad 0 \leq i \leq n$$

Έστω $P(t) := k_0P_0(t) + k_1P_1(t) + \cdots + k_nP_n(t) = 0$, όπου $k_i \in \mathbb{K}$, $\forall i = 0, 1, \cdots, n$. Θέτοντας $P(t) = b_0 + b_1t + b^2t^2 + \cdots + b_nt^n$, από τον ορισμό της πρόσθεσης πολυωνύμων θα έχουμε τότε ότι:

$(\mathbf{0})$ $b_0 = k_0a_{00} + k_1a_{10} + k_2a_{20} + \cdots + k_na_{n0}$.

$(\mathbf{1})$ $b_1 = k_1a_{11} + k_2a_{21} + k_3a_{31} + \cdots + k_na_{n1}$.

$$\vdots$$

$(\mathbf{n-1})$ $b_{n-1} = k_{n-1}a_{n-1n-1} + k_na_{nn-1}$.

$(\mathbf{n})$ $b_n = k_na_{nn}$.

Επειδή το πολυώνυμο $P(t)$ από την υπόθεση μας είναι το μηδενικό, θα έχουμε $b_i = 0$, $\forall i = 0, 1, \cdots, n$. Επειδή $a_{nn} \neq 0$, από τη σχέση $(\mathbf{n})$ έπεται ότι $k_n = 0$. Τότε όμως από τη σχέση $(\mathbf{n-1})$, επειδή $a_{n-1n-1} \neq 0$, έπεται ότι $k_{n-1} = 0$. Συνεχίζοντας κατ' αυτό το τρόπο θα εχουμε τελικά $k_n = k_{n-1} = \cdots = k_1 = k_0 = 0$, και επομένως τα πολυώνυμα $P_0(t), P_1(t), \cdots, P_n(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ υπεράνω του $\mathbb{R}$ θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{x} = (x_1, x_2)$ και $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Να δείξετε ότι το σύνολο $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν-ν $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Θεωρούμε στο $\mathbb{R}^2$ δύο διανύσματα τα οποία είναι μοναδιαία και κάθετα. Να δείξετε ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 4.1.6 *Έστω $\mathbb{K}[t]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Στο Παράδειγμα 3.2.3 είδαμε ότι $\mathbb{K}[t] = \langle 1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots \rangle$, δηλαδή ο $\mathbb{K}[t]$ παράγεται υπεράνω του $\mathbb{K}$ από τα άπειρα το πλήθος πολυώνυμα $1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots$. Θα δείξουμε ότι αυτά τα πολυώνυμα είναι και γραμμικά ανεξάρτητα. Σύμφωνα με τον ορισμό αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο S του συνόλου $\{1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Προφανώς κάθε τέτοιο υποσύνολο είναι της μορφής $\{t^{n_1}, t^{n_2}, \cdots, t^{n_k}\}$, όπου $n_1, n_2, \cdots, n_k \geq 0$ είναι διακεκριμένοι μη-αρνητικοί ακέραιοι. Αν $l_1 t^{n_1} + l_2 t^{n_2} + \cdots + l_k t^{n_k} = 0$, τότε το πολυώνυμο $P(t) = l_1 t^{n_1} + l_2 t^{n_2} + \cdots + l_k t^{n_k}$ είναι το μηδενικό, και επομένως από τον ορισμό θα έχουμε $l_1 = l_2 = \cdots = l_k = 0$. Άρα το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επομένως το σύνολο γεννητόρων $1, t, t^2, \cdots, t^n, \cdots$ του $\mathbb{K}[t]$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Θα αποδείξουμε τώρα κάποιες βασικές προτάσεις που δείχνουν ότι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο ικανοποιεί σημαντικές ιδιότητες. Αν και αυτές οι ιδιότητες ισχύουν (με ανάλογη απόδειξη) και για άπειρα σύνολα διανυσμάτων, χάριν ευκολίας θα περιορισθούμε σε πεπερασμένα σύνολα.

Η παρακατω Πρόταση αποτελει γενίκευση του Λήμματος 4.1.3.

Πρόταση 4.1.4 *Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος υπερανω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. Κάθε υποσύνολο ένος γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου του $\mathcal{V}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Κάθε υπερσύνολο ενός γραμμικά εξαρτημένου συνόλου του $\mathcal{V}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Απόδειξη: 1. Έστω $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$, και έστω $\mathcal{X}' := \{\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}, \cdots, \vec{x}_{i_k}\}$ ένα υποσύνολο του $\mathcal{X}$, όπου $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ είναι ένα υποσύνολο του συνόλου $\{1, 2, \cdots, n\}$. Έστω ότι $\lambda_{i_1}\vec{x}_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k}\vec{x}_{i_k} = \vec{0}$. Αν $\{\vec{x}_{i_{k+1}}, \vec{x}_{i_{k+2}}, \cdots, \vec{x}_{i_n}\}$ είναι τα υπόλοιπα στοιχεία του $\mathcal{X}$ (δηλαδή $\mathcal{X} = \{\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}, \cdots, \vec{x}_{i_k}, \vec{x}_{i_{k+1}}, \cdots, \vec{x}_{i_n}\}$), τότε η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα $\lambda_{i_1}\vec{x}_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k}\vec{x}_{i_k} + 0\vec{x}_{i_{k+1}} + \cdots + 0\vec{x}_{i_n} = \vec{0}$. Επειδή το $\mathcal{X}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ότι $\lambda_{i_1} = \lambda_{i_2} = \cdots = \lambda_{i_n} = 0$. Άρα το $\mathcal{X}'$ είναι γραμμικα ανεξάρτητο.

2. Έστω $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο διανυσματων του $\mathcal{V}$, και έστω $\mathcal{X}'$ ένα (πεπερασμένο) υπερσύνολο του. Τότε υπάρχουν στοιχεία $\vec{x}_{n+1}, \cdots, \vec{x}_m$ του $\mathcal{X}'$, έτσι ώστε $\mathcal{X}' = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}, \cdots, \vec{x}_m\}$. Επειδή το $\mathcal{X}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, έπεται ότι υπάρχουν αριθμοί $k_1, k_2, \cdots, k_n$,

όχι όλοι ταυτόχρονα ίσοι με 0, έτσι ώστε: $k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n = \vec{0}$. Η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα ως εξής: $k_1\vec{x}_1+k_2\vec{x}_2+\cdots+k_n\vec{x}_n+0\vec{x}_{n+1}+\cdots+0\vec{x}_m = \vec{0}$. Επειδή ένα τουλάχιστον από τα k_i είναι μη-μηδενικό, έπεται ότι τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}, \cdots, \vec{x}_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. $\square$

Πρόταση 4.1.5 *1. Το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$ του $\mathcal{V}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο αν-ν τουλάχιστον ένα από τα $\vec{x}_i$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.*

2. Υποθέτουμε ότι το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$ του $\mathcal{V}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}$. Τότε το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{X} \cup \{\vec{x}\} = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n, \vec{x}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο αν-ν το $\vec{x}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$.

Απόδειξη: 1. Έστω ότι το $\mathcal{X}$ είναι γραμμικα εξαρτημένο· τότε υπάρχουν αριθμοί $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{K}$, όχι όλοι ταυτόχρονα ίσοι με μηδεν, έτσι ώστε: $k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_{i-1}\vec{x}_{i-1} + k_i\vec{x}_i + k_{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + k_n\vec{x}_n = \vec{0}$. Υποθέτουμε, χωρις βλάβη της γενικότητας, ότι $k_i \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση γραμμικής εξάρτησης με k_i^{-1}, θα έχουμε την σχέση $k_i^{-1}k_1\vec{x}_1 + k_i^{-1}k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_i^{-1}k_{i-1}\vec{x}_{i-1} + \vec{x}_i + k_i^{-1}k_{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + k_i^{-1}k_n\vec{x}_n = \vec{0}$. Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την σχέση $\vec{x}_i = (-k_i^{-1}k_1)\vec{x}_1 + (-k_i^{-1}k_2)\vec{x}_2 + \cdots + (-k_i^{-1}k_{i-1})\vec{x}_{i-1} + (-k_i^{-1}k_{i+1})\vec{x}_{i+1} + \cdots + (-k_i^{-1}k_n)\vec{x}_n$. Άρα το $\vec{x}_i$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων διανυσματων του συνόλου $\mathcal{X}$.

Αντίστροφα αν ένα από τα διανύσματα του συνόλου $\mathcal{X}$, π.χ. το $\vec{x}_i$, είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, τότε υπάρχουν αριθμοί $k_1, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_n \in \mathbb{K}$, έτσι ώστε $\vec{x}_i = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_{i-1}\vec{x}_{i-1} + k_{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + k_n\vec{x}_n$. Αυτή η σχέση είναι προφανως ισοδύναμη με την $k_1\vec{x}_1+k_2\vec{x}_2+\cdots+k_{i-1}\vec{x}_{i-1}+(-1)\vec{x}_i + k_{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + k_n\vec{x}_n = \vec{0}$ η οποία είναι ένας μη-τετριμμένος (διότι ο συντελεστής του $\vec{x}_i$ είναι $-1 \neq 0$) γραμμικός συνδυασμος των διανυσμάτων του συνολου $\mathcal{X}$ ίσος με το μηδενικο διάνυσμα. Άρα το $\mathcal{X}$ ειναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Υποθέτουμε ότι το $\mathcal{X} \cup \{\vec{x}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο σύνολο. Τότε θα έχουμε την σχέση $(*) : k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_{i-1}\vec{x}_{i-1} + k_i\vec{x}_i + k_{i+1}\vec{x}_{i+1} + \cdots + k_n\vec{x}_n + k\vec{x} = \vec{0}$, για κάποιους αριθμούς $k_1, \cdots, k_n, k \in \mathbb{K}$ οι οποίοι δεν είναι όλοι ταυτόχρονα ίσοι με 0. Αν $k = 0$, τότε θα έχουμε $k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_{i-1}\vec{x}_{i-1}+k_i\vec{x}_i+k_{i+1}\vec{x}_{i+1}+\cdots+k_n\vec{x}_n = \vec{0}$, και επομένως, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$, θα έχουμε $k_1 = \cdots = k_n = 0$, το οποίο είναι άτοπο διότι ένα τουλάχιστον από τα $k_1, \cdots, k_n, k$ είναι $\neq 0$. Άρα $k \neq 0$, και επομένως πολλαπλασιάζοντας την σχέση $(*)$ με k^{-1}, θα έχουμε την σχέση $\vec{x} = (-k^{-1}k_1)\vec{x}_1 + \cdots + k^{-1}k_n\vec{x}_n$ η οποία δείχνει ότι το $\vec{x}$ είναι

γραμμικός συνδυασμός των $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$. Το αντίστροφο προκύπτει άμεσα απο το 1.

□

Πρόταση 4.1.6 *Έστω $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{V}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*
2. *Κάθε διάνυσμα του $\langle S\rangle$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του S (με άλλα λόγια αν $k_1\vec{x}_1 + \cdots + k_n\vec{x}_n = l_1\vec{x}_1 + \cdots + l_n\vec{x}_n$, τότε $k_1 = l_1, k_2 = l_2, \cdots, k_n = l_n$).*

Απόδειξη: 1. $\Rightarrow$ 2. Έστω ότι $k_1\vec{x}_1 + \cdots + k_n\vec{x}_n = l_1\vec{x}_1 + \cdots + l_n\vec{x}_n$, όπου $k_i, l_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Η σχέση αυτή είναι προφανώς ισοδύναμη με την σχέση $(k_1 - l_1)\vec{x}_1 + \cdots + (k_n - l_n)\vec{x}_n = \vec{0}$, η οποία λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ έχει σαν συνέπεια ότι $k_i - l_i = 0$, $\forall i = 1, \cdots, n$. Επομένως $k_i = l_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$.

2. $\Rightarrow$ 1. Έστω ότι $k_1\vec{x}_1 + \cdots + k_n\vec{x}_n = \vec{0}$, όπου $k_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Επειδή $0\vec{x} = \vec{0}$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{V}$, η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα $k_1\vec{x}_1 + \cdots + k_n\vec{x}_n = 0\vec{x}_1 + \cdots + 0\vec{x}_n$. Τότε από την υπόθεση 2. έπεται ότι $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$.
□

Συνδυάζοντας την παραπάνω Πρόταση 4.1.6 με την Πρόταση 3.3.9, έχουμε το ακόλουθο Πόρισμα.

Πόρισμα 4.1.7 *Έστω $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{V}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*
2. *Το άθροισμα υπόχωρων $\langle\vec{x}_1\rangle + \langle\vec{x}_2\rangle + \cdots + \langle\vec{x}_n\rangle$ είναι ευθύ.*
3. *$\langle S\rangle = \langle\vec{x}_1\rangle \oplus \langle\vec{x}_2\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\vec{x}_n\rangle$.*

Άσκηση 4.1.7 *1. Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{x} = (3 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, $\vec{y} = (7, 1 + 2\sqrt{2})$ του $\mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα όταν το $\mathbb{R}^2$ θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$, αλλά τα $\vec{x}$, $\vec{y}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα όταν το $\mathbb{R}^2$ θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{Q}$.*

2. Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{x} = (1 - i, i)$, $\vec{y} = (2, -1 + i)$ του $\mathbb{C}^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα όταν το $\mathbb{C}^2$ θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$.

3. Αν a είναι ένας άρρητος αριθμός, να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\{1, a\}$ του $\mathbb{R}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα όταν το $\mathbb{R}$ θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{Q}$.

Άσκηση 4.1.8 *Για ποιές τιμές του $r \in \mathbb{R}$, το ακόλουθα διανύσματα*

$$\vec{x} = (r, 1, 1), \quad \vec{y} = (1, r, 1), \quad \vec{z} = (1, 1, r)$$

του $\mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα;

Άσκηση 4.1.9 *Στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι οι συναρτήσεις*

$$f_1(t) = e^t, \quad f_2(t) = e^{2t}, \quad f_3(t) = e^{3t}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Να γενικευθεί το αποτέλεσμα για n το πλήθος συναρτήσεις.

Άσκηση 4.1.10 *Να βρεθούν αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τα $a, b, c \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε τα διανύσματα*

$$\vec{x} = (1, 1, 1, a), \quad \vec{y} = (1, 0, 1, b), \quad \vec{z} = (-2, 2, -2, c)$$

του $\mathbb{R}^4$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 4.1.11 *Έστω $S = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$, και έστω $\vec{x}$ ένα διάνυσμα του $\mathcal{V}$ το οποίο δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, δηλαδή $\vec{x} \notin \langle S \rangle$. Να δείξετε ότι το σύνολο $\{\vec{x}_1 + \vec{x}, \vec{x}_2 + \vec{x}, \cdots, \vec{x}_n + \vec{x}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

4.2 Η Έννοια της Βάσης

Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Συνδυάζοντας την έννοια των γεννητόρων ενός διανυσματικού χώρου και την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας, αποκτούμε την έννοια της βάσης η οποία είναι θεμελιώδους σημασίας στην θεωρία των διανυσματικών χώρων.

Ορισμός 4.2.1 *Ένα υποσύνολο $\mathcal{B}$ του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ καλείται* **βάση** *του $\mathcal{V}$ (υπεράνω του $\mathbb{K}$) αν ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

1. *Το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

2. *Το σύνολο $\mathcal{B}$ παράγει τον χώρο $\mathcal{V}$, δηλαδή $\mathcal{V} = \langle S \rangle$.*

Μια από τις σημαντικότερες ιδιότητες της βάσης περιγράφεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.2.2 *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ ένα υποσύνολο του $\mathcal{V}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}$.*
2. *Κάθε διάνυσμα του $\mathcal{V}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλου $\mathcal{B}$.*
3. $\mathcal{V} = \langle \vec{e}_1 \rangle \oplus \langle \vec{e}_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \vec{e}_n \rangle$.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.1.6 και του Πορίσματος 4.1.7. □

Ο κύριος σκοπός της παρούσης παραγράφου είναι να δείξουμε ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος έχει τουλάχιστον μια βάση. Στην επόμενη παράγραφο θα δείξουμε επιπρόσθετα ότι δύο τυχούσες βάσεις περιέχουν τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων.

Όμως πριν περάσουμε στην απόδειξη του σημαντικού αυτού αποτελέσματος, η οποία θα απαιτήσει αρκετά βήματα, θα δώσουμε κάποια παραδείγματα βάσεων.

Παράδειγμα 4.2.1 *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $n \geq 1$.*

1. *Για κάθε $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, το μονοσύνολο $\{k\}$ αποτελεί μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}$ υπεράνω του $\mathbb{K}$.*

Πράγματικά: Κάθε μη-μηδενικό στοιχείο $k \in \mathbb{K}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και επιπλέον παράγει τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}$ υπεράνω του εαυτού του διότι $\forall l \in \mathbb{K}$: $l = (lk^{-1})k$. Άρα το μονοσύνολο $\{k\}$ είναι βάση του $\mathbb{K}$.

2. *Το σύνολο $\mathcal{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ αποτελεί μια βάση, η οποία καλείται* **κανονική***, του $\mathbb{K}^n$, όπου (το 1 εμφανίζεται στην i συνιστώσα):*

$$\vec{e}_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0), \quad 1 \leq i \leq n$$

Πράγματι, έχουμε ήδη δείξει προηγούμενα ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο γεννητόρων του $\mathbb{K}^n$. Επομένως το συνολο $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathbb{K}^n$.

3. *Το σύνολο $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_n[t]$ των πολυωνύμων με βαθμό το πολύ n, υπεράνω του $\mathbb{K}$.*

Πράγματι: Είναι προφανές ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ παράγει τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}_n[t]$ (δες και το Παράδειγμα 3.2.9). Επιπλέον από το Παράδειγμα 4.1.5 έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι και γραμμικά ανεξάρτητο. Επομένως το $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[t]$.

Το ακόλουθο σπουδαίο αποτέλεσμα δείχνει ότι ανάμεσα σε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων το οποίο περιέχεται σε ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων μπορούμε να παρεμβάλλουμε μια βάση.

Θεώρημα 4.2.3 *[Παρεμβολή Βάσης] Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ δύο υποσύνολα του $\mathcal{V}$ για τα οποία ισχύουν τα εξής:*

1. *Το σύνολο $\mathcal{F}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

2. *Το σύνολο $\mathcal{G}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$.*

Τότε υπάρχει μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{V}$ έτσι ώστε: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την συλλογή $\mathfrak{H}$ όλων των υποσυνόλων $\mathcal{H}$ του $\mathcal{V}$ τα οποία ικανοποιούν τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

1. Κάθε υποσύνολο $\mathcal{H} \in \mathfrak{H}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Για κάθε υποσύνολο $\mathcal{H} \in \mathfrak{H}$ ισχύει: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$.

Δηλαδή:

$$\mathfrak{H} := \{\mathcal{H} \subseteq \mathcal{V} \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \text{ και το } \mathcal{H} \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητο}\}$$

Παρατηρούμε ότι η συλλογή υποσυνόλων $\mathfrak{H}$ είναι μη-κενή και περιέχει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία, δηλαδή πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathcal{V}$ με τις ιδιότητες 1. και 2. Πράγματι· η συλλογή $\mathfrak{H}$ είναι μη-κενή διότι περιέχει το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, και το πλήθος των στοιχείων της $\mathfrak{H}$ είναι πεπερασμένο διότι κάθε στοιχείο της $\mathfrak{H}$ περιέχεται στο σύνολο $\mathcal{G}$ και το $\mathcal{G}$ είναι πεπερασμένο από την υπόθεση. Επομένως μπορούμε να διαλέξουμε εκείνο το στοιχείο $\mathcal{B}$ του $\mathfrak{H}$ με το μικρότερο πλήθος στοιχείων. Με άλλα λόγια από την κατασκευή του το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι το υποσύνολο του $\mathcal{V}$ με το μικρότερο πλήθος στοιχείων το οποίο είναι γραμμικά ανεξάρτητο και περιέχει το $\mathcal{F}$ και περιέχεται στο $\mathcal{G}$: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{B}$.

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι εκ' κατασκευής γραμμικά ανεξάρτητο, αρκεί να δείξουμε ότι παράγει τον $\mathcal{V}$. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{G}$ ένα τυχόν διάνυσμα του $\mathcal{G}$. Αν $\vec{x} \in \mathcal{B}$, τότε το $\vec{x}$ είναι τετριμμένα γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του $\mathcal{B}$. Έστω $\vec{x} \notin \mathcal{B}$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \cup \{\vec{x}\}$. Επειδή προφανώς το σύνολο $\mathcal{B}'$ ικανοποιεί τη σχέση $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{G}$ και έχει μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων από το $\mathcal{B}$, δεν μπορεί να είναι γραμμικά ανεξάρτητο από την κατασκευή του $\mathcal{B}$. Άρα το $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, και επομένως από την Πρόταση 4.1.5 έπεται ότι το $\vec{x}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλου $\mathcal{B}$.

Επειδή το $\mathcal{G}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$, κάθε διάνυσμα του $\mathcal{B}$ θα είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του $\mathcal{G}$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις, καταλήγουμε στο ότι το $\vec{x}$ θα είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του συνόλου $\mathcal{B}$. Άρα σε κάθε περίπτωση το τυχόν διάνυσμα $\vec{x}$ του $\mathcal{G}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του $\mathcal{B}$. Επειδή από την υπόθεση το σύνολο $\mathcal{G}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$, έπεται ότι και το $\mathcal{B}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$. Άρα το $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}$ η οποία εκ' κατασκευής περιέχει το σύνολο $\mathcal{F}$ και περιέχεται στο σύνολο $\mathcal{G}$. □

Το παραπάνω θεώρημα έχει δύο σημαντικά πορίσματα τα οποία δείχνουν ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος έχει τουλάχιστον μια βάση και επιπρόσθετα σε έναν τέτοιον χώρο κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση.

Πόρισμα 4.2.4 *[Ύπαρξη Βάσης] Έστω ότι $\mathcal{G} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$. Τότε υπάρχει ένα υποσύνολο $\mathcal{B}$ του $\mathcal{G}$ το οποίο είναι μια βάση του $\mathcal{V}$, δηλαδή υπάρχουν δείκτες $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}, \cdots, \vec{x}_{i_k}\}$ να είναι βάση του $\mathcal{V}$.*

Ιδιαίτερα κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος έχει τουλάχιστον μια βάση.

Απόδειξη: Θέτοντας $\mathcal{F} = \emptyset$, και παρατηρώντας ότι τετριμμένα το $\mathcal{F}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, από το Θεώρημα 4.2.3 έπεται ότι υπάρχει μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{V}$ με την ιδιότητα $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. Επομένως υπάρχουν δείκτες $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{x}_{i_1}, \vec{x}_{i_2}, \cdots, \vec{x}_{i_k}\}$ να είναι βάση του $\mathcal{V}$. □

Πόρισμα 4.2.5 *[Επέκταση Γραμμικά Ανεξάρτητου Υποσυνόλου σε μια Βάση] Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$, και έστω $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$. Τότε υπάρχουν διανύσματα $\vec{x}_{k+1}, \vec{x}_{k+2}, \cdots, \vec{x}_n$, όπου $n \geq 1$, έτσι ώστε το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, \vec{x}_{k+2}, \cdots, \vec{x}_n\}$ να είναι μια βάση του $\mathcal{V}$.*

Απόδειξη: Θέτουμε $\mathcal{F} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k\}$. Επειδή ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος, υπάρχει ένα σύνολο γεννητόρων $\mathcal{G}'$ του $\mathcal{V}$. Θέτουμε $\mathcal{G} := \mathcal{F} \cup \mathcal{G}'$. Τότε προφανώς το $\mathcal{G}$ παραμένει σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$ και εκ' κατασκευής περιέχει το σύνολο $\mathcal{F}$:: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$. Τότε από το Θεώρημα 4.2.3 έπεται ότι υπάρχει μια βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{V}$ με την ιδιότητα $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν διανύσματα $\vec{x}_{k+1}, \vec{x}_{k+2}, \cdots, \vec{x}_n$, όπου $n \geq 1$, έτσι ώστε το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k, \vec{x}_{k+1}, \vec{x}_{k+2}, \cdots, \vec{x}_n\}$ να είναι μια βάση του $\mathcal{V}$. □

Παράδειγμα 4.2.2 *Θεωρούμε τα διανύσματα*

$$\vec{x} = (2,1,4,3), \quad \vec{y} = (2,1,2,0)$$

του $\mathbb{R}^4$. *Θα δείξουμε ότι τα* $\vec{x}, \vec{y}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα και θα προσδιορίσουμε δύο διανύσματα* $\vec{z}, \vec{w}$ *έτσι ώστε το σύνολο* $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}\}$ *να αποτελεί βάση του* $\mathbb{R}^4$.

1. Έστω $k\vec{x} + l\vec{y} = \vec{0}$. *Τότε* $k(2,1,4,3) + l(2,1,2,0) = (0,0,0,0) \Rightarrow (2k+2l, k+l, 4k+2l, 3k) = (0,0,0,0)$. *Προφανώς η τελευταία σχέση δίνει ότι* $k = l = 0$ *και επομένως τα* $\vec{x}, \vec{y}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

2. Θεωρούμε την κανονική βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ *του* $\mathbb{R}^4$. *Αν το* $\vec{e}_1$ *ήταν γραμμικός συνδυασμός των* $\vec{x}$ *και* $\vec{y}$, *τότε θα είχαμε μια σχέση της μορφής:*

$$\vec{e}_1 = a\vec{x} + b\vec{y}, \text{ δηλαδή: } (1,0,0,0) = a(2,1,4,3) + b(2,1,2,0)$$

Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την $(1,0,0,0) = (2a+2b, 1+b, 4a+2b, 3a)$ *η οποία εύκολα βλέπουμε ότι είναι αδύνατη. Επομένως, από την Πρόταση 4.1.5, έπεται ότι το σύνολο* $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{e}_1\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Εργαζόμενοι παρόμοια βλέπουμε ότι το διάνυσμα* $\vec{e}_2$ *δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των* $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{e}_1\}$, *και επομένως το σύνολο* $\mathcal{B}' := \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θα δείξουμε ότι το σύνολο* $\mathcal{B}'$ *είναι μια βάση του* $\mathbb{R}^4$ *(Αν είχαμε αποδείξει σ' αυτό το σημείο το Θεώρημα 4.3.8, το ζητούμενο θα ήταν άμεσο). Αρκεί να δείξουμε ότι το* $\mathcal{B}'$ *παράγει τον* $\mathbb{R}^4$. *Θα έχουμε:*

$$\vec{x} - \vec{y} = (0,0,2,3) = 2\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4$$

$$\vec{x} - 2\vec{y} = (-2,-1,0,3) = -2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_4$$

Άρα αφαιρώντας θα έχουμε $\vec{y} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$. *Επομένως:*

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{2}\vec{y} - \vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2$$

Τότε από την πρώτη σχέση θα έχουμε:

$$\vec{e}_4 = \frac{1}{3}[\vec{x} - \vec{y} - 2\vec{e}_3] = \frac{1}{3}[\vec{x} - 2\vec{y} + 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2]$$

Τώρα επειδή κάθε διάνυσμα $\vec{r} = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ *είναι γραμμικός συνδυασμός των* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$: $\vec{r} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + d\vec{e}_4$, *λαμβάνοντας υπ' όψιν τις παραπάνω σχέσεις, θα έχουμε:*

$$\vec{r} = (a - c + \frac{2d}{3})\vec{e}_1 + (b - \frac{c}{2} + \frac{d}{3})\vec{e}_2 + (\frac{d}{3} - c)\vec{x} + (\frac{c}{2} - \frac{2d}{3})\vec{y}$$

και επομένως το σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B}'$ *παράγει τον* $\mathbb{R}^4$. *Έτσι θέτοντας* $\vec{z} = \vec{e}_1$ *και* $\vec{w} = \vec{e}_2$ *έχουμε το ζητούμενο.*

4.3 Η Έννοια της Διάστασης

Έχοντας δείξει ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ έχει τουλάχιστον μια βάση, προκύπτει εύλογα το ερώτημα αν δύο τυχούσες βάσεις του $\mathbb{V}$ έχουν κάποιες κοινές ιδιότητες. Το Παράδειγμα 4.1.3 δείχνει ότι τα διανύσματα δύο βάσεων μπορεί να είναι διαφορετικά, επομένως δεν μπορούμε να περιμένουμε δύο τυχούσες βάσεις να έχουν κοινά διανύσματα. Όπως θα δείξουμε παρακάτω η ιδιότητα η οποία παραμένει αναλλοίωτη είναι ότι δύο τυχούσες βάσεις περιέχουν τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων.

Το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα είναι το κλειδί για την απόδειξη του αναλλοίωτου του πλήθους διανυσμάτων δύο βάσεων.

Λήμμα 4.3.1 *[Λήμμα Ανταλλαγής] Έστω $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{V}$ ένα πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων το οποίο παράγει τον $\mathcal{V}$, και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$. Τότε $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{G}|$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με εις άτοπο επαγωγή: Υποθέτουμε ότι $|\mathcal{F}| > |\mathcal{G}|$ και θα δείξουμε ότι αυτή η υπόθεση θα μας οδηγήσει σε άτοπο. Έστω $\mathcal{G} = \{\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n\}$. Τότε από την υπόθεση μας έχουμε ότι $|\mathcal{F}| > n$. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\mathcal{F}$ περιέχει τουλάχιστον $n+1$ διανύσματα ή ισοδύναμα το $\mathcal{F}$ περιέχει ένα υποσύνολο $\mathcal{F}' := \{\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n, \vec{y}_{n+1}\} \subseteq \mathcal{F}$ το οποίο αποτελείται από $n+1$ διανύσματα. Η στρατηγική μας είναι να αντικαταστήσουμε τα διανύσματα του συνόλου $\mathcal{G}$ με διανύσματα του συνόλου $\mathcal{F}'$ με τέτοιο τρόπο ώστε το το σύνολο που θα προκύψει να παραμείνει σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$.

Εν πρώτοις παρατηρούμε ότι επειδή το $\mathcal{F}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, από την Πρόταση 4.1.4 έπεται ότι και το σύνολο $\mathcal{F}'$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επειδή το $\mathcal{G}$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$, έπεται ότι το $\vec{y}_1 \in \mathcal{F}'$ θα είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του $\mathcal{G}$. Έτσι θα έχουμε ότι

$$\vec{y}_1 = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \cdots + k_n\vec{x}_n, \;\; k_i \in \mathbb{K}, \; 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

Αν $k_i = 0, \forall i = 1, \cdots, n$, τότε $\vec{y}_1 = \vec{0}$ και αυτό είναι άτοπο διότι το μονοσύνολο $\{\vec{y}_1\}$ είναι υποσύνολο του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου $\mathcal{F}'$ και γνωρίζουμε ότι το μονοσύνολο $\{\vec{0}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο από το Λήμμα 4.1.3. Άρα υπάρχει $i = 1, \cdots, n$ έτσι ώστε $k_i \neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, εν ανάγκει αλλάζοντας την αρίθμηση των $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$, ότι $k_1 \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της (1) με k_1^{-1}, θα έχουμε ισοδύναμα τη σχέση

$$\vec{x}_1 = k_1^{-1}\vec{y}_1 + (-k_1^{-1}k_2)\vec{x}_2 + \cdots + (-k_1^{-1}k_n)\vec{x}_n \tag*{(1)$'$}$$

Επειδή το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ παράγει τον $\mathcal{V}$ και το $\vec{x}_1$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{y}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, έπεται άμεσα ότι και το σύνολο $\{\vec{y}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ παράγει τον $\mathcal{V}$.

Επομένως το διάνυσμα $\vec{y}_2$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\{\vec{y}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$, δηλαδή:

$$\vec{y}_2 = l_1\vec{y}_1 + l_2\vec{x}_2 + \cdots + l_n\vec{x}_n, \;\; l_i \in \mathbb{K}, \; 1 \leq i \leq n \tag{2}$$

Αν $l_i = 0$, $\forall i = 2, \cdots, n$, τότε θα έχουμε $\vec{y}_2 = l_1\vec{y}_1$, δηλαδή τα $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, και αυτό είναι άτοπο διότι το σύνολο $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο ως υποσύνολο του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου $\mathcal{F}'$. Άρα υπάρχει $i = 2, \cdots, n$ έτσι ώστε $l_i \neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, εν ανάγκει αλλάζοντας την αρίθμηση των $\vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$, ότι $l_2 \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της (2) με l_2^{-1}, θα έχουμε ισοδύναμα τη σχέση

$$\vec{x}_2 = l_2^{-1}\vec{y}_2 + (-l_2^{-1}l_1)\vec{y}_1 + (-l_2^{-1}l_3)\vec{x}_3 + \cdots + (-l_2^{-1}l_n)\vec{x}_n \tag*{$(2)'$}$$

Επειδή το σύνολο $\{\vec{y}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ παράγει τον $\mathcal{V}$ και το $\vec{x}_2$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_3, \cdots, \vec{x}_n$, έπεται άμεσα ότι και το σύνολο $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_3, \cdots, \vec{x}_n\}$ παράγει τον $\mathcal{V}$.

Μέχρι τώρα έχουμε αντικαταστήσει τα δύο πρώρα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ του συνόλου των γεννητόρων $\mathcal{G}$ με τα δύο πρώτα διανύσματα $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ έτσι ώστε το σύνολο $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_3, \cdots, \vec{x}_n\}$ που προκύπτει να παραμένει σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία αντικατάστασης ενός διανύσματος του $\mathcal{G}$ με ένα διάνυσμα του $\mathcal{F}'$, μετά από n βήματα, καταλήγουμε να αντικαταστήσουμε τα διανύσματα του $\mathcal{G}$ με τα διανύσματα του $\mathcal{F}'$, και το σύνολο $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n\}$ παραμένει σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$. Επομένως, συνεχίζοντας στο $(n+1)$ βήμα, το διάνυσμα $\vec{y}_{n+1}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n\}$, δηλαδή:

$$\vec{y}_{n+1} = m_1\vec{y}_1 + m_2\vec{y}_2 + \cdots + m_n\vec{y}_n, \;\; m_i \in \mathbb{K}, \; 1 \leq i \leq n \tag{$n+1$}$$

Τότε όμως από την Πρόταση 4.1.5 έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{F}' = \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \cdots, \vec{y}_n, \vec{y}_{n+1}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο και αυτό είναι άτοπο. Στο άτοπο καταλήξαμε υποθέτοντας ότι $|\mathcal{F}| > |\mathcal{G}|$. Επομένως θα έχουμε $|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{G}|$. $\square$

Πόρισμα 4.3.2 *Κάθε βάση ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ περιέχει πεπερασμένο πλήθος διανυσμάτων.*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{B}$ μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$, ιδιαίτερα το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επειδή ο $\mathcal{V}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος, έπεται ότι ο $\mathcal{V}$ έχει ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων $\mathcal{G}$. Τότε από το Λήμμα Ανταλλαγής 4.3.1 θα έχουμε ότι $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{G}| < \infty$. □

Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το ακόλουθο θεμελιώδες αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.3.3 *Έστω $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$ δύο βάσεις ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$. Τότε $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος Ανταλλαγής 4.3.1: Επειδή τα σύνολα $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ είναι βάσεις, θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα γεννητόρων του $\mathcal{V}$.

1. Επειδή το $\mathcal{B}_1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και το $\mathcal{B}_2$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$, από το Λήμμα Ανταλλαγής θα έχουμε: $|\mathcal{B}_1| \leq |\mathcal{B}_2|$.

2. Επειδή το $\mathcal{B}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και το $\mathcal{B}_1$ είναι σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$, από το Λήμμα Ανταλλαγής θα έχουμε: $|\mathcal{B}_2| \leq |\mathcal{B}_1|$.

Επομένως: $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$. □

Το παραπάνω Θεώρημα μας οδηγεί άμεσα στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.3.4 *Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Το πλήθος των διανυσμάτων μιας τυχούσας βάσης $\mathcal{B}$ του $\mathcal{V}$ καλείται* **διάσταση** *του $\mathcal{V}$ και συμβολίζεται ως εξής:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} := |\mathcal{B}|, \quad \mathcal{B} \text{ είναι τυχούσα βάση του } \mathcal{V}$$

Από τώρα και στο εξής πεπερασμένα παραγόμενοι διανυσματικοί χώροι $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ θα καλούνται **διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης** και τότε θα γράφουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} < \infty$. Το υπόλοιπο μέρος των σημειώσεων θα αφιερωθεί στην μελέτη τους.

Σχόλιο 4.3.1 *Όπως έχουμε δει η έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου, και άρα και η έννοια της βάσης, εξαρτάται από το σώμα υπεράνω του οποίου είναι ορισμένος ο διανυσματικός χώρος. Επομένως και η έννοια της διάστασης εξαρτάται από το σώμα υπεράνω του οποίου είναι ορισμένος ο διανυσματικός χώρος. Αυτή την εξάρτηση υποδηλώνει και ο συμβολισμός $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$.*

Έτσι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ έχει $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, διότι ο αριθμός $1 \in \mathbb{C}$ είναι μια βάση του $\mathbb{C}$ υπεράνω του $\mathbb{C}$. Πράγματι $1 \neq 0$ και άρα το 1 είναι γραμμικά ανεξάρτητο διάνυσμα του $\mathbb{C}$. Από την άλλη πλευρά κάθε μιγαδικός *αριθμός z γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός $z = z1$ του 1 με συντελεστές από το $\mathbb{C}$. Άρα το σύνολο $\{1\}$ειναι μια βάση του $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ και επομένως $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.*

Από την άλλη πλευρά ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ έχει διάσταση 2 διότι το σύνολο $\{1, i\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{C}$ υπεράνω του $\mathbb{R}$. Πράγματι όπως έχουμε δει το σύνολο $\{1, i\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υπεράνω του $\mathbb{R}$. Επειδή κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται ως $z = a + bi = a1 + bi$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$, έπεται ότι το σύνολο $\{1, i\}$ παράγει τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ και άρα αποτελεί βάση του. Επομένως $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Παρατήρηση 4.3.5 [Διανυσματικοί Χώροι Άπειρης Διάστασης] *Διανυσματικοί χώροι $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ οι οποίοι δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενοι καλούνται χώροι άπειρης διάστασης. Γι' αυτούς τους χώρους θα γράφουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \infty$. Η θεωρία των χώρων άπειρης διάστασης, η οποία είναι αντικείμενο διαφορετικών μαθημάτων, π.χ. της Συναρτησιακής Ανάλυσης, δεν θα μας απασχολήσει στις παρούσες σημειώσεις παρά μόνο περιστασιακά. Ο συμβολισμός $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \infty$ υποδηλώνει ότι ο χώρος $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ δεν είναι πεπερασμένης διάστασης, δηλαδή δεν έχει βάση με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων ή ισοδύναμα δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενος.*

Από την άλλη πλευρά η έννοια της βάσης, όπως την έχουμε ορίσει, έχει έννοια και για άπειρα σύνολα, και επομένως και για διανυσματικούς χώρους οι οποίοι δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενοι. Μπορεί κανείς να δείξει ότι δύο τυχούσες βάσεις ενός τυχόντος διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$, όχι κατ' ανάγκην πεπερασμένα παραγόμενου, έχουν το ίδιο (ενδεχόμενα άπειρο) πλήθος στοιχείων. Η κοινή αυτή τιμή καλείται όπως και παραπάνω διάσταση του $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$. Σ' αυτό το σημείο θα πρέπει να είναι κανείς προσεκτικός καθώς υπάρχουν διαφορετικές έννοιες και «ποιότητες» απείρου, και επομένως κάποια διάκριση είναι αναγκαία.

Ενδεικτικά αναφέρουμε, χωρίς απόδειξη, τα ακόλουθα παραδείγματα διανυσματικών χώρων άπειρης διάστασης.

1. $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$, *δηλαδή το σώμα των πραγματικών αριθμών θεωρούμενο σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος των ρητών έχει άπειρη διάσταση.*

2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t] = \infty$, *δηλαδή ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων υπεράνω του $\mathbb{K}$ έχει άπειρη διάσταση.*

3. $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(S, \mathbb{R}) = \infty$, *όπου S είναι ένα άπειρο σύνολο· δηλαδή ο διανυσματικός χώρος όλων των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένα άπειρο σύνολο, βλέπε 4.3.7 έχει άπειρη διάσταση.*

   Τυπικά διανυσματικοί χώροι συναρτήσεων, οι οποίοι είναι αντικείμενο της Ανάλυσης, είναι άπειρης διάστασης.

Στις παρούσες σημειώσεις κυρίως θα μας απασχολήσουν πεπερασμένα παραγόμενοι υπόχωροι διανυσματικών χώρων άπειρης διάστασης. Τέτοιοι υπόχωροι υπάρχουν σε αφθονία όπως δείχνει η ακόλουθη άμεση συνέπεια του Πορίσματος 4.2.4:

Πόρισμα 4.3.6 *Έστω $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ (ο οποίος δεν είναι κατ' ανάγκην πεπερασμένης διάστασης). Αν ο $\mathcal{W}$ παράγεται από πεπερασμένα το πλήθος διανύσματα, τότε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} < \infty$.*

Παράδειγμα 4.3.2 *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $n \geq 1$.*

1. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$.

Πράγματι: για κάθε μη-μηδενικό στοιχείο $k \in \mathbb{K}$, το μονοσύνολο $\{k\}$ είναι βάση του $\mathbb{K}$ και επομένως $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$.

2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

Πράγματι: Έχουμε δείξει ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$, όπου $\vec{e}_i = (0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ (το 1 εμφανίζεται στην i συνιστώσα), είναι μια βάση του $\mathbb{K}^n$. Άρα $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

3. $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[t] = n + 1$.

Πράγματι: Έχουμε δείξει ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \cdots, t^n\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[t]$, και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[t] = n + 1$.

Παράδειγμα 4.3.3 *Έστω τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}^4$:*

$$\mathcal{V} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

$$\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

Θα υπολογίσουμε μια βάση και την διάσταση του υπόχωρου $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.

Έστω $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Προσθέτοντας και ακολούθως αφαιρώντας τις εξισώσεις $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ και $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, θα έχουμε άμεσα ότι $x_1 = -x_3$ και $x_2 = -x_4$. Αντίστροφα κάθε στοιχείο $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ έτσι ώστε $x_1 = -x_3$ και $x_2 = -x_4$, ανήκει προφανώς στον υπόχωρο $\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. Επομένως:

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = -x_3, \quad x_2 = -x_4\}$$

$$= \{(x_1, x_2, -x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x_1(1, 0, -1, 0) + x_2(0, 1, 0, -1) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Επομένως $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2 \rangle$, *όπου* $\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0, -1, 0)$, *και* $\vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0, -1)$. *Εύκολα βλέπουμε ότι το σύνολο* $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και άρα αποτελεί μια βάση του υπόχωρου* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. *Συμπεραίνουμε ότι* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} \cap \mathcal{W} = 2$.

Πρόταση 4.3.7 *Έστω* $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \cdots, \mathcal{V}_n$ *διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$. *Τότε:*

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \times \cdots \times \mathcal{V}_n) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_2 + \cdots + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_n}$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε την ζητούμενη σχέση όταν $n = 2$· η γενική περίπτωση προκύπτει άμεσα με επαγωγή. Έστω $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{V}_1$ και $\mathcal{B}_2 = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$ μια βάση του $\mathcal{V}_2$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} := \{(\vec{e}_1, \vec{0}), (\vec{e}_2, \vec{0}), \cdots, (\vec{e}_n, \vec{0}), (\vec{0}, \vec{\varepsilon}_1), (\vec{0}, \vec{\varepsilon}_2), \cdots, (\vec{0}, \vec{\varepsilon}_m)\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$. Δείχνουμε πρώτα ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ παράγει τον $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$. Έστω $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ ένα τυχόν διάνυσμα. Επειδή $\vec{x} \in \mathcal{V}_1$ και το σύνολο $\mathcal{B}_1$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}_1$, έπεται ότι $\vec{x} = k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + \cdots + k_n\vec{e}_n$, $k_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Παρόμοια επειδή $\vec{y} \in \mathcal{V}_2$ και το σύνολο $\mathcal{B}_2$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}_2$, έπεται ότι $\vec{y} = l_1\vec{\varepsilon}_1 + l_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m$, $l_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq j \leq m$. Τότε θα έχουμε τη σχέση

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + \cdots + k_n\vec{e}_n, l_1\vec{\varepsilon}_1 + l_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m) =$$
$$k_1(\vec{e}_1, \vec{0}) + k_2(\vec{e}_2, \vec{0}) + \cdots + k_n(\vec{e}_n, \vec{0}) + l_1(\vec{0}, \vec{\varepsilon}_1) + l_2(\vec{0}, \vec{\varepsilon}_2) + \cdots + l_m(\vec{0}, \vec{\varepsilon}_m)$$

η οποία δείχνει ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ παράγει τον χώρο $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι το $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω ότι υπάρχουν αριθμοί $k_i, l_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, έτσι ώστε:

$$k_1(\vec{e}_1, \vec{0}) + k_2(\vec{e}_2, \vec{0}) + \cdots + k_n(\vec{e}_n, \vec{0}) + l_1(\vec{0}, \vec{\varepsilon}_1) + l_2(\vec{0}, \vec{\varepsilon}_2) + \cdots + l_m(\vec{0}, \vec{\varepsilon}_m) = (\vec{0}, \vec{0})$$

Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$(k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + \cdots + k_n\vec{e}_n, l_1\vec{\varepsilon}_1 + l_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m) = (\vec{0}, \vec{0})$$

από την οποία συνάγεται άμεσα ότι

$$k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + \cdots + k_n\vec{e}_n = \vec{0}, \quad l_1\vec{\varepsilon}_1 + l_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m = \vec{0}$$

Από τη γραμμική ανεξαρτησία των συνόλων $\mathcal{B}_1$ και $\mathcal{B}_2$ έπεται ότι $k_i = 0, \forall i = 1, 2, \cdots, n$ και $l_j = 0, \forall j = 1, 2, \cdots, m$. Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και επομένως είναι μια βάση του $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$. Τότε όμως

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2) = |\mathcal{B}| = n + m = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}_2$$

□

Παράδειγμα 4.3.4 *1.* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R} \times \mathbb{C}) = 3$.

2. Η Πρόταση 4.3.7 δίνει μια άλλη απόδειξη του τύπου 2. του Παραδείγματος 4.3.2. Πραγματικά αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ *(n-παράγοντες).*

Άσκηση 4.3.5 *Έστω $\mathcal{V}$ το σύνολο των λύσεων της γραμμικής εξίσωσης:*

$$k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = 0$$

δηλαδή:

$$\mathcal{V} := \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n = 0\}$$

όπου $k_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Να προσδιορισθεί μια βάση και η διάσταση του $\mathcal{V}$.

Λύση: *Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:*

1. Αν $k_i = 0$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, τότε προφανώς $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$. Επομένως $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n$, και τυχούσα βάση, π.χ. η κανονική, είναι βάση του $\mathcal{V}$.

2. Έστω ότι $(k_1, k_2, \cdots, k_n) \neq (0, 0, \cdots, 0)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $k_i \neq 0$. Τότε από την Εφαρμογή 3.2.11 έπεται ότι το σύνολο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$

$$\vec{\lambda}_1 := (1, 0, \cdots, 0, l_1, 0, \cdots, 0), \ \cdots, \ \vec{\lambda}_{i-1} := (0, 0, \cdots, 1, l_{i-1}, 0, \cdots, 0), \ \cdots$$

$$\vec{\lambda}_{i+1} := (0, 0, \cdots, 0, l_{i+1}, 1, \cdots, 0), \ \cdots, \ \vec{\lambda}_n := (0, 0, \cdots, 0, l_n, 0, \cdots, 1)$$

όπου οι αριθμοί $l_j := \frac{k_j}{k_i}$, $\forall j \neq i$, εμφανίζονται στην i-συντεταγμένη, είναι ένα σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} \ = \ \{\vec{\lambda}_1, \cdots, \vec{\lambda}_{i-1}, \vec{\lambda}_{i+1}, \cdots, \vec{\lambda}_n\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του $\mathcal{V}$. Έστω $\mu_1\vec{\lambda}_1 + \mu_2\vec{\lambda}_2 + \cdots + \mu_{i-1}\vec{\lambda}_{i-1} + \mu_{i+1}\vec{\lambda}_{i+1} + \cdots + \mu_n\vec{\lambda}_n = \vec{0}$. Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την $(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{i-1}, \mu, \mu_{i+1}, \cdots, \mu_n) = (0, 0, \cdots, 0)$, όπου $\mu := \mu_1 l_1 + \mu_2 l_2 + \cdots + \mu_n l_n$. Τετριμμένα αυτές οι σχέσεις συνεπάγουν ότι $\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$, και άρα πράγματι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Συμπεραίνουμε ότι $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = n - 1$, διότι η βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{V}$ έχει $n - 1$ στοιχεία.

Κλείνουμε την παρούσα παράγραφο με κάποιες σημαντικές συνέπειες των όσων έχουμε αποδείξει μέχρι τώρα.

Θεώρημα 4.3.8 *1. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, τότε κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{V}$ έχει το πολύ n στοιχεία.*

2. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, τότε κάθε σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{V}$ έχει τουλάχιστον n στοιχεία.

3. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, τότε κάθε σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$ με περισσότερα από n στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένο.

4. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, τότε κάθε σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{B}$ του $\mathcal{V}$ το οποίο ικανοποιεί 2 από τις ακόλουθες 3 ιδιότητες είναι βάση.

(a) *Το $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

(b) *Το $\mathcal{B}$ παράγει τον $\mathcal{V}$.*

(c) *Το $\mathcal{B}$ έχει ακριβώς n στοιχεία.*

Απόδειξη: 1. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.5, κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο $\mathcal{F}$ του $\mathcal{V}$ επεκτείνεται σε μια βάση του $\mathcal{V}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, έπεται ότι $|\mathcal{F}| \leq n$.

2. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.4, κάθε σύνολο γεννητόρων $\mathcal{G}$ του $\mathcal{V}$ περιέχει σαν υποσύνολο μια βάση του $\mathcal{V}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, έπεται ότι $|\mathcal{G}| \geq n$.

3. Προκύπτει άμεσα από το 1.

4. Αν το υποσύνολο $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τα (a), (b), τότε το $\mathcal{B}$ είναι εξ' ορισμού βάση του $\mathcal{V}$. Αν το υποσύνολο $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τα (a), (c), τότε από το (a) και το Πόρισμα 4.2.5, το $\mathcal{B}$ επεκτείνεται σε μια βάση $\mathcal{B}'$ του $\mathcal{V}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, η βάση $\mathcal{B}'$ έχει n το πλήθος στοιχεία. Επειδή $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$ και $|\mathcal{B}| = n$, έπεται ότι $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, και άρα το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathcal{V}$. Αν το υποσύνολο $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τα (b), (c), τότε από το (b) και το Πόρισμα 4.2.4, το $\mathcal{B}$ περιέχει σαν υποσύνολο μια βάση $\mathcal{B}'$ του $\mathcal{V}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, η βάση $\mathcal{B}'$ έχει n το πλήθος στοιχεία. Επειδή $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ και $|\mathcal{B}| = n$, έπεται ότι $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, και άρα το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathcal{V}$. □

Άσκηση 4.3.6 *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Να δείξετε ότι το σύνολο:*

$$\mathcal{B}' := \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 + \cdots + \vec{\varepsilon}_n\}$$

είναι επίσης μια βάση του $\mathcal{V}$.

Λύση: *Επειδή $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.8, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}'$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω*

$$k_1\vec{\varepsilon}_1 + k_2(\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2) + \cdots + k_n(\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 + \cdots + \vec{\varepsilon}_n) = \vec{0}$$

Αυτή η σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$(k_1 + k_2 + \cdots + k_n)\vec{\varepsilon}_1 + (k_2 + \cdots + k_n)\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + (k_{n-1} + k_n)\vec{\varepsilon}_{n-1} + k_n\vec{\varepsilon}_n = \vec{0}$$

Επειδή το σύνολο $\{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ότι θα έχουμε:*

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k_2 + \cdots + k_n = \cdots = k_{n-1} + k_n = k_n = 0$$

Οι τελευταίες σχέσεις προφανώς δίνουν ότι $k_1 = \cdots = k_n = 0$. *Άρα το σύνολο* $\mathcal{B}'$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Παράδειγμα 4.3.7 *Παραδείγματα Βάσεων στον* $\mathbb{K}_n[t]$.

1. Έστω $P(t) \in \mathbb{K}_n[t]$ *ένα πολυώνυμο βαθμού* n. *Τότε το σύνολο*

$$\mathcal{B} := \{P(t), P'(t), P''(t), \cdots, P^{(n)}(t)\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[t]$*, όπου* $P^{(k)}(t)$ *είναι η παράγωγος* k*-τάξης του* $P(t)$.

Πραγματικά: Επειδή $\deg P(t) = n$*, έπεται άμεσα ότι* $\deg P'(t) = n-1$, $\deg P''(t) = n-2, \cdots, \deg P^{(n-1)}(t) = 1, \deg P^{(n)}(t) = 0$. *Από το Παράδειγμα 4.1.5 έπεται ότι το σύνολο* $\mathcal{B}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επειδή* $|\mathcal{B}| = n+1$ *επειδή από το Παράδειγμα 4.3.2 έχουμε* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[t] = n+1$*, από το Θεώρημα 4.3.8 έπεται ότι το σύνολο* $\mathcal{B}$ *είναι βάση του* $\mathbb{K}_n[t]$.

2. Έστω $\alpha \in \mathbb{K}$. *Τότε το σύνολο*

$$\mathcal{C} := \{1, (t-\alpha), (t-\alpha)^2, \cdots, (t-\alpha)^n\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{K}_n[t]$.

Εργαζόμενοι όπως και στο 1., επειδή το πλήθος των διανυσμάτων του συνόλου $\mathcal{C}$ *είναι* $n+1 = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[t]$*, από το Θεώρημα 4.3.8 έπεται ότι το σύνολο* $\mathcal{C}$ *είναι βάση του* $\mathbb{K}_n[t]$.

Ερώτηση: *Ποιές είναι οι συνιστώσες του τυχόντος πολυωνύμου* $P(t) \in \mathbb{K}_n[t]$ *στην παραπάνω βάση;*

Απάντηση: *Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor από τον Απειροστικό Λογισμό, έπεται ότι το πολυώνυμο* $P(t)$ *γράφεται μοναδικά ως εξής:*

$$P(t) = P(\alpha) + \frac{P'(\alpha)}{1!}(t-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}(t-\alpha)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(t-\alpha)^n$$

και επομένως οι συνιστώσες είναι: $\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}, 0 \le k \le n$.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να εξετασθεί αν τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{K}_n[t]$ είναι βάσεις του $\mathbb{K}_n[t]$:

1. $\{1, 1+t, 1+t+t^2, \cdots, 1+t+t^2+\cdots+t^n\}$.
2. $\{1+t, t+t^2, \cdots, t^{n-1}+t^n\}$.
3. $\{1, 1-t, (1-t)^2, \cdots, (1-t)^n\}$.

4.4 Διάσταση Υπόχωρων

Αν $\mathcal{W}$ είναι ένας υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{V}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, τότε όπως έχουμε δει ο $\mathcal{W}$ με τους περιορισμούς των πράξεων του $\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$, και επομένως ορίζεται η διάσταση του $\mathcal{W}$, όταν αυτός είναι πεπερασμένα παραγόμενος. Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά της διάστασης ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης σε σχέση με τους υπόχωρους του.

Αρχίζουμε με την ακόλουθη πρόταση η οποία δείχνει ότι η ιδιότητα ενός διανυσματικού χώρου να είναι πεπερασμένης διάστασης κληρονομείται στους υπόχωρους του.

Πρόταση 4.4.1 *Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$.*

1. *Ο υπόχωρος $\mathcal{W}$ έχει πεπερασμένη διάσταση.*
2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$.
3. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$ *αν-ν* $\mathcal{W} = \mathcal{V}$.

Απόδειξη: Έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n < \infty$.

1. - 2. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.8, κάθε σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$, και άρα και του $\mathcal{W}$, με περισσότερα από $n + 1$ στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένα. Άρα το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων του $\mathcal{W}$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο το n. Έστω $\mathcal{C} := \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$ το υποσύνολο του $\mathcal{W}$ με το μεγαλύτερο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Τότε τα διανύσματα του $\mathcal{C}$ είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα θεωρούμενα ως διανύσματα του $\mathcal{V}$, και άρα $m \leq n$. Έστω $\vec{y} \in \mathcal{W}$· τότε το σύνολο $\mathcal{C} \cup \{\vec{y}\} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m, \vec{y}\}$ έχει $m + 1$ στοιχεία και άρα από την κατασκευή του $\mathcal{C}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Από τη Πρόταση 4.1.5 έπεται ότι το $\vec{y}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του $\mathcal{C}$, και άρα το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του $\mathcal{W}$, και μάλιστα είναι μια βάση του $\mathcal{W}$ αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επομένως ο $\mathcal{W}$ είναι πεπερασμένα παραγόμενος, και μάλιστα, η διάσταση του είναι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = m = |\mathcal{C}| \leq n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$.

3. Προφανώς αν $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, τότε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$. Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} := n$ και έστω $\mathcal{C}$ μια βάση του $\mathcal{W}$. Τότε το σύνολο $\mathcal{C}$ περιέχει n διανύσματα τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα ως διανύσματα του $\mathcal{W}$, άρα και ως διανύσματα του $\mathcal{V}$. Από το Θεώρημα 4.3.8 έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι και βάση του $\mathcal{V}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\mathcal{V} = \langle \mathcal{C} \rangle = \mathcal{W}$. □

Σχόλιο 4.4.1 *1. Σύμφωνα με τη Πρόταση 4.4.1 υπόχωροι διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης έχουν πεπερασμένη διάσταση. Από τώρα και στο εξής θα χρησιμοποιούμε αυτό το σημαντικό αποτέλεσμα χωρίς περαιτέρω αναφορά.*

2. Η διάσταση του μηδενικού υπόχωρου $\{\vec{0}\}$ είναι, όπως θα περίμενε κανείς, ίση με 0. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι μια βάση του $\{\vec{0}\}$. Αντίστροφα αν $\mathcal{W}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = 0$, τότε $\mathcal{W} = \{\vec{0}\}$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα χαρακτηρίζει το ευθύ άθροισμα υπόχωρων συναρτήσει ιδιοτήτων της διάστασης των υπόχωρων.

Πρόταση 4.4.2 *Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{Z}$ και $\mathcal{W}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{V}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ είναι ευθύ.*

2. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} + \mathcal{Z}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z}$.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{W}$ και $\mathcal{D} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$ μια βάση του $\mathcal{Z}$.

1. $\Rightarrow$ 2. Επειδή το άθροισμα $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ είναι ευθύ, έπεται εξ' ορισμού ότι $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z} = \{\vec{0}\}$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n, \vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$, το οποίο είναι προφανώς υποσύνολο του $\mathcal{W}+\mathcal{Z}$, είναι μια βάση του $\mathcal{W}+\mathcal{Z}$. Έστω $k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n + l_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m = \vec{0}$, όπου $k_i, l_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Τότε θα έχουμε ισοδύναμα τη σχέση:

$$k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n = (-l_1)\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + (-l_m)\vec{\varepsilon}_m \tag{$\dagger$}$$

Το πρώτο μέλος της ($\dagger$), ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του $\mathcal{W}$, ανήκει στον υπόχωρο$\mathcal{W}$. Παρόμοια το δεύτερο μέλος της ($\dagger$), ως γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του $\mathcal{Z}$, ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{Z}$. Επομένως και τα δύο μέλη της $\dagger$) ανήκουν στην τομή $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z} = \{\vec{0}\}$. Άρα $k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n = \vec{0}$ και $(-l_1)\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + (-l_m)\vec{\varepsilon}_m = \vec{0}$. Όμως τα διανύσματα $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ και $\{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα καθώς αποτελούν βάσεις των $\mathcal{W}$ και $\mathcal{Z}$ αντίστοιχα. Άρα $k_1 = \cdots = k_n = 0$ και $l_1 = \cdots = l_m = 0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω τώρα $\vec{x} \in \mathcal{W}+\mathcal{Z}$ ένα τυχόν διάνυσμα του υπόχωρου $\mathcal{W}+\mathcal{Z}$. Τότε υπάρχουν διανύσματα $\vec{w} \in \mathcal{W}$ και $\vec{z} \in \mathcal{Z}$ έτσι ώστε $\vec{x} = \vec{w} + \vec{z}$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι βάση του $\mathcal{W}$, θα έχουμε $\vec{w} = k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n$, όπου $k_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Παρόμοια επειδή το σύνολο $\mathcal{D}$ είναι βάση του $\mathcal{Z}$, θα έχουμε $\vec{z} = l_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m$, όπου $l_j \in \mathbb{K}$,

$1 \leq j \leq m$. Τότε $\vec{x} = \vec{w} + \vec{z} = k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n + l_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m$, το οποίο σημαίνει ότι το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ παράγει τον υπόχωρο $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Άρα το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ αποτελεί βάση του $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ και επομένως θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} + \mathcal{Z}) = |\mathcal{C} \cup \mathcal{D}| = n + m = |\mathcal{C}| + |\mathcal{D}| = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + \dim \mathcal{Z}.$$

2. $\Rightarrow$ 1. Όπως και στην απόδειξη του 1. $\Rightarrow$ 2. βλέπουμε ότι το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ παράγει τον υπόχωρο $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση θα έχουμε $|\mathcal{C} \cup \mathcal{D}| = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z} = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} + \mathcal{Z})$, και επομένως από το Θεώρημα 4.3.8 θα έχουμε ότι το σύνολο $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ είναι μια βάση του $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Τώρα για να δείξουμε το 1., αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z} = \{\vec{0}\}$. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{W} \in \mathcal{Z}$. Τότε $\vec{x} \in \mathcal{W}$, και άρα επειδή το σύνολο $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_n\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{W}$, θα έχουμε $\vec{x} = k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n$, όπου $k_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Επίσης $\vec{x} \in \mathcal{Z}$, και άρα επειδή το σύνολο $\mathcal{D} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_m\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{Z}$, θα έχουμε $\vec{x} = l_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m$, όπου $l_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq j \leq m$. Τότε $\vec{x} = k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n = l_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + l_m\vec{\varepsilon}_m$ ή ισοδύναμα $k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n + (-l_1)\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + (-l_m)\vec{\varepsilon}_m = \vec{0}$. Επειδή, όπως δείξαμε παραπάνω, το σύνολο $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n, \vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ είναι βάση του $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$, θα έχουμε $k_i = 0 = l_j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\vec{x} = \vec{0}$. Άρα $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z} = \{\vec{0}\}$, και επομένως το άθροισμα $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ είναι ευθύ. □

Άσκηση 4.4.2 *Έστω τα ακόλουθα υποσύνολα του $\mathbb{R}_n[t]$:*

$$\mathcal{V} := \{P(t) \in \mathbb{R}_n[t] \mid P(t) = P(-t)\}$$

$$\mathcal{W} := \{P(t) \in \mathbb{R}_n[t] \mid P(t) = -P(-t)\}$$

Να δείξετε τα υποσύνολα $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωροι και ισχύει: $\mathbb{R}_n[t] = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. Ποιά είναι η διάσταση του $\mathcal{V}$ και ποιά του $\mathcal{W}$;

Το ακόλουθο Θεώρημα περιγράφει μια σπουδαία ιδιότητα την οποία ικανοποιούν οι διανυσματικοί χώροι, και η οποία δείχνει ότι κάθε υπόχωρος έχει έναν «συμπληρωματικό» υπόχωρο ως προς το ευθύ άθροισμα υπόχωρων.

Θεώρημα 4.4.3 *Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας πεπερασμένα παραγόμενα δανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε για κάθε υπόχωρο $\mathcal{W}$ του $\mathcal{V}$, υπάρχει (τουλάχιστον ένας) υπόχωρος $\mathcal{Z}$ του $\mathcal{V}$ έτσι ώστε: $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$.*

Απόδειξη: Έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n < \infty$. Από την Πρόταση 4.4.1 έπεται ότι ο υπόχωρος $\mathcal{W}$ έχει πεπερασμένη διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = m \leq n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$. Έστω $\mathcal{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$ μια βάση του$\mathcal{W}$. Από το Πόρισμα 4.2.5 έπεται ότι υπάρχει ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathcal{D} := \{\vec{\varepsilon}_{m+1}, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ του $\mathcal{V}$, έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{B} := \mathcal{C} \cup \mathcal{D} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m, \vec{\varepsilon}_{m+1}, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ να είναι μια βάση του $\mathcal{V}$. Θέτουμε

$\mathcal{Z} := \langle \mathcal{D} \rangle = \langle \vec{\varepsilon}_{m+1}, \cdots, \vec{\varepsilon}_n \rangle$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{D}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{V}$ (ως υποσύνολο της βάσης $\mathcal{B}$), έπεται ότι το $\mathcal{D}$ είναι μια βάση του $\mathcal{Z}$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathcal{V}$, έπεται ότι $\vec{x} = k_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + k_m\vec{\varepsilon}_m + k_{m+1}\vec{\varepsilon}_{m+1} + \cdots + k_n\vec{\varepsilon}_n$. Θέτοντας $\vec{w} = k_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + k_m\vec{\varepsilon}_m$ και $\vec{z} = k_{m+1}\vec{\varepsilon}_{m+1} + \cdots + k_n\vec{\varepsilon}_n$, και χρησιμοποιώντας ότι $\mathcal{W} = \langle \vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_m \rangle$ και $\mathcal{Z} = \langle \vec{\varepsilon}_{m+1}, \cdots, \vec{\varepsilon}_n \rangle$, έπεται ότι $\vec{w} \in \mathcal{W}$ και $\vec{z} \in \mathcal{Z}$. Επομένως το τυχόν διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{V}$ γράφεται ως $\vec{x} = \vec{w} + \vec{z}$, όπου $\vec{w} \in \mathcal{W}$ και $\vec{z} \in \mathcal{Z}$. Άρα $\mathcal{V} = \mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = |\mathcal{B}| = n + m = |\mathcal{C}| + |\mathcal{D}| = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + \dim \mathcal{Z}$, από την Πρόταση 4.4.2 έπεται ότι το άθροισμα $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$ είναι ευθύ. Επομένως θα έχουμε $\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}$. □

Παρατήρηση 4.4.4 *Ο υπόχωρος $\mathcal{Z}$ που μας εξασφαλίζει το Θεώρημα 4.4.3 δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικός. Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ότι εν γένει υπάρχουν άπειροι το πλήθος διαφορετικοί υπόχωροι $\mathcal{Z}$ που ικανοποιούν το Θεώρημα.*

Έστω $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ και έστω $\mathcal{W} = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ που παράγεται από το διάνυσμα $(1,0)$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι τα ακόλουθα σύνολα $\mathcal{Z}_n := \{(x,nx) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$, $n \geq 1$, είναι ανά δύο διαφορετικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ και επιπρόσθετα: $\mathbb{R}^2 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}_1 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}_2 = \mathcal{W} \oplus \mathcal{Z}_3 = \cdots$ (Να το δειξετε σαν Ασκηση).

Πρόχειρη Δοκιμασία

Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \cdots, \mathcal{W}_n$ υπόχωροι του $\mathcal{V}$. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n$ είναι ευθύ.
2. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \cdots + \mathcal{W}_n) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W}_2 + \cdots + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W}_n$.

Πρόχειρη Δοκιμασία

Αν $\mathcal{V}_1$ και $\mathcal{V}_2$ είναι δύο υπόχωροι διάστασης 2 ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$, διάστασης 3, να δείξετε ότι $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \neq \{\vec{0}\}$.

Εάν το άθροισμα δύο υπόχωρων δεν είναι ευθύ, ο τύπος 2. στην Πρόταση 4.4.2 δεν ισχύει (Να βρειτε αντιπαραδειγμα). Ο τύπος που συνδέει τις διαστάσεις δύο υπόχωρων σε σχέση με τις διαστάσεις του αθροίσματος και της τομής τους δίνεται από το ακόλουθο Θεώρημα, το οποίο γενικεύει την Πρόταση 4.4.2.

Θεώρημα 4.4.5 *Έστω $\mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{Z}$ και $\mathcal{W}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{V}$. Τότε ισχύει ο εξής τύπος:*

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W}+\mathcal{Z}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{Z} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{Z})}$$

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{C} = \{\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_k\}$ μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}$. Επειδή ο $\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{W}$, από το Πόρισμα 4.2.5, το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\mathcal{C}$ επεκτείνεται σε μια βάση του $\mathcal{W}$: υπάρχουν διανύσματα $\{\vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n\}$ του $\mathcal{W}$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{D} := \{\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_k, \vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n\}$ να είναι βάση του $\mathcal{W}$. Παρόμοια επειδή ο $\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}$ είναι και υπόχωρος του $\mathcal{Z}$, από το Πόρισμα 4.2.5, το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\mathcal{C}$ επεκτείνεται σε μια βάση του $\mathcal{Z}$: υπάρχουν διανύσματα $\{\vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_m\}$ του $\mathcal{Z}$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathcal{E} := \{\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_k, \vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_m\}$ να είναι βάση του $\mathcal{Z}$. Σημειώνουμε ότι με τις παραπάνω κατασκευές και επιλογές θα έχουμε:

1. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}) = |\mathcal{C}| = k$.

2. $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} = |\mathcal{D}| = k+n$.

3. $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{Z} = |\mathcal{E}| = k+m$.

4. $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{Z} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}) = (k+n)+(k+m)-k = k+n+m$.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} := \{\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_k, \vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n, \vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_m\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{W}+\mathcal{Z}$, διότι τότε θα έχουμε: $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W}+\mathcal{Z}) = |\mathcal{B}| = k+n+m = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{Z} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W}\cap\mathcal{Z})$ η οποία είναι η σχέση που θέλουμε να δείξουμε.

Έστω ότι για κάποιους αριθμούς $\lambda_i, \mu_j, \nu_r \in \mathbb{K}$, $1 \le i \le k$, $1 \le j \le n$, $1 \le r \le m$, ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\lambda_1\vec{f}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{f}_k + \mu_1\vec{e}_1 + \cdots + \mu_n\vec{e}_n + \nu_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + \nu_m\vec{\varepsilon}_m = \vec{0} \qquad (1)$$

Τότε θα έχουμε ισοδύναμα τη σχέση

$$\mu_1)\vec{e}_1 + \cdots + \mu_n\vec{e}_n = (-\lambda_1)\vec{f}_1 + \cdots + (-\lambda_k)\vec{f}_k + (-\nu_1)\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + (-\nu_m)\vec{\varepsilon}_m \quad (2)$$

Το πρώτο μέλος της (2) ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{W}$ και το δεύτερο μέλος ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{Z}$. Άρα και τα δύο (ίσα) μέλη ανήκουν στην τομή $\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}$. Επειδή το σύνολο $\{\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_k\}$ είναι μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{W}\cap\mathcal{Z}$, έπεται ότι υπάρχουν αριθμοί $\rho_1, \cdots, \rho_k \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε: $\mu_1)\vec{e}_1 + \cdots + \mu_n\vec{e}_n = \rho_1\vec{f}_1 + \cdots + \rho_k\vec{f}_k$. Ισοδύναμα θα έ·χουμε τη σχέση:

$$\rho_1\vec{f}_1 + \cdots + \rho_k\vec{f}_k + (-\mu_1)\vec{e}_1 + \cdots + (-\mu_n)\vec{e}_n = \vec{0} \tag{3}$$

Επειδή εκ' κατασκευής το σύνολο $\{\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_k, \vec{e}_1, \cdots \vec{e}_n\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{W}$, έπεται ότι $\rho_i = 0 = \mu_j$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$. Τότε όμως από τη σχέση (1) θα έχουμε

$$\lambda_1\vec{f}_1 + \cdots + \lambda_k\vec{f}_k + \nu_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + \nu_m\vec{\varepsilon}_m = \vec{0} \tag{4}$$

Επειδή εκ' κατασκευής το σύνολο $\{\vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_k, \vec{\varepsilon}_1, \cdots \vec{\varepsilon}_m\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{Z}$, από τη σχέση (4) έπεται ότι $\lambda_i = 0 = \nu_j$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq m$. Καταλήγουμε ότι όλοι οι συντελεστές λ_i, μ_j, ν_r είναι ίσοι με 0 και άρα το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Μένει να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ παράγει τον υπόχωρο $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. Αυτό προκύπτει άμεσα, καθώς όπως δείξαμε στην απόδειξη της Πρότασης 4.4.2, η ένωση μιας βάσης του $\mathcal{W}$ και μιας βάσης του $\mathcal{Z}$ είναι ένα σύνολο γεννητόρων του υπόχωρου $\mathcal{W} + \mathcal{Z}$. □

Άσκηση 4.4.3 *Έστω $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ με $\dim_{\mathbb{K}} = 4$, και έστω $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{E}$ για τους οποίους ισχύει $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 2$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = 3$. Να υπολογισθούν οι πιθανές τιμές της διάστασης $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$ και να δειχθεί ότι: $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ αν-ν $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 2$.*

Λύση: *Από την εξίσωση*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$$

του Θεωρήματος 4.4.5, θα έχουμε: $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = 2 + 3 - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 5 - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$. *Όμως το σύνολο $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$, και άρα* $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} + \mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = 4$. *Επομένως* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \geq 5 - 4 = 1$. *Από την άλλη πλευρά το σύνολο $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$, και άρα* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$. *Έτσι θα έχουμε:* $1 \leq \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \leq 2$. *Εάν* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 2$, *τότε επειδή* $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$ *και* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, *θα έχουμε* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{V}$, *το οποίο σημαίνει ότι* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. *Αντίστροφα αν* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, *τότε προφανώς* $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{V}$ *και επομένως* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2$.

Άσκηση 4.4.4 *Έστω $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ με $\dim_{\mathbb{K}} = 7$, και έστω $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{E}$ για τους οποίους ισχύει $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 4$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} = 5$. Να υπολογισθούν οι πιθανές τιμές της διάστασης $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$ και να δειχθεί ότι: $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ αν-ν $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = 4$.*

Άσκηση 4.4.5 *Έστω $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{Z}$ τρεις υπόχωροι του $\mathcal{E}$. Να δείξετε ότι* *ισχύει ο ακόλουθος τύπος:*

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \cap \mathcal{Z}) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{Z} -$$

$$- \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{Z}) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \cap \mathcal{Z}).$$

4.5 Βαθμίδα Διανυσμάτων

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε μεθόδους υπολογισμού της διάστασης του υπόχωρου ο οποίος παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο δοθέντων διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου.

Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, και έστω

$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

μια βάση του $\mathcal{E}$.

Θεωρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{X}$ διανυσμάτων του $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{X} := \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\} \subseteq \mathcal{E}$$

και θεωρούμε τον υπόχωρο $\langle \mathcal{X} \rangle := \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m \rangle$ του $\mathcal{E}$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα αυτά.

Ορισμός 4.5.1 *Η* **βαθμίδα** $\mathbf{r}(\vec{x}_i)$ *των διανυσμάτων* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ *του* $\mathcal{E}$ *ορίζεται να είναι η διάσταση του υπόχωρου του* $\mathcal{E}$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα αυτά:*

$$\mathbf{r}(\vec{x}_i) := \dim_{\mathbb{K}} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m \rangle$$

Με άλλα λόγια η βαθμίδα $\mathbf{r}(\vec{x}_i)$ των διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ μετρά το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων τα οποία ανήκουν στο σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$. Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και το σύνολο $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m \rangle$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$, έπεται ότι:

$$\mathbf{r}(\vec{x}_i) \leq n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$$

Παρατήρηση 4.5.2 *Σημειώνουμε ότι, σύμφωνα με την Πρόταση ; η βαθμίδα* $\mathbf{r}(\vec{x}_i)$ *του συνόλου των διανυσμάτων* $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ *δεν αλλάζει αν εκτελέσουμε στο σύνολο* $\mathcal{X}$ *μια από τις στοιχειώδεις πράξεις* (*ΣΠ*$_1$), (*ΣΠ*$_2$), *και* (*ΣΠ*$_3$) *ή τυχόντα συνδυασμό τους.*

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$, τα διανύσματα του συνόλου $\mathcal{X}$ γράφονται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \cdots + a_{1n}\vec{e}_n \\
\vec{x}_2 &= a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{2n}\vec{e}_n \\
&\cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\
\vec{x}_m &= a_{m1}\vec{e}_1 + a_{m2}\vec{e}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{e}_n
\end{aligned} \tag{$*$}$$

Το ακόλουθο κριτήριο είναι πολύ χρήσιμο για τον υπολογισμό της βαθμίδας διανυσμάτων.

Πρόταση 4.5.3 *Διατηρώντας τους παραπάνω συμβολισμούς, υποθέτουμε επιπλέον ότι ισχύει η ακόλουθη συνθήκη:*

$$a_{ii} \neq 0, \ \forall i = 1, 2, \cdots, m \quad \textit{και} \quad a_{ij} = 0, \ \forall i > j.$$

Τότε τα διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ιδιαίτερα: $\mathbf{r}(\vec{x}_i) = m$.

Απόδειξη: Έστω $\lambda\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{x}_m = \vec{0}$. Τότε από τις σχέσεις $(*)$ θα έχουμε: $\lambda_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \cdots + a_{1n}\vec{e}_n) + \lambda_2(a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{2n}\vec{e}_n) + \cdots + \lambda_m(a_{m1}\vec{e}_1 + a_{m2}\vec{e}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{e}_n) = \vec{0}$. Η τελευταία σχέση γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{gathered}
(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_m a_{m1})\vec{e}_1 + \\
(\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_m a_{m2})\vec{e}_2 + \\
\cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\
(\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \cdots + \lambda_m a_{mn})\vec{e}_n = \vec{0}.
\end{gathered}$$

Από τη γραμμική ανεξαρτησία των $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$, θα έχουμε τις σχέσεις:

$$\begin{gathered}
\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots + \lambda_m a_{m1} = 0 \\
\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \cdots + \lambda_m a_{m2} = 0 \\
\cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \\
\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \cdots + \lambda_m a_{mn} = 0
\end{gathered}$$

Από την υπόθεση όμως οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ως εξής:

$$\lambda_1 a_{11} = 0$$

$$\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} = 0$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \cdots + \lambda_m a_{mm} = 0$$

Χρησιμοποιώντας ότι $a_{ii} \neq 0$, $\forall i = 1, 2, \cdots, m$, από τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε άμεσα ότι: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$. Άρα το σύνολο $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επομένως $\mathbf{r}(\vec{x}_i) = m$. □

Σημείωση 4.5.1 *Η παραπάνω Πρόταση 4.5.3 ισχύει και με την υπόθεση:*

$$a_{ii} \neq 0, \ \forall i = 1, 2, \cdots, m \quad \text{και} \quad a_{ij} = 0, \ \forall i < j.$$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 4.5.3.

Παράδειγμα 4.5.2 *Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ διάστασης 5 υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathcal{E}$:*

$$A_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 + \vec{e}_5$$

$$A_2 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 + 8\vec{e}_5$$

$$A_3 = 6\vec{e}_1 + 17\vec{e}_2 - 7\vec{e}_3 + 10\vec{e}_4 + 22\vec{e}_5$$

$$A_4 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.5.3 θα προσδιορίσουμε την βαθμίδα $\mathbf{r}(A_i)$ αυτών των διανυσμάτων.

Σχηματίζουμε τον ακόλουθο πίνακα ο οποίος περιγράφει τις συνιστώσες των διανυσμάτων στην βάση $\mathcal{B}$:

A_1	A_2	A_3	A_4
1	2	6	1
2	5	17	3
-4	-3	-7	-3
3	4	10	2
1	8	22	0

Εκτελώντας διαδοχικά τις στοιχειώδεις πράξεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

A_1	$A'_2 = A_2 - 2A_1$	$A'_3 = A_3 - 6A_1$	$A'_4 = A_4 - A_1$
1	0	0	0
2	1	5	1
-4	5	17	1
3	-2	-8	-1
1	6	16	-1

A_1	A'_2	$A''_3 = A'_3 - 5A'_2$	$A''_4 = A'_4 - A'_2$
1	0	0	0
2	1	0	0
-4	5	-8	-4
3	-2	2	1
1	6	-14	-7

A_1	A'_2	A''_3	$A'''_4 = A''_4 - \frac{1}{2}A''_3$
1	0	0	0
2	1	0	0
-4	5	-8	0
3	-2	2	0
1	6	-14	0

και χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 4.5.2 βλέπουμε ότι:

$$\mathbf{r}(A_1, A_2, A_3, A_4) = \mathbf{r}(A_1, A'_2, A''_3)$$

Όμως τα διανύσματα

$$A_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 + \vec{e}_5$$

$$A'_2 = \vec{e}_2 + 5\vec{e}_{23} - 2\vec{e}_4 + 6\vec{e}_5$$

$$A''_3 = -8\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4 - 14\vec{e}_5$$

ικανοποιούν τις πρϋποθέσεις της Πρότασης 4.5.3, και επομένως $\mathbf{r}(A_1, A'_2, A''_3) = 3$. *Αρα:*

$$\mathbf{r}(A_1, A_2, A_3, A_4) = 3$$

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να προσδιορίσετε την βαθμίδα των διανυσμάτων:

$$\vec{X}_1 = (1, 4, -1, 3), \;\; \vec{X}_2 = (2, 1, -3, -1), \;\; \vec{X}_3 = (0, 2, 1, -5)$$

του $\mathbb{R}^4$.

Άσκηση 4.5.3 *Να προσδιορισθεί η βαθμίδα των ακόλουθων διανυσμάτων του* $\mathbb{C}^4$:

$$A_1 = (1, i, 1+i, -i)$$

$$A_2 = (-i, 0, 2-i, 1+i)$$

$$A_3 = (0, -1, 0, 1)$$

$$A_4 = (3i, -2-i, -4+3i, -i)$$

4.6 Ασκήσεις

Άσκηση 4.6.1 *Είναι τα παρακάτω σύνολα διανυσμάτων γραμμικά ανεξάρτητα; Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.*

1. $\{1, \pi\} \subseteq \mathbb{R}$ *υπεράνω του* $\mathbb{Q}$.

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ *Λάθος*

2. $\{1, i\} \subseteq \mathbb{C}$ *υπεράνω του* $\mathbb{R}$.

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ *Λάθος*

3. $\{1, i\} \subseteq \mathbb{C}$ *υπεράνω του* $\mathbb{C}$.

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

4. $\{\vec{x}_2, \vec{x}_4, \vec{x}_6\} \subseteq \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ *όταν γνωρίζουμε ότι το σύνολο* $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5, \vec{x}_6\} \subseteq \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

   $\boxed{\text{Σωστό}}$ *Λάθος*

5. $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_2, \vec{x}_4\} \subseteq \mathcal{V}_{\mathbb{K}}$ *όταν γνωρίζουμε ότι* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 3$.

   Σωστό $\boxed{\text{Λάθος}}$

Άσκηση 4.6.2 *Έστω* $\mathcal{V}$ *ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος* $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών, και έστω* $\{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ *μια βάση του* $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$. *Να δείξετε ότι ο* $\mathcal{V}$ *μπορεί να θεωρηθεί και ως διανυσματικός χώρος υπεράνω του* $\mathbb{R}$, *και μάλιστα το σύνολο* $\{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n, i\vec{\varepsilon}_1, \cdots, i\vec{\varepsilon}_n\}$ *είναι μια βάση του* $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$. *Να συμπεράνετε ότι:*

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{V} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}$$

Άσκηση 4.6.3 *Έστω* $\mathcal{V}$ *ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$. *Να δείξετε ότι ο* $\mathcal{V}$ *ακριβώς δύο υπόχωρους αν και μόνον αν* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = 1$.

Άσκηση 4.6.4 *Έστω $\mathcal{V}$ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:*

$$\vec{x}_1 = (1,1,2,4),\ \ \vec{x}_2 = (2,-1,-5,2),\ \ \vec{x}_3 = (1,-1,-4,0),\ \ \vec{x}_4 = (2,1,1,5),$$

Να προσδιορίσετε μια βάση του $\mathcal{V}$ την οποία να επεκτείνετε σε μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

Άσκηση 4.6.5 *Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύ·νολο του $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{V} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = z\}$$

Να δείξετε ότι το $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και να προσδιορισθεί υπόχωρος $\mathcal{W}$ του $\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε: $\mathbb{R}^3 = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$. Είναι ο υπόχωρος $\mathcal{W}$ μοναδικός;

Άσκηση 4.6.6 *Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Να δείξετε ότι αν $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{V}$, τότε και το σύνολο $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i + \lambda\vec{e}_j, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{V}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ και $i \neq j$.*

Άσκηση 4.6.7 *Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Να δείξετε ότι αν $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_i, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathcal{V}$. Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σύνολο*
$$\{\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n, \vec{e}_n + \vec{e}_1\}$$
είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. *Το n είναι περιττός.*

Άσκηση 4.6.8 *Θεωρούμε τους ακόλουθους υπόχωρους του $\mathbb{R}^4$:*

$$\mathcal{V} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$$
$$\mathcal{W} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\ x_1 = x_4 \ \text{και}\ x_2 = 2x_3\}$$
$$\mathcal{Z} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$
$$\mathcal{X} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\ x_1 + x_2 = 0 \ \text{και}\ x_2 = 2x_4\}$$

Να βρεθούν βάσεις και η διάσταση των υπόχωρων: $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ και $\mathcal{Z} \cap \mathcal{X}$.

Άσκηση 4.6.9 *Να προσδιορισθεί, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η βαθμίδα των διανυσμάτων:*

$$\vec{x} = (-1,1,3),\ \ \vec{y} = (5,-2,9),\ \ \vec{z} = (1,-\lambda,2\lambda)$$

Άσκηση 4.6.10 *Έστω $\mathbb{M}_{(2\times 2}(\mathbb{C})$ ο διανυσματικός χώρος των 2×2 πινάκων υπεράνω του σώματος $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Να εξετασθεί αν το ακόλουθο σύνολο πινάκων $\{A, B, C, D\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3i & -2-i \\ -5+3i & -i \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4.6.11

1. *Να προσδιορισθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$*

   $$\vec{x}_1 = (\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}),\ \vec{x}_2 = (-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}),\ \vec{x}_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda)$$

   να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2. *Για ποιές τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικά εξαρτημένα;*

   (α')

   $$\vec{x}_1 = (3, -2, -1, 3),\ \vec{x}_2 = (1, 0, 2, 4),\ \vec{x}_3 = (1, -3, \lambda, \mu)$$

   (β')

   $$\vec{x}_1 = (1, 2, \lambda, 1),\ \vec{x}_2 = (\lambda, 1, 2, 3),\ \vec{x}_3 = (0, 1, \mu, 0)$$

3. *Να προσδιορισθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε τα διανύσματα του $\mathbb{R}_3[t]$*

   $$P_1(t) = 3t^3 + t^2 - 4t + 6,\ P_2(t) = t^3 + t^2 + 4t + 4,\ P_3(t) = t^3 - 4t + \lambda$$

   να είναι γραμμικά εξαρτημένα.

4. *Να προσδιορισθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε τα διανύσματα του $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & \lambda \end{pmatrix}$$

   να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Άσκηση 4.6.12 *Θεωρούμε τα ακόλουθα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$:*

$$\vec{x} = (1, -1, 2), \quad \vec{y} = (3, 1, -2)$$

Να δείξετε ότι τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ακολούθως να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός μ έτσι ώστε το σύνολο $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$, όπου $\vec{z} = (1, \mu, 1)$, να είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 4.6.13 *1. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου $\mathcal{V}$ του $\mathbb{R}^4$, όπου*

$$\mathcal{V} := \{(x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = x_3\}$$

2. Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του υπόχωρου $\mathcal{V}$ του $\mathbb{R}^4$, όπου

$$\mathcal{V} := \{(x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$$

Άσκηση 4.6.14 *Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Έστω $\mathcal{X} := \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n\}$ ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{V}$.*

1. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$\{\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{x}_2 + \vec{x}_3, \cdots, \vec{x}_{n-1} + \vec{x}_n, \vec{x}_n + \vec{x}_1\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

2. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$\{\vec{x}_1, k_2\vec{x}_1 + \vec{x}_2, k_3\vec{x}_1 + \vec{x}_3, \cdots, k_{n-1}\vec{x}_1 + \vec{x}_n, k_n\vec{x}_1 + \vec{x}_n\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο, $\forall k_i \in \mathbb{K}$, $2 \leq i \leq n$. Να εξετασθεί εάν ισχύει το αντίστροφο.

Άσκηση 4.6.15 *Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Αν $\mathcal{W}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{V}$ με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W} + 1 < \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$, να δείξετε ότι υπάρχει ένας υπόχωρος $\mathcal{Z}$ του $\mathcal{V}$ έτσι ώστε: $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{V}$ και $\mathcal{W} \neq \mathcal{Z} \neq \mathcal{V}$.*

Άσκηση 4.6.16 *Έστω $\mathcal{V}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Το μήκος μια αλυσίδας υπόχωρων*

$$\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{W}_{k-1} \subset \mathcal{W}_k$$

ορίζεται να είναι ο αριθμός k. Να δείξετε ότι ο $\mathcal{V}$ είναι πεπερασμένης διάστασης αν και μόνον αν υπάρχει μέγιστο στα μήκη όλων των δυνατών αλυσίδων υπόχωρων του $\mathcal{V}$.

Άσκηση 4.6.17 *Να εξετάσετε εάν τα ακόλουθα πολυώνυμα*

$$P(t) = t^3 - t^2 + 3,\ Q(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 10,\ R(t) = 3t^3 + 3t^2 + t + 1$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_3[t]$.

Άσκηση 4.6.18 *Να προσδιορισθεί μια βάση του υπόχωρου του* $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *ο οποίος παράγεται από τους πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4.6.19 *να δείξετε ότι το σύνολο πολυωνύμων:*

$$P_0(t) = 1,\ P_1(t) = 1+t,\ P_2(t) = 1+t+t^2,\ \cdots,\ P_n(t) = 1+t+t^2+\cdots+t^n$$

είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}_n[t]$. *Ακολούθως να βρεθούν οι συνιστώσες του τυχόντος πολυωνύμου* $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ *ως προς την παραπάνω βάση.*

Άσκηση 4.6.20 *Να προσδιορισθεί η διάσταση του υπόχωρου του* $\mathbb{R}^n$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα:*

$$\vec{x}_1 = (1,1,0,\cdots,0,0,0),\ \ \vec{x}_2 = (0,1,1,\cdots,0,0,0),\ \ \cdots$$

$$\vec{x}_{n-1} = (0,0,0,\cdots,0,1,1),\ \ \vec{x}_n = (1,0,0,\cdots,0,0,1)$$

Άσκηση 4.6.21 *Έστω* $\mathcal{V}$ *το σύνολο όλων των* 3×3 *πινάκων υπεράνω του* $\mathbb{R}$, *της μορφής:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι το $\mathcal{V}$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, *και αφού προσδιορίσετε μια βάση του, να υπολογίσετε την διάσταση του.*

Άσκηση 4.6.22 *Έστω* $\mathcal{V}$ *το σύνολο όλων των* 3×3 *πινάκων υπεράνω του* $\mathbb{R}$, *της μορφής:*

$$A = \begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι το $\mathcal{V}$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, *και αφού προσδιορίσετε μια βάση του, να υπολογίσετε την διάσταση του.*

Άσκηση 4.6.23 *Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο με n στοιχεία. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(S,\mathbb{R})$ υπεράνω του $\mathbb{R}$ όλων των συναρτήσεων $f : S \to R$. Για κάθε στοιχείο $s \in S$ θεωρούμε την χαρακτηριστική συνάρτηση*

$$\chi_s : S \to \mathbb{R},\, t \mapsto \chi_s(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \alpha\nu \;\; t = s \\ 0, & \alpha\nu \;\; t \neq s \end{array} \right\}$$

Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathcal{B} := \{\chi_s \,|\; s \in S\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{F}(S,\mathbb{R})$. Ποιά είναι η διάσταση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(S,\mathbb{R})$;

Άσκηση 4.6.24 *Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ των ακολουθιών με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, και έστω $p, q \in \mathbb{R}$ με $q \neq 0$. Έστω*

$$\mathcal{V} = \{(x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{A}(\mathbb{R}) \,|\, x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}\}$$

ο υπόχωρος των αναγωγικών ακολουθιών. Να δείξετε προσδιορίσετε μια βάση και την διάσταση του $\mathcal{V}$.

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης