**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ**
**ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ**

**Τίτλος Μαθήματος:** Γραμμική Άλγεβρα Ι

**Ενότητα:** Γραμμικές Απεικονίσεις

**Διδάσκων:** Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης

**Τμήμα:** Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Κεφάλαιο 5

# Γραμμικες Απεικονισεις

Στην άλγεβρα, και γενικότερα στα Μαθηματικά, σπουδαίο ρόλο στην μελέτη μιας έννοιας ή ενός αντικειμένου διαδραματίζει η σύγκριση της με ομοειδείς έννοιες ή ομοειδή αντικείμενα. Στο παρόν Κεφάλαιο θα μελετήσουμε τρόπους σύγκρισης δύο διανυσματικών χώρων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Όπως είδαμε η βασική δομή ενός διανυσματικού χώρου καθορίζεται από την πράξη της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Επομένως είναι φυσικό να προσπαθήσουμε να συγκρίνουμε δύο διανυσματικούς χώρους μέσω μιας απεικόνισης η οποία απαιτούμε να διατηρεί την βασική δομή τους, δηλαδή την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Έτσι οδηγούμαστε στην έννοια της γραμμικής απεικόνισης μέσω της οποίας συσχετίζουμε και συγκρίνουμε δυο διανυσματικούς χώρους υπεράνω ενός σώματος, αν και ενδεχόμενα τα στοιχεία τους είναι διαφορετικής φύσης.

## 5.1 Ορισμός - Βασικές Ιδιότητες - Παραδείγματα

Από τώρα και στο εξής θεωρούμε ένα σώμα $\mathbb{K}$ και δύο διανυσματικούς χώρους $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.

**Ορισμός 5.1.1** *Μια απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ καλείται* **γραμμική** *αν ικανοποιεί τα ακόλουθες συνθήκες:*

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$: $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$.
2. $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}, \forall k \in \mathbb{K}$: $f(k\vec{x}) = kf(\vec{x})$.

Πρίν περάσουμε σε παραδείγματα γραμμικών απεικονίσεων, θα δούμε κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες των γραμμικών απεικονίσεων οι οποίες απορρέουν σχετικά άμεσα από το ορισμό. Η παρακάτω πρόταση δείχνει ότι μια γραμμική απεικόνιση διατηρεί όλες τις έννοιες και κατασκευές οι οποίες απορρέουν από τον ορισμό του διανυσματικού χώρου.

**Πρόταση 5.1.2** *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}$ και $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$.*

1. $f(\vec{0}) = \vec{0}$.
2. $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x}), \ \forall \vec{x} \in \mathcal{E}$.
3. $f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y}), \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$.
4. $\forall n \geq 1, \ \forall \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \in \mathcal{E}, \ \forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$:

$$f(\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \cdots + \lambda_n f(\vec{x}_n).$$

*Απόδειξη:* 1. Επειδή $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, από τη γραμμικότητα της $f$ έπεται ότι $f(\vec{0}) = f(\vec{0} + \vec{0}) = f(\vec{0}) + f(\vec{0})$. Επομένως $\vec{0} = f(\vec{0}) - f(\vec{0}) = [f(\vec{0}) + f(\vec{0})] - f(\vec{0}) = f(\vec{0}) + [f(\vec{0}) - f(\vec{0})] = f(\vec{0}) + \vec{0} = f(\vec{0})$.

2. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της $f$ θα έχουμε: $f(-\vec{0}) = f((-1)\vec{0}) = (-1)f(\vec{0}) = -f(\vec{0})$.

3. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της $f$ και το 2. θα έχουμε: $f(\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x} + (-\vec{y})) = f(\vec{x}) + f(-\vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y})$.

4. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο πλήθος $n \geq 1$ των διανυσμάτων $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$. Η περίπτωση $n = 1$ συμπίπτει με το 2. του ορισμού 5.1.1. Αν $n = 2$, τότε απο τον ορισμό 5.1.1 θα έχουμε: $f(\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2) = f(\lambda_1 \vec{x}_1) + f(\lambda_2 \vec{x}_2) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \lambda_2 f(\vec{x}_2)$. Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $n \geq 2$ το πλήθος διανύσματα. Τότε, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, θα έχουμε $f(\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n + \lambda_{n+1} \vec{x}_{n+1}) = f((\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n) + \lambda_{n+1} \vec{x}_{n+1}) = f(\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n) + f(\lambda_{n+1} \vec{x}_{n+1}) = \lambda_1 f(\vec{x}_1) + \lambda_2 f(\vec{x}_2) + \cdots + \lambda_n f(\vec{x}_n) + \lambda_{n+1} f(\vec{x}_{n+1})$. Επομένως ο ισχυρισμός 4. ισχύει για κάθε $n \geq 1$. □

**Πόρισμα 5.1.3** *Έστω $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Μια απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι γραμμική αν και μόνον αν:*

$$f(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}), \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

*Απόδειξη:* Αν η $f$ είναι γραμμική, τότε η ζητούμενη σχέση προκύπτει από την Πρόταση 5.1.2. Αν η παραπάνω σχέση ισχύει, τότε η γραμμικότητα της $f$ προκύπτει θέτοντας διαδοχικά $\lambda = \mu = 1$ και $\mu = 0$ στην παραπάνω σχέση. □

**Παράδειγμα 5.1.1** *Έστω $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

*1. Η μηδενική απεικόνιση $\mathbb{O}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, η οποία ορίζεται ως εξής: $\mathbb{O}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\vec{x}) = \vec{0}$, είναι τετριμμένα γραμμική.*

*2. Η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, η οποία ορίζεται ως εξής: $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) = \vec{x}$, είναι τετριμμένα γραμμική.*

*3. Έστω $r \in \mathbb{K}$ ένας σταθερός αριθμός. Ομοθεσία με λόγο $r$ επί του $\mathcal{E}$ καλείται η απεικόνιση $f_r : \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \vec{x} \mapsto f_r(\vec{x}) = r\vec{x}$. Προφανώς η $f_r$ είναι μια γραμμική απεικόνιση.*

*Παρατηρούμε ότι για $r = 1$ έχουμε $f_1 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, και για $r = 0$ έχουμε $f_0 = \mathbb{O}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$.*

*4. Έστω η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + y, z)$. Τότε η $f$ είναι γραμμική.*

*5. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής: $f(a + bi) = a$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε η $f$ είναι γραμμική.*

*6. Έστω $n \geq 1$ ένας φυσικός αριθμός και έστω $\mathbb{K}_n[t]$ ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων με βαθμό $\leq n$ υπεράνω του $\mathbb{K}$. Τότε η απεικόνιση $f : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}_n[t]$ η οποία ορίζεται ως εξής*

$$f(a_0, a_1, \cdots, a_n) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

*είναι γραμμική.*

*7. Η απεικόνιση $D : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ η οποία στέλνει κάθε πολυώνυμο $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ στην παράγωγο του $D(P(t)) = a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1}$ είναι γραμμική απεικόνιση. Προφανώς η $D$ μπορεί να θεωρηθεί και ως γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_n[t]$ ή ως γραμμική απεικόνιση $\mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_{n-1}[t]$.*

*8. Έστω $\theta \in [0, 2\pi]$ μια σταθερή γωνία, και έστω η απεικόνιση*

$$f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto f_\theta(x, y) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y(\cos(\theta))$$

*Τότε η απεικόνιση $f_\theta$, η οποία αναπαριστά στροφή επιπέδου κατά γωνία $\theta$, είναι γραμμική.*

**Πρόχειρη Δοκιμασία**

Αποδείξτε ότι οι απεικονίσεις του Παραδείγματος 5.1.1 είναι πράγματι γραμμικές.

**Πρόχειρη Δοκιμασία**

Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) := (x + 1, y)$. Είναι η $f$ γραμμική;

**Σχόλιο 5.1.2** *Όπως έχουμε δει υπάρχουν σύνολα τα οποία είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω δύο διαφορετικών σωμάτων. Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει ότι η έννοια της γραμμικής απεικόνισης εξαρτάται από το σώμα υπεράνω του οποίου είναι ορισμένοι οι διανυσματικοί χώροι.*

*Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(a + bi) = b + ai$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Αν θεωρήσουμε το $\mathbb{C}$ σαν διανυσματικό χώρο υπεράνω του $\mathbb{R}$, τότε η $f$ είναι γραμμική. Πραγματικά: έστω $z = a_1 + b_1 i$ και $w = a_2 + b_2 i$ δύο μιγαδικοί αριθμοί. Τότε $f(z+w) = f\big((a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)\big)= f\big((a_1+a_2)+(b_1+b_2)i\big)= (b_1+b_2)+(a_1+a_2)i = (b_1+a_1 i)+(b_2+a_2 i) = f(z)+f(w)$. Επίσης αν $r \in \mathbb{R}$, τότε $f(rz) = f\big(r(a_1+b_1 i)\big)= f(ra_1+rb_1 i) = rb_1+ra_1 i = r(b_1+a_1 i) = rf(z)$. Άρα η $f : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ είναι γραμμική. Η $f$ όμως δεν είναι γραμμική όταν το $\mathbb{C}$ θεωρηθεί ως διανυσματικός χώρος υπεράνω του εαυτού του. Πραγματικά για να είναι η $f : \mathbb{C}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ γραμμική θα πρέπει να ισχύει $f(zw) = zf(w), \forall z, w \in \mathbb{C}$. Όμως $f(zw) = f\big((a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)\big)= f\big((a_1a_2 - +b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i\big)= (a_1b_2+b_1a_2)+(a_1a_2+b_1b_2)i$, και $zf(w) = (a_1+b_1 i)(b_2+a_2 i) = (a_1b_2-b_1a_2)+(a_1a_2+b_1b_2)i$. Ιδιαίτερα διαλέγοντας $z = w = i$ βλέπουμε ότι $f(zw) \neq zf(w)$ και επομένως η $f$ δεν είναι γραμμική.*

**Πρόχειρη Δοκιμασία**

Να δείξετε ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $f(z_1, z_2) = z_1+\overline{z}_2$, όπου $\overline{z}$ συμβολίζει τον συζυγή του μιγαδικού αριθμού $z$, είναι γραμμική όταν τα σύνολα $\mathbb{C}^2$ και $\mathcal{C}$ θεωρηθούν ως διανυσματικοί χώροι υπεράνω του $\mathbb{C}$, αλλά δεν είναι γραμμική όταν τα σύνολα $\mathbb{C}^2$ και $\mathcal{C}$ θεωρηθούν ως διανυσματικοί χώροι υπεράνω του $\mathbb{R}$.

Όπως έχουμε δει κάθε σώμα $\mathbb{K}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν διανυσματικός χώρος υπεράνω του εαυτού του. Αν $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$, τότε οι γραμμικές απεικονίσεις $\mathcal{E} \to \mathbb{K}$ έχουν ιδιαίτερη σημασία και θα μας απασχολήσουν στο επόμενο Κεφάλαιο. Προς το παρόν αναφέρουμε τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 5.1.4** *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$ καλείται* **γραμμική μορφή** *επί του $\mathcal{E}$.*

*Το σύνολο όλων των γραμμικών μορφών επί του $\mathcal{E}$ συμβολίζεται με $\mathcal{E}^\star$.*

Οι ακόλουθες δύο προτασεις μας εφοδιάζουν με μια μεγάλη ποικιλία παραδειγμάτων γραμμικών απεικονίσεων.

**Πρόταση 5.1.5** *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα.*

*1. Έστω $a_1, a_2, \cdots, a_n$ σταθεροί αριθμοί από το σώμα $\mathbb{K}$. Τότε η απεικόνιση*

$$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto f(\vec{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

*είναι γραμμική, δηλαδή είναι μια γραμμική μορφή.*

*2. Αντίστροφα αν $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ είναι μια γραμμική μορφή, τότε υπάρχουν (μοναδικοί) αριθμοί $a_1, a_2, \cdots, a_n$ από το σώμα $\mathbb{K}$, έτσι ώστε: $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.*

*Απόδειξη:* 1. Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. Τότε: $f(\vec{x} + \vec{y}) = f((x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n)) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n) = a_1(x_1 + y_1) + a_2(x_2 + y_2) + \cdots + a_n(x_n + y_n) = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) + (a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$. Άρα ισχύει η συνθήκη 1. του ορισμού 5.1.1. Επίσης αν $\lambda \in \mathbb{K}$, τότε: $f(\lambda\vec{x}) = f(\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n) = a_1\lambda x_1 + a_2\lambda x_2 + \cdots a_n\lambda x_n = \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) = \lambda f(\vec{x})$. Άρα ισχύει και η συνθήκη 2. του ορισμού 5.1.1, και επομένως η $f$ είναι γραμμική.

2. Έστω $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ μια γραμμική απεικόνιση. Θέτουμε $a_1 := f(\vec{e}_1), a_2 := f(\vec{e}_2), \cdots, a_n := f(\vec{e}_n)$, όπου $\vec{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \vec{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}^n$. Τότε για κάθε $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, θα έχουμε $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα της $f$, θα έχουμε: $f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n) = x_1f(\vec{e}_1) + x_2f(\vec{e}_2) + \cdots + x_nf(\vec{e}_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$. Από τον ορισμό τους οι αριθμοί $a_1, a_2, \cdots, a_n$ είναι μοναδικοί. □

**Παράδειγμα 5.1.3** *Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := 3x + 2y - 5z$ είναι γραμμική.*

**Πρόταση 5.1.6** *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $n, m \in \mathbb{N}$. Αν $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ είναι μια απεικόνιση, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η $f$ είναι γραμμική.*

2. *Υπάρχουν $m$ το πλήθος γραμμικές μορφές $f_1, \cdots, f_m : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ έτσι ώστε:*
$$f(\vec{x}) = \big(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \cdots, f_m(\vec{x})\big).$$

3. *Υπάρχουν $nm$ το πλήθος αριθμοί $\{a_{ij}\}_{1\le j\le n}^{1\le i\le m}$ από το σώμα $\mathbb{K}$, έτσι ώστε, $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:*

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

*Απόδειξη:* 1. $\Rightarrow$ 2. Η απεικόνιση $f$ προσδιορίζει μοναδικά $m$ απεικονίσεις $f_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, όπου $f_i(\vec{x})$ = η $i$-οστή συνιστώσα του διανύσματος $f(\vec{x})$. Θα δείξουμε ότι η $f_i$ είναι γραμμική, $\forall i = 1, 2, \cdots, m$. Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Τότε $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \big(f_1(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}), f_2(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}), \cdots, f_m(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y})\big)$. Επειδή η $f$ είναι γραμμική θα έχουμε

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) &= \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) \\ &= \lambda(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \cdots, f_m(\vec{x})) + \mu(f_1(\vec{y}), f_2(\vec{y}), \cdots, f_m(\vec{y})) \\ &= (\lambda f_1(\vec{x}), \lambda f_2(\vec{x}), \cdots, \lambda f_m(\vec{x})) + (\mu f_1(\vec{y}), \mu f_2(\vec{y}), \cdots, \mu f_m(\vec{y})) \\ &= (\lambda f_1(\vec{x}) + \mu f_1(\vec{y}), \lambda f_2(\vec{x}) + \mu f_2(\vec{y}), \cdots, \lambda f_m(\vec{x}) + \mu f_m(\vec{y})) \end{aligned}$$

Επομένως $f_i(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda f_i(\vec{x}) + \mu f_1(\vec{y})$, $\forall i = 1, 2, \cdots, m$, και άρα η $f_i$ είναι γραμμική.

2. $\Leftrightarrow$ 3. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 5.1.5.

2. $\Rightarrow$ 1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των πράξεων του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}^m$ και την γραμμικότητα των απεικονίσεων $f_i$, $1 \leq i \leq m$, έπεται άμεσα ότι η $f$ είναι γραμμική. $\square$

**Παράδειγμα 5.1.4** *Θεωρούμε τις απεικονίσεις*

$$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, \cdots, x_5) \mapsto f(x_1, \cdots, x_5) = (x_1-2x_3, 4x_5+8x_4, x_2-3x_5+6x_1+5x_3)$$

$$g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3,\ (x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = (x + iz, 3ix - 2y + iz, 4y + 5iz)$$

*Σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.6 οι απεικονίσεις $f, g$ είναι γραμμικές.*

**Άσκηση 5.1.5** *Έστω $A$ ένας σταθερός $n\times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$ πινάκων υπεράνω του $\mathbb{K}$ και ορίζουμε απεικόνιση*

$$f : \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}),\ M \mapsto f(M) := MA - AM$$

*Να εξετασθεί εάν η $f$ είναι γραμμική.*

**Λύση:** *Χρησιμοποιώντας τις στοιχειώδεις ιδιότητες πινάκων από το Κεφάλαιο 2, θα έχουμε $f(M_1 + M_2) = (M_1 + M_2)A - A(M_1 + M_2) = M_1A + M_2A - AM_1 - AM_2 = (M_1A - AM_1) + (M_2A - AM_2) = f(M_1) + f(M_2)$. Επίσης αν $r \in \mathbb{K}$, τότε: $f(rM) = (rM)A - A(rM) = r(MA) - (Ar)M = r(MA) - r(AM) = r(MA - AM) = rf(M)$. Άρα η $f$ είναι γραμμική.*

**Πρόχειρη Δοκιμασία**

Έστω $A$ ένας σταθερός $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Θεωρούμε τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{K}_n$ και $\mathbb{K}_m$ των στηλών με $n$ και $m$ στοιχεία αντίστοιχα, από το σώμα $\mathbb{K}$. Ορίζουμε μια απεικόνιση

$$f_A : \mathbb{K}_n \to \mathbb{K}_m, \ \ \vec{X} \mapsto f_A(\vec{X}) := A\vec{X}$$

Να δείξετε ότι η $f$ είναι γραμμική.

## 5.2 Πυρήνας και Εικόνα Γραμμικής Απεικόνισης

Όπως είδαμε στην Πρόταση 5.1.2 μια γραμμική απεικόνιση διατηρεί γραμμικούς συνδυασμούς διανυσμάτων. Στην παρούσα παράγραφο θα δούμε ότι γενικότερα μια γραμμική απεικόνιση διατηρεί υπόχωρους. Επίσης θα μελετήσουμε ειδικού τύπου γραμμικές απεικονίσεις.

**Ορισμός 5.2.1** *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ και $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{F}$ τυχόντα υποσύνολα.*

1. *Η* **εικόνα** $f(\mathcal{V})$ *του υποσυνόλου $\mathcal{V}$ μέσω της $f$ ορίζεται να είναι το υποσύνολο:*
$$f(\mathcal{V}) := \{\vec{y} \in \mathcal{F} \,|\, \exists \vec{x} \in \mathcal{V} : f(\vec{x}) = \vec{y}\}$$

2. *Η* **αντίστροφη εικόνα** $f^{-1}(\mathcal{W})$ *του υποσυνόλου $\mathcal{W}$ μέσω της $f$ ορίζεται να είναι το υποσύνολο:*
$$f^{-1}(\mathcal{W}) := \{\vec{x} \in \mathcal{E} \,|\, f(\vec{x}) \in \mathcal{W}\}$$

Επειδή, όπως θα δούμε σε λίγο, οι υπόχωροι $f^{-1}(\{\vec{0}\})$ και $f(\mathcal{E})$ παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον, αξίζουν ιδιαίτερη μνεία και γι' αυτό δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 5.2.2** *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. *Η* **εικόνα** $\mathrm{Im}(f)$ *της $f$ ορίζεται να είναι η εικόνα του $\mathcal{E}$ μέσω της $f$, δηλαδή:*
$$\mathrm{Im}(f) := f(\mathcal{E}) = \{\vec{y} \in \mathcal{F} \,|\, \exists \vec{x} \in \mathcal{E} : f(\vec{x}) = \vec{y}\}$$

2. *Ο* **πυρήνας** $\mathrm{Ker}(f)$ *της $f$ ορίζεται να είναι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(\{\vec{0}\})$ του μηδενικού υπόχωρου $\{\vec{0}\}$ του $\mathcal{F}$ μέσω της $f$, δηλαδή:*
$$\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \,|\, f(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

**Παράδειγμα 5.2.1** *Θεωρούμε την απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) := (x + y, y)$$

*Σύμφωνα με την Πρόταση 5.1.6 η* $f$ *είναι γραμμική. Θα προσδιορίσουμε την εικόνα* $\mathrm{Im}(f)$ *και τον πυρήνα* $\mathrm{Ker}(f)$ *της* $f$*. Έστω* $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f)$*. Τότε* $f(x, y, z) = (0, 0)$ *και επομένως* $(x + y, y) = (0, 0)$*. Αυτό σημαίνει ότι* $x = -y$ *και* $y = 0$*, και άρα* $x = y = 0$*. Επομένως* $\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = y = 0\} = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in \mathbb{R}\}$*. Προφανώς ο* $\mathrm{Ker}(f)$ *είναι ο υπόχωρος του* $\mathbb{R}^3$ *ο οποίος παράγεται από το διάνυσμα* $(0, 0, 1)$ *το οποίο αποτελεί βάση του. Από την άλλη πλευρά έστω* $(a, b) \in \mathrm{Im}(f)$*. Τότε υπάρχει ένα διάνυσμα* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *έτσι ώστε* $f(x, y, z) = (a, b)$*, δηλαδή* $(x+y, y) = (a, b)$*. Επομένως* $x+y = a$ *και* $y = b$*, το οποίο συνεπάγεται ότι* $x = a-b$*. Έτσι* $\mathrm{Im}(f) = \{(a-b, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} = \{a(1, 0)-b(1, 1) \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$*. Προφανώς η εικόνα* $\mathrm{Im}(f)$ *είναι ο υπόχωρος του* $\mathbb{R}^2$ *ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα* $\vec{e} = (1, 0)$ *και* $\vec{\varepsilon} = (1, 1)$ *τα οποία αποτελούν βάση του. Άρα* $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f) = 2$ *και επειδή* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$*, θα έχουμε* $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ *(φυσικά αυτό μπορεί να διαπιστωθεί και άμεσα).*

**Πρόταση 5.2.3** *Έστω* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων* $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ *υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$*.*

1. *Αν* $\mathcal{V}$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathcal{E}$*, τότε η εικόνα* $f(\mathcal{V})$ *του* $\mathcal{V}$ *μέσω της* $f$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathcal{F}$*.*

2. *Αν* $\mathcal{W}$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathcal{F}$*, τότε η αντίστροφη εικόνα* $f^{-1}(\mathcal{W})$ *του* $\mathcal{W}$ *μέσω της* $f$ *είναι ένας υπόχωρος του* $\mathcal{E}$*.*

*Απόδειξη:* 1. Παρατηρούμε ότι επειδή ο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$, θα έχουμε $\vec{0} \in \mathcal{V}$. Επίσης επειδή η $f$ είναι γραμμική, θα έχουμε $f(\vec{0}) = \vec{0}$. Άρα $\vec{0} \in f(\mathcal{V})$ και επομένως το σύνολο $f(\mathcal{V})$ είναι μη-κενό. Έστω $\vec{z}, \vec{w} \in f(\mathcal{V})$, και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Τότε υπάρχουν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \vec{z}$ και $f(\vec{y}) = \vec{w}$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$, έπεται ότι $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in \mathcal{V}$. Τότε $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \in f(\mathcal{V})$, και επομέ·νώς επειδή η $f$ είναι γραμμική θα έχουμε: $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) = \lambda\vec{z} + \mu\vec{w} \in f(\mathcal{V})$. Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $f(\mathcal{V})$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}$.

2. Επειδή η $f$ είναι γραμμική θα έχουμε $f(\vec{0}) = \vec{0}$, και επειδή ο $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$ θα έχουμε $\vec{0} \in \mathcal{W}$. Άρα $\vec{0} \in f^{-1}(\mathcal{W})$ και επομένως το σύνολο $f^{-1}(\mathcal{W})$ είναι μη-κενό. Έστω τώρα $\vec{x}, \vec{y} \in f^{-1}(\mathcal{W})$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Τότε $f(\vec{x}), f(\vec{y}) \in \mathcal{W}$, και επειδή ο $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{F}$, έπεται ότι $\lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) \in \mathcal{W}$. Όμως επειδή η $f$ είναι γραμμική θα έχουμε $\lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) = f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \in \mathcal{W}$, το οποίο σημαίνει ότι $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in f^{-1}(\mathcal{W})$. Άρα το σύνολο $f^{-1}(\mathcal{W})$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. □

Επειδή το μονοσύνολο $\{\vec{0}\}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{F}$ και ο χώρος $\mathcal{E}$ είναι υπόχωρος του εαυτού του, από την παραπάνω πρόταση έχουμε την ακόλουθη συνέπεια.

**Πόρισμα 5.2.4** *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. *Ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(f)$ της $f$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.*
2. *Η εικόνα $\mathrm{Im}(f)$ της $f$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}$.*

Θα δούμε τώρα ότι μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ επάγει μια 1-1 και επί αντιστοιχία ανάμεσα σε κάποια διακεκριμένα σύνολα υπόχωρων των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$.

**Πρόταση 5.2.5** *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε η απεικόνιση συνόλων*

$$\mathbf{F} : \big\{\textit{υπόχωροι } \mathcal{V} \textit{ του } \mathcal{E} \textit{ έτσι ώστε } \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}\big\} \longrightarrow \big\{\textit{υπόχωροι } \mathcal{W} \textit{ του } \mathrm{Im}(f)\big\}$$

*η οποία ορίζεται ως $\mathbf{F}(V) := f(\mathcal{V})$ είναι 1-1 και επί. Η αντίστροφη της $\mathbf{F}$ είναι η απεικόνιση $\mathbf{F}^{-1}(\mathcal{W}) := f^{-1}(\mathcal{W})$.*

*Απόδειξη:* Αν $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, τότε από τη Πρόταση 5.2.3 έπεται ότι $f(\mathcal{V})$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}$, και προφανώς θα έχουμε $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{Im}(f) = f(\mathcal{E})$. Επομένως η απεικόνιση $\mathbf{F}$ είναι καλά ορισμένη. Έστω $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{E}$ οι οποίοι περιέχουν τον πυρήνα $\mathrm{Ker}(f)$: $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}_i$, $i = 1, 2$, και υποθέτουμε ότι ισχύει: $\mathbf{F}(\mathcal{V}_1) = \mathbf{F}(\mathcal{V}_2)$, δηλαδή $f(\mathcal{V}_1) = f(\mathcal{V}_2)$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}_1$. Τότε $f(\vec{x}) \in f(\mathcal{V}_1) = f(\mathcal{V}_2)$. Άρα υπάρχει $\vec{y} \in \mathcal{V}_2$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$, και επομένως $f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$· δηλαδή $\vec{x} - \vec{y} \in \mathrm{Ker}(f)$. Επειδή $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}_2$, έπεται ότι $\vec{z} := \vec{x} - \vec{y} \in \mathcal{V}_2$. Τότε όμως το διάνυσμα $\vec{x} = \vec{z} + \vec{y}$ ανήκει στον υπόχωρο $\mathcal{V}_2$. Επομένως $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$. Δουλεύοντας ανάλογα θα έχουμε $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_1$. Άρα $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$ και η απεικόνιση $\mathbf{F}$ είναι 1-1. Έστω τώρα $\mathcal{W}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}$ έτσι ώστε $\mathcal{W} \subseteq \mathrm{Im}(f) = f(\mathcal{E})$. Θέτουμε $V := f^{-1}(\mathcal{W})$. Από τη Πρόταση 5.2.3 έπεται ότι ο $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Θα δείξουμε ότι $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}$ και $\mathbf{F}(\mathcal{V}) = \mathcal{W}$. Αν $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$, τότε $f(\vec{x}) = \vec{0} \in \mathcal{W}$. Άρα $\vec{x} \in f^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{V}$ και επομένως $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V}$. Από την άλλη πλευρά, εξ' ορισμού προκύπτει άμεσα ότι $f(\mathcal{V}) = F(f^{-1}(\mathcal{W})) \subseteq \mathcal{W}$. Αν $\vec{w} \in \mathcal{W}$, τότε $\vec{w} \in \mathrm{Im}(f) = f(\mathcal{E})$ και άρα $\vec{w} = f(\vec{x})$ για κάποιο $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε εξ' ορισμού το $\vec{x}$ ανήκει στο $f^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{V}$ και άρα $\vec{w} = f(\vec{x}) \in f(f^{-1}(\mathcal{W})) = f(\mathcal{V})$. Επομένως $\mathcal{W} = f(f^{-1}(\mathcal{W})) = f(\mathcal{V})$ και αυτό σημαίνει ότι $\mathbf{F}(\mathcal{V}) = \mathcal{W}$, δηλαδή η απεικόνιση $\mathbf{F}$ είναι επί. $\square$

Θα μελετήσουμε τώρα κάποιους ειδικούς τύπους γραμμικών απεικονίσεων οι οποίοι θα διαδραματίσουν σπουδαίο ρόλο στη συνέχεια.

**Ορισμός 5.2.6** *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. *Η $f$ καλείται* **μονομορφισμός** *αν η $f$ είναι 1-1, δηλαδή:*

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E} : \quad f(\vec{x}) = f(\vec{y}) \implies \vec{x} = \vec{y}$$

2. *Η $f$ καλείται* **επιμορφισμός** *αν η $f$ είναι απεικόνιση επί:*

$$\forall \vec{y} \in \mathcal{F},\ \exists\, \vec{x} \in \mathcal{E} : \ f(\vec{x}) = \vec{y}$$

3. *Η $f$ καλείται* **ισομορφισμός** *αν η $f$ είναι 1-1 και επί.*

**Ορισμός 5.2.7** *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Οι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ καλούνται* **ισόμορφοι** *αν υπάρχει ένας ισομορφισμός $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$. Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$.*

Προφανώς οι διανυσματικοί χώροι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι ισόμορφοι αν-ν υπάρχει ένας ισομορφισμός $g : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$. Επιπλέον η σχέση ισομορφίας $\cong$ στο σύνολο των διανυσματικών χώρων υπεράνω του $\mathbb{K}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας όπως δείχνει η ακόλουθη άσκηση.

**Άσκηση 5.2.2** *Έστω ότι $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε να δείξετε τα ακόλουθα:*

1. *$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}$.*
2. *$\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$ αν και μόνον αν $\mathcal{F} \cong \mathcal{E}$.*
3. *Αν $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$ και $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$, τότε $\mathcal{E} \cong \mathcal{G}$.*

*Να συμπεράνετε ότι η σχέση ισομορφίας $\cong$ στο σύνολο των διανυσματικών χώρων υπεράνω του $\mathbb{K}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας.*

**Συμβολισμός 5.2.3** *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. *Αν η $f$ είναι μονομορφισμός, αυτό θα το συμβολίζουμε ως εξής: $f : \mathcal{E} \rightarrowtail \mathcal{F}$.*
2. *Αν η $f$ είναι επιμορφισμός, αυτό θα το συμβολίζουμε ως εξής: $f : \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$.*
3. *Αν η $f$ είναι ισομορφισμός, αυτό θα το συμβολίζουμε ως εξής: $f : \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}$.*

**Λήμμα 5.2.8** *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ και $g : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Αν ισχύει $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$, τότε η $g$ είναι μονομορφισμός και η $f$ είναι επιμορφιρμός.*

*Απόδειξη:* Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{F}$ και υποθέτουμε ότι $g(\vec{x}) = g(\vec{y})$. Τότε $f(g(\vec{x}) = f(g(\vec{y}))$, και άρα επειδή $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$, θα έχουμε $\vec{x} = (f \circ g)(\vec{x}) = f(g(\vec{x})) = f(g(\vec{y})) = (f \circ g)(\vec{y}) = \vec{y}$. Άρα η $g$ είναι μονομορφισμός. Έστω τώρα $\vec{y} \in \mathcal{F}$. Εφαρμόζοντας το διάνυσμα $\vec{y}$ στη σχέση $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$, θα έχουμε $(f \circ g)(\vec{y}) = f(g(\vec{y})) = \vec{y}$. Επομένως η $f$ είναι επιμορφισμός. □

**Πρόταση 5.2.9** *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. *Η $f$ είναι* **μονομορφισμός** *αν-ν* $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.

2. *Η $f$ είναι* **επιμορφισμός** *αν-ν* $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{F}$.

3. *Η $f$ είναι* **ισομορφισμός** *αν-ν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ και $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. Σε αυτή τη περίπτωση η απεικόνιση $f$ είναι αντιστρέψιμη και $g = f^{-1}$.*

*Απόδειξη:* 1. Έστω ότι η $f$ είναι μονομορφισμός, και έστω $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$. Τότε $f(\vec{x}) = \vec{0}$, και επειδή $f(\vec{0}) = \vec{0}$, θα έχουμε $f(\vec{x}) = f(\vec{0})$. Όμως η $f$ είναι 1-1 και άρα $\vec{x} = \vec{0}$. Επειδή πάντοτε $\vec{0} \in \mathrm{Ker}(f)$ συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. Αντίστροφα αν $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$, και $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$, τότε $f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$, και άρα $\vec{x} - \vec{y} \in \mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. Επομένως $\vec{x} = \vec{y}$ και άρα η $f$ είναι μονομορφισμός.

2. Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό.

3. Υποθέτουμε ότι η $f$ είναι ισομορφισμός. Τότε, επειδή η $f$ είναι 1-1 και επί, υπάρχει η αντίστροφή της απεικόνιση $g := f^{-1} : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις: $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ και $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $g$ είναι γραμμική. Έστω $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathcal{F}$, και $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. Επειδή η $f$ είναι ισομορφισμός, για τα διανύσματα $\vec{y}_1, \vec{y}_2, k_1\vec{y}_1 + k_2\vec{y}_2 \in \mathcal{F}$ υπάρχουν μοναδικά διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$f(\vec{x}_1) = \vec{y}_1, \;\; f(\vec{x}_2) = \vec{y}_2, \;\; f(\vec{x}_3) = k_1\vec{y}_1 + k_2\vec{y}_2 \tag{1}$$

Εφαρμόζοντας την $g$ στις δύο πρώτες σχέσεις θα έχουμε:

$$\vec{x}_1 = g(f(\vec{x}_1)) = g(\vec{y}_1), \;\; \vec{x}_2 = g(f(\vec{x}_2)) = g(\vec{y}_2) \tag{2}$$

Τότε $k_1 f(x_1) = k_1\vec{y}_1$ και $k_2 f(x_2) = k_2\vec{y}_2$. Επειδή η $f$ είναι γραμμική, προσθέτοντας τις τελευταίες σχέσεις θα έχουμε $f(k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2) = k_1\vec{y}_1 + k_2\vec{y}_2$. Εφαρμόζοντας την $g$, θα έχουμε $g(f(k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2)) = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 = g(k_1\vec{y}_1 + k_2\vec{y}_2)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (2), η τελευταία σχέση γράφεται

$$k_1 g(\vec{y}_1) + k_2 g(\vec{y}_2) = g(k_1\vec{y}_1 + k_2\vec{y}_2) \tag{3}$$

Η σχέση (3) δείχνει ότι η απεικόνιση $g$ είναι γραμμική.

Αντίστροφα αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις: $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ και $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, τότε η $f$ είναι ισομορφισμός όπως προκύπτει απο το Λήμμα 5.2.8. □

**Άσκηση 5.2.4** *Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \ f(x_1, x_2, x_3) := (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

*Να δείξετε ότι η $f$ είναι ισομορφισμός.*

**Λύση:** *Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Ker}(f)$. Τότε $f(\vec{x}) = \vec{0}$, δηλαδή $f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ ή ισοδύναμα: $(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3) = (0, 0, 0)$. Η τελευταία σχέση δίνει: $x_1 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ η οποία είναι ισοδύναμη με την $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Άρα $\vec{x} = \vec{0}$, και επομένως $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$, δηλαδή η $f$ είναι μονομορφισμός. Έστω $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Θέτοντας $\vec{x} := (y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2) \in \mathbb{R}^3$, θα έχουμε: $f(\vec{x}) = f(y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2) = (y_1, y_1 + y_2 - y_1, y_1 + y_2 - y_1 + y_3 - y_2) = (y_1, y_2, y_3) = \vec{y}$. Άρα η $f$ είναι επιμορφισμός και επομένως η $f$ είναι ισομορφισμός. Παρατηρείστε ότι η $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ορίζεται ως εξής: $f^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2)$.*

**Πρόχειρη Δοκιμασία**

1. Να δείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \ f(x, y, z) = (4x - 2y - z, 3x - 4y + z)$$

είναι επιμορφισμός αλλά όχι μονομορφισμός.

2. Να δείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \ f(x, y, z) = (2x - y, x + 2y, 0)$$

είναι μονομορφισμός αλλά όχι επιμορφισμός.

## 5.3 Το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης

Το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο εν συντομία υποστηρίζει ότι μια γραμμική απεικόνιση καθορίζεται πλήρως από τις τιμές της σε μια βάση, είναι θεμελιώδες καθώς από τη μια πλευρά δίνει μια ισχυρή μέθοδο κατασκευής γραμμικών απεικονίσεων και από την άλλη περιγράφει μια από τις σπουδαιότερες ιδιότητες των διανυσματικών χώρων. Αυτό το αποτέλεσμα θα χρησιμοποιείται συνεχώς στα επόμενα εδάφια.

**Θεώρημα 5.3.1** *[Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης] Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

*Έστω $\mathsf{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$ και έστω $\mathsf{C} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \cdots, \vec{w}_n\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων του $\mathcal{F}$. Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ έτσι ώστε:*

$$f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i, \ \ \forall i = 1, 2, \cdots, n. \tag{$*$}$$

*Απόδειξη:* Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$ ένα τυχόν διάνυσμα του $\mathcal{E}$. Επειδή το σύνολο $\mathsf{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$, κατά τα γνωστά, υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \tag{1}$$

Ορίζουμε μια απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ ως εξής

$$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}, \ \ \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) := x_1\vec{w}_1 + x_2\vec{w}_2 + \cdots + x_n\vec{w}_n \tag{2}$$

Θα δείξουμε ότι η $f$ είναι μια καλά ορισμένη γραμμική, και είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $(*)$.

Κατ' αρχήν από την μοναδικότητα της γραφής ενός διανύσματος του $\mathcal{E}$ ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης $\mathsf{B}$, έπεται άμεσα ότι η $f$ είναι καλά ορισμένη απεικόνιση. Επιπλέον η $f$ ικανοποιεί τις σχέσεις $(*)$. Πράγματι θα έχουμε: $\vec{e}_i = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + \cdots + 1\vec{e}_i + \cdots + 0\vec{e}_n$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$. Έτσι από τον ορισμό της $f$ έπεται ότι: $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$, $1 \leq i \leq n$. Έστω τώρα $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$ και $k, l \in \mathbb{K}$. Τότε τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ και $k\vec{x} + l\vec{y}$ γράφονται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathsf{B}$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n \tag{3}$$

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \cdots + y_n\vec{e}_n \tag{4}$$

$$k\vec{x} + l\vec{y} = z_1\vec{e}_1 + z_2\vec{e}_2 + \cdots + z_n\vec{e}_n \tag{5}$$

Από τις (3) και (4) έπεται άμεσα ότι $k\vec{x} + l\vec{y} = (kx_1 + ly_1)\vec{e}_1 + (kx_2 + ly_2)\vec{e}_2 + \cdots + (kx_n + ly_n)\vec{e}_n$, και άρα από τη μοναδικότητα της γραφής έχουμε: $z_i = kx_i + ly_i$, $1 \leq i \leq n$. Από την άλλη πλευρά, σύμφωνα με τον ορισμό της $f$, θα έχουμε:

$$f(\vec{x}) = x_1\vec{w}_1 + x_2\vec{w}_2 + \cdots + x_n\vec{w}_n$$

$$f(\vec{y}) = y_1\vec{w}_1 + y_2\vec{w}_2 + \cdots + y_n\vec{w}_n$$

$$f(k\vec{x} + l\vec{x}) = (kx_1 + ly_1)\vec{w}_1 + (kx_2 + ly_2)\vec{w}_2 + \cdots + (kx_n + ly_n)\vec{w}_n$$

Προσθέτοντας τις δύο πρώτες θα έχουμε

$$kf(\vec{x})+lf(\vec{y}) = k(x_1\vec{w}_1+x_2\vec{w}_2+\cdots+x_n\vec{w}_n)++l(y_1\vec{w}_1+y_2\vec{w}_2+\cdots+y_n\vec{w}_n)$$

Επομένως $f(k\vec{x}+l\vec{y}) = kf(\vec{x})+lf(\vec{y})$, και άρα η $f$ είναι γραμμική.

Έστω τώρα $g : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια άλλη γραμμική απεικόνιση η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $(*)$. Επομένως θα έχουμε $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i = g(\vec{e}_i)$, $1 \leq i \leq n$. Τότε λόγω της γραμμικότητας της $g$, από την σχέση (1) θα έχουμε: $g(\vec{x}) = g(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\cdots+x_n\vec{e}_n) = x_1g(\vec{e}_1)+x_2g(\vec{e}_2)+\cdots+x_ng(\vec{e}_n) = x_1\vec{w}_1+x_2\vec{w}_2+\cdots+x_n\vec{w}_n = f(\vec{x})$, δηλαδή $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$. Επειδή το $\vec{x} \in \mathcal{E}$ είναι τυχόν, έπεται ότι $f = g$. Άρα η $f$ είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $(*)$. $\square$

**Παράδειγμα 5.3.1** *Στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ υπεράνω του $\mathbb{R}$, θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\epsilon}_1 = (1,1,0), \vec{\epsilon}_2 = (1,0,4), \vec{\epsilon}_3 = (0,0,-1)$. Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα αποτελεί μια βάση του $\mathbb{R}^3$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.3.1 θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(\vec{\epsilon}_1) = 2, f(\vec{\epsilon}_2) = -7$, και $f(\vec{\epsilon}_3) = -1$.*

*Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης για να υπολογίσουμε την τιμή $f(x_1, x_2, x_3)$ θα πρέπει να γράψουμε το $\vec{x}$ ως γραμμικό συνδυασμό της βάσης $\mathcal{B}$. Εύκολα βλέπουμε ότι:*

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3 = x_2\vec{\epsilon}_1 + (x_1 - x_2)\vec{\epsilon}_2 + (4x_1 - 4x_2 - x_3\vec{\epsilon}_3$$

*Επομένως σύμφωνα με την απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.1, θα έχουμε: $f(x_1, x_2, x_3 = 2x_2 + (-7)(x_1 - x_2) + (-1)(4x_1 - 4x_2 - x_3) = -11x_1 + 13x_2 + x_3$. Επομένως η ζητούμενη γραμμική απεικόνιση είναι $f(x_1, x_2, x_3) = -11x_1 + 13x_2 + x_3$.*

**Πόρισμα 5.3.2** *Έστω $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε $f = g$ αν και μόνον αν $f(\vec{e}_i) = g(\vec{e}_i)$, $\forall i = 1, \cdots, n$, όπου $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι μια τυχούσα βαση του $\mathcal{E}$.*

*Ιδιαίτερα $f = \mathbb{O}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, δηλαδή η $f$ είναι η μηδενική γραμμικη απεικόνιση, αν και μόνον αν $f(\vec{e}_i) = \vec{0}$, $\forall i = 1, \cdots, n$.*

**Σχόλιο 5.3.2** *Σύμφωνα με το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης, μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ καθορίζεται μοναδικά από τις τιμές της στα διανύσματα μιας, τυχούσας αλλά σταθερής, βάσης του $\mathcal{E}$. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί πολλές φορές στο να ορίζουμε με γραμμική απεικόνιση περιγράφοντας τις τιμές της στα διανύσματα της βάσης.*

Στα επόμενα εδάφια θα δούμε πολλές σημαντικές εφαρμογές του Θεωρήματος Γραμμικής Επέκτασης.

## 5.4 Η Θεμελιώδης Εξίσωση Διαστάσεων

Στην παρούσα ενότητα θα αποδείξουμε την θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων η οποία συνοδεύει μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης, και θα μελετήσουμε κάποιες σπουδαίες συνέπειες της.

**Ορισμός 5.4.1** *Έστω $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Αν οι χώροι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ έχουν πεπερασμένη διάσταση, τότε η* **βαθμίδα** *της $f$ ορίζεται να είναι η διάσταση του υπόχωρου $\mathrm{Im}(f)$ και συμβολίζεται με $\mathbf{r}(f)$:*

$$\mathbf{r}(f) := \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)$$

**Θεώρημα 5.4.2** *[Θεμελιώδης Εξίσωση Διαστάσεων] Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Αν $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε ισχύει η ακόλουθη εξίσωση:*

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)}$$

*Απόδειξη:* Επειδή ο χώρος $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση και ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(f)$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{E}$, έπεται ότι ο χώρος $\mathrm{Ker}(f)$ έχει πεπερασμένη διάσταση, βλέπε την Πρόταση 4.4.1. Έστω $k := \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f)$ και έστω $\mathsf{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k\}$ μια βάση του $\mathrm{Ker}(f)$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.2.5 υπάρχουν διανύσματα $\vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_n \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε το σύνολο $\mathsf{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_n\}$ να είναι μια βάση του $\mathcal{E}$. Τότε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, και αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = n - k = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f)$. Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathsf{D} := \{f(\vec{e}_{k+1}), \cdots, f(\vec{e}_n)\}$$

είναι μια βάση του υπόχωρου $\mathrm{Im}(f)$, καθώς τότε $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = |\mathsf{D}| = n-k$. Προφανώς τα διανύσματα του συνόλου D ανήκουν στον υπόχωρο $\mathrm{Im}(f)$.

<u>*Το σύνολο D είναι γραμμικά ανεξάρτητο:*</u> Έστω $l_{k+1}, \cdots, l_n \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε να ισχύει $l_{k+1}f(\vec{e}_{k+1}) + \cdots + l_n f(\vec{e}_n) = \vec{0}$ ή ισοδύναμα (λόγω της γραμμικότητας της $f$) $f(l_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \cdots + l_n\vec{e}_n) = \vec{0}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το διάνυσμα $l_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \cdots + l_n\vec{e}_n$ ανήκει στον πυρήνα $\mathrm{Ker}(f)$ της $f$, και επομένως θα γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης C. Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί $l_1, \cdots, l_k \in \mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$l_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \cdots + l_n\vec{e}_n = l_1\vec{e}_1 + \cdots + l_k\vec{e}_k$$

ή ισοδύναμα:

$$(-l_1)\vec{e}_1 + \cdots + (-l_k)\vec{e}_k + l_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \cdots + l_n\vec{e}_n = \vec{0}$$

Τότε όμως $l_1 = \cdots = l_k = l_{k+1} = \cdots = l_n = 0$, διότι το σύνολο $\mathsf{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο ως βάση του $\mathcal{E}$. Επομένως το σύνολο $\mathsf{D}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

*Το σύνολο* $\mathsf{D}$ *παράγει τον υπόχωρο* $\mathrm{Im}(f)$*:* Έστω $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f)$· τότε υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$: $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Επειδή το σύνολο $\mathsf{B}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$, θα έχουμε $\vec{x} = l_1\vec{e}_1 + \cdots + l_k\vec{e}_k + l_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \cdots + l_n\vec{e}_n$, για κάποιους (μοναδικούς) αριθμούς $l_j \in \mathbb{K}$, $1 \leq j \leq n$. Τότε, χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της $f$ και ότι τα διανύσματα $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_k$ ανήκουν στον πυρήνα της $f$ (άρα $f(\vec{e}_i) = \vec{0}$, $1 \leq i \leq k$), θα έχουμε: $\vec{y} = f(\vec{x}) = f(l_1\vec{e}_1 + \cdots + l_k\vec{e}_k + l_{k+1}\vec{e}_{k+1} + \cdots + l_n\vec{e}_n) = l_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + l_k f(\vec{e}_k) + l_{k+1} f(\vec{e}_{k+1}) + \cdots + l_n f(\vec{e}_n) = l_{k+1} f(\vec{e}_{k+1}) + \cdots + l_n f(\vec{e}_n)$. Άρα το σύνολο $\mathsf{D}$ παράγει τον υπόχωρο $\mathrm{Im}(f)$.

Συνοψίζοντας θα έχουμε ότι το σύνολο $\mathsf{D} = \{f(\vec{e}_{k+1}), \cdots, f(\vec{e}_n)\}$ είναι μια βάση του $\mathrm{Im}(f)$, και άρα $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = |\mathsf{D}| = n - k = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f)$. Επομένως $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$. □

**Παράδειγμα 5.4.1** *Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση:*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$$

*Θα προσδιορίσουμε την βαθμίδα* $\mathbf{r}(f)$ *της* $f$ *καθώς και μια βάση των υπόχωρων* $\mathrm{Im}(f)$ *και* $\mathrm{Ker}(f)$.

*Επειδή* $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f)$ *αν και μόνον αν* $f(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z) = (0, 0, 0)$*, έπεται ότι οι συντεταγμένες* $x, y, z$ *του διανύσματος* $(x, y, z)$ *είναι λύσεις του συστήματος:*

$$x + 2y = 0,\quad y - z = 0,\quad x + 2z = 0$$

*Εύκολα βλέπουμε ότι οι λύσεις του παραπάνω συστήματος περιγράφονται από το σύνολο* $\{(-2t, t, t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. *Επομένως* $\mathrm{Ker}(f) = \{(-2t, t, t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \in \mathbb{R}\} = \{t(-2, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \in \mathbb{R}\}$. *Αυτή η περιγραφή του πυρήνα μας επιτρέπει να δούμε άμεσα ότι το διάνυσμα* $\vec{\varepsilon} := (-2, 1, 1)$ *είναι μια βάση του* $\mathrm{Ker}(f)$ *και επομένως* $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f) = 1$. *Από την θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$ *θα έχουμε τότε* $3 = 1 + \mathbf{r}(f)$*, και επομένως* $\mathbf{r}(f) = 2$. *Θα προσδιορίσουμε μια βάση του υπόχωρου* $\mathrm{Im}(f)$. *Θα έχουμε:*

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x, y, z) \,|\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{(x + 2y, y - z, x + 2z) \,|\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{(x, y, x) + (2y, -z + 2z) \,|\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{(x(1,0,1) + y(0,1,0) + y(2,0,0) + z(0,-1,2) \,|\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} =$$
$$= \{x(1,0,1) + y(2,1,0) + z(0,-1,2) \,|\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

*Επομένως* $\mathrm{Im}(f) = \langle \vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3 \rangle$, *όπου*

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1,0,1),\ \vec{\varepsilon}_2 = (2,1,0),\ \vec{\varepsilon}_3 = (0,-1,2)$$

*Εύκολα βλέπουμε ότι τα διανύσματα* $\vec{\varepsilon}_1$, $\vec{\varepsilon}_2$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον υπόχωρο* $\mathrm{Im}(f)$ *διότι* $\vec{\varepsilon}_3 = 2\vec{\varepsilon}_1 - \vec{\varepsilon}_2$. *Επομένως το σύνολο* $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ *είναι μια βάση του* $\mathrm{Im}(f)$. *΄Οπως και παραπάνω διαπιστώνουμε ότι* $\mathbf{r}(f) = 2$.

**Άσκηση 5.4.2** *΄Εστω* $\mathcal{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *μια βάση του* $\mathbb{R}^3$ *(όχι κατ΄ ανάγκην η κανονική), και έστω* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *η μοναδική γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει:*

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3,\ \ f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1,\ \ f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

*Να δείξετε ότι η* $f$ *είναι ισομορφισμός.*

**Λύση:** *Θα προσδιορίσουμε πρώτα την* $f$ *και ακολούθως τον πυρήνα της. ΄Εστω* $\vec{x}$ *ένα τυχόν διάνυσμα του* $\mathbb{R}^3$. *Τότε το* $\vec{x}$ *γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης* $\mathcal{B}$: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, *όπου* $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$. *Τότε:* $f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + x_3 f(\vec{e}_3) = x_1(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) + x_2(2\vec{e}_1) + x_3(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3)\vec{e}_1 + (-x_1 + x_3)\vec{e}_2 + (x_1 + 2x_3)\vec{e}_3$. *Επομένως η* $f$ *ορίζεται (ως προς τη βάση* $\mathcal{B}$*) από τον τύπο:*

$$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3)\vec{e}_1 + (-x_1 + x_3)\vec{e}_2 + (x_1 + 2x_3)\vec{e}_3$$

*Θα προσδιορίσουμε τον πυρήνα της* $f$. *΄Εστω* $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \in \mathrm{Ker}(f)$. *Τότε* $f(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_3)\vec{e}_1 + (-x_1 + x_3)\vec{e}_2 + (x_1 + 2x_3)\vec{e}_3 = \vec{0}$, *και επομένως, επειδή τα* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα, θα έχουμε:*

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,\ \ -x_1 + x_3 0,\ \ x_1 + 2x_3 = 0$$

*Λύνοντας αυτό το σύστημα ως πρός* $x_1, x_2, x_3$, *βλέπουμε εύκολα ότι έχει μοναδική λύση* $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. *Τότε όμως* $\vec{x} = \vec{0}$ *και επομένως* $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. *Ιδιαίτερα η* $f$ *είναι μονομορφισμός και* $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f) = 0$. *Από την θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$ *έπεται τότε ότι* $3 = \mathbf{r}(f)$. *Με άλλα λόγια* $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f) = 3$. *Αυτό όμως συνεπάγεται ότι* $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, *δηλαδή η* $f$ *είναι επιμορφισμός. Επομένως η* $f$ *είναι ισομορφισμός.*

Το υπόλοιπο τμήμα της παρούσης ενότητας θα αφιερωθεί στην μελέτη των συνεπειών της Θεμελιώδους Εξίσωσης Διαστάσεων και ιδιαίτερα στην μελέτη της βαθμίδας μιας γραμμικής απεικόνισης.

Αρχίζουμε με το ακόλουθο σπουδαίο Θεώρημα το οποίο δίνει ένα απλό κριτήριο για το πότε δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης είναι ισόμορφοι.

**Θεώρημα 5.4.3** *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. $\mathcal{E} \cong \mathcal{F}$.

2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$.

*Απόδειξη:* 1. $\Rightarrow$ 2. Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ ένας ισομορφισμός, και έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$ η θεμελιώδης εξίσωση διαστάσεων της $f$. Επειδή η $f$ είναι μονομορφισμός, από την Πρόταση 5.2.9 θα έχουμε $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(f) = 0$. Επίσης η $f$ είναι επιμορφισμός, δηλαδή $\operatorname{Im}(f) = \mathcal{F}$, και άρα $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Συνοψίζοντας θα έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$.

2. $\Rightarrow$ 1. Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} := n$, και έστω $\mathsf{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ και $\mathsf{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ βάσεις των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ αντίστοιχα. Σύμφωνα με το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης 5.3.1, υπάρχουν μοναδικές γραμμικές απεικονίσεις

$$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}, \ \text{ έτσι ώστε: } f(\vec{e}_i) = \vec{\varepsilon}_i, \ 1 \leq i \leq n$$

$$g : \mathcal{F} \to \mathcal{E}, \ \text{ έτσι ώστε: } g(\vec{\varepsilon}_i) = \vec{e}_i, \ 1 \leq i \leq n$$

Θα δείξουμε ότι η $f$ είναι ισομορφισμός με αντίστροφη την $g$. Θεωρούμε την σύνθεση $g \circ f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ η οποία προφανώς είναι μια γραμμική απεικόνιση. Παρατηρούμε ότι $(g \circ f)(\vec{e}_i) = g(f(\vec{e}_i)) = g(\vec{\varepsilon}_i) = \vec{e}_i$, $1 \leq i \leq n$. Όμως και η ταυτοτική απεικόνιση $\operatorname{Id}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ είναι γραμμική και ικανοποιεί τις σχέσεις $\operatorname{Id}(\vec{e}_i) = \vec{e}_i$, $1 \leq i \leq n$. Άρα από το κριτήριο μοναδικότητας στο Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης 5.3.1, έπεται ότι $g \circ f = \operatorname{Id}_{\mathcal{E}}$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$, θα έχουμε με παρόμοιο τρόπο ότι $f \circ g = \operatorname{Id}_{\mathcal{F}}$. Επομένως από την Πρόταση 5.2.9 έπεται οτι η $f$ είναι ισομορφισμός με αντίστροφη την $g$. Άρα οι χώροι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι ισόμορφοι. □

Επειδή ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{K}^n$, όπως έχουμε δει, έχει διάσταση $n$, θα έχουμε ως άμεσες συνέπειες του παραπάνω Θεωρήματος τα ακόλουθα σημαντικά πορίσματα.

**Πόρισμα 5.4.4** *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ με διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$. Τότε ο χώρος $\mathcal{E}$ είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{K}^n$: $\mathcal{E} \cong \mathbb{K}^n$.*

**Πόρισμα 5.4.5** *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα, και $n, m \geq 1$ δύο φυσικοί αριθμοί. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. $\mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^m$.

2. $n = m$.

**Σχόλιο 5.4.3** *Τα Πορίσματα 5.4.4 και 5.4.5 είναι πολύ σημαντικά. Το μεν πρώτο διότι, καθώς ισόμορφοι χώροι έχουν τις ίδιες βασικές ιδιότητες, ανάγει την μελέτη των διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ (των οποίων τα στοιχεία ενδέχεται να είναι πολυώνυμα, συναρτήσεις, πίνακες κτλ) στη μελέτη των διανυσματικών χώρων $\mathbb{K}^n$, $n \geq 1$ οι οποίοι μας είναι πολύ πιο προσιτοί. Γι' αυτό το λόγο αποτελούν μοντέλα των διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης. Το δε δεύτερο πόρισμα μας εξασφαλίζει το «αναλλοίωτο της διάστασης» διανυσματικών χώρων πεπερασμένων ακολουθιών.*

Θα δούμε τώρα μια διαφορετική απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.5 με χρήση της Θεμελιώδους Εξίσωσης Διαστάσεων.

**Θεώρημα 5.4.6** *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δύο υποχωροι του $\mathcal{E}$. Τότε ισχύει ο εξής τύπος:*

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}+\mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} - \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})}$$

*Απόδειξη:* Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}\times\mathcal{W}$ και τον υπόχωρο $\mathcal{V}+\mathcal{W}$ του $\mathcal{E}$. Υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με την Πρόταση 4.3.7, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\times\mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W}$. Ορίζουμε μια απεικόνιση ως εξής:

$$f : \mathcal{V}\times\mathcal{W} \to \mathcal{V}+\mathcal{W}, \ (\vec{x},\vec{y}) \ \mapsto \ \vec{x}+\vec{y}$$

Είναι εύκολο να δειχθεί (βλέπε την επόμενη Άσκηση 4.3.7) ότι η $f$ είναι μια γραμμική απεικόνιση. Επίσης είναι προφανές ότι η $f$ είναι επιμορφισμός, και άρα $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}+\mathcal{W})$. Επομένως η θεμελιώδης εξίσωση διαστάσεων για την $f$ έχει την μορφή: $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} = \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}+\mathcal{W})$ ή ισοδύναμα $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}+\mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{W} - \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}(f)$. Έτσι αρκεί να δείξουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V}\cap\mathcal{W})$. Όμως

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \{(\vec{x},\vec{y}) \in \mathcal{V}\times\mathcal{W} \,|\, f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0}\}\\ &= \{(\vec{x},\vec{y}) \in \mathcal{V}\times\mathcal{W} \,|\, \vec{x}+\vec{y} = \vec{0}\}\\ &= \{(\vec{x},\vec{y}) \in \mathcal{V}\times\mathcal{W} \,|\, \vec{x} = -\vec{y}\}\end{aligned}$$

Έτσι αν $(\vec{x},\vec{y}) \in \mathrm{Ker}(f)$, τότε $\vec{x} = -\vec{y}$. Επειδή $\mathcal{V} \ni \vec{x} = -\vec{y} \in \mathcal{W}$, έπεται ότι

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(\vec{x},-\vec{x}) \in \mathcal{V}\times\mathcal{W} \,|\, \vec{x} \in \mathcal{V}\cap\mathcal{W}\}$$

Επομένως μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση

$$g : \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \to \mathrm{Ker}(f), \;\; \vec{x} \mapsto g(\vec{x}) = (\vec{x}, -\vec{x})$$

Ισχυριζόμαστε ότι η $g$ είναι ισομορφισμός. Πραγματικά είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι η $g$ είναι γραμμική. Επιπλέον η $g$ είναι ισομορφισμός διότι είναι προφανώς επί, και 1-1 διότι $\mathrm{Ker}(g) = \{\vec{x} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \,|\, g(\vec{x}) = (\vec{0}, \vec{0})\} = \{\vec{x} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \,|\, (\vec{x}, -\vec{x}) = (\vec{0}, \vec{0})\} = \{\vec{0}\}$. Επομένως οι χώροι $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ και $\mathrm{Ker}(f)$ είναι ισόμορφοι, ιδιαίτερα θα έχουμε $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f)$. □

**Πρόχειρη Δοκιμασία**

Να δείξετε ότι η απεικόνιση $f : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \to \mathcal{V} + \mathcal{W}$ του Θεωρήματος 5.4.6 είναι γραμμική.

**Άσκηση 5.4.4** *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δύο υποχωροι του $\mathcal{E}$. Αν $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\}$, να δείξετε ότι:*

$$\mathcal{V} \times \mathcal{W} \;\cong\; \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$$

Θα δώσουμε τώρα κάποια χρήσιμα κριτήρια για το πότε μια γραμμική απεικόνιση είναι ισομορφισμός.

**Πρόταση 5.4.7** *[Κριτήρια Ισομορφισμού] Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$ και η $f$ είναι μονομορφισμός, τότε η $f$ είναι ισομορφισμός.*

2. *Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$ και η $f$ είναι επιμορφισμός, τότε η $f$ είναι ισομορφισμός.*

*Απόδειξη:* 1. Επειδή η $f$ είναι μονομορφισμός, θα έχουμε $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) = 0$. Επομένως η θεμελιώδης εξίσωση διαστάσεων θα έχει την μορφή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)$. Από την υπόθεση όμως θα έχουμε και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f)$. Τότε από την Πρόταση 4.4.1 έπεται ότι $\mathcal{F} = \mathrm{Im}(f)$ και επομένως η $f$ είναι επί. Άρα η $f$ είναι ισομορφισμός.

2. Επειδή η $f$ είναι επιμορφισμός, θα έχουμε $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{F}$ και άρα $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Επομένως η θεμελιώδης εξίσωση διαστάσεων θα έχει την μορφή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Επειδή από την υπόθεση έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$, έπεται ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) = 0$ ή ισοδύναμα $\mathrm{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$, και άρα η $f$ είναι μονομορφισμός. Επομένως η $f$ είναι ισομορφισμός. □

**Άσκηση 5.4.5** *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Θέτοντας $\vec{w}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{w}_2 = 2\vec{e}_1$, και $\vec{w}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ στο Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης 5.3.1, έπεται ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ έτσι ώστε:*

$$f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \ \ f(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1, \ \ f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.$$

*Να δείξετε ότι η $f$ είναι ισομορφισμός.*

**Λύση:** Θα προσδιορίσουμε τον τύπο της $f$ σε σχέση με την βάση $\mathcal{B}$.

**Πρόχειρη Δοκιμασία**

Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματκός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ και $g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις για τις οποίες ισχύει: $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

Να δείξετε ότι οι απεικονίσεις $f$ και $g$ είναι ισομορφισμοί και μάλιστα $g = f^{-1}$.

## 5.5 Η Άλγεβρα των Γραμμικών Απεικονίσεων

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε την άλγεβρα των γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ διανυσματικών χώρων υπεράνω ενός σώματος.

Από τώρα και στο εξής σταθεροποιούμε ένα σώμα $\mathbb{K}$.

**Συμβολισμός 5.5.1** *Αν $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω του $\mathbb{K}$, θα συμβολίζουμε με*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) := \{f : \mathcal{E} \to \mathcal{F} \mid \eta \ f \ \textit{είναι γραμμική}\}$$

*το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από τον $\mathcal{E}$ στον $\mathcal{F}$.*

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$. Επομένως πρέπει να ορίσουμε πρώτα πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού γραμμικών απεικονίσεων.

Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις.

**Πρόσθεση:** Ορίζουμε το άθροισμα $f+g$ των $f$ και $g$ να είναι η απεικόνιση

$$f+g:\mathcal{E}\to\mathcal{F},\ \ \vec{x}\mapsto\ \ (f+g)(\vec{x}):=f(\vec{x})+g(\vec{x})$$

Δείχνουμε ότι η απεικόνιση $f+g$ είναι γραμμική.

Έστω $\vec{x},\vec{y}\in\mathcal{E}$ και $k,l\in\mathbb{K}$. Τότε $(f+g)(k\vec{x}+l\vec{y})=f(k\vec{x}+l\vec{y})+g(k\vec{x}+l\vec{y})=kf(\vec{x})+lf(\vec{y})+kg(\vec{x})+lg(\vec{y})=k(f(\vec{x})+g(\vec{x}))+l(f(\vec{y})+g(\vec{y}))=k[(f+g)(\vec{x})]+l[(f+g)(\vec{y})]$.

**Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός Γραμμικών Απεικονίσεων:** Αν $k\in\mathbb{K}$, τότε ορίζουμε τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό $kf$ της $f$ με το $k$ να είναι η απεικόνιση

$$kf:\mathcal{E}\to\mathcal{F},\ \ \vec{x}\mapsto\ \ (kf)(\vec{x}):=kf(\vec{x})$$

Δείχνουμε ότι η απεικόνιση $kf$ είναι γραμμική.

Έστω $\vec{x},\vec{y}\in\mathcal{E}$ και $\mu,\nu\in\mathbb{K}$. Τότε $(kf)(\mu\vec{x}+\nu\vec{y})=k[f(\mu\vec{x}+\nu\vec{y})]=k[\mu f(\vec{x})+\nu f(\vec{y})]=k\mu f(\vec{x})+k\nu f(\vec{y})=\mu kf(\vec{x})+\nu kf(\vec{y})=\mu(kf)(\vec{x})+\nu(kf)(\vec{y})$.

**Θεώρημα 5.5.1** *Με τις παραπάνω πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, το σύνολο* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ *είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του* $\mathbb{K}$.

*Επιπλέον αν οι* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{F}$ *έχουν πεπερασμένη διάσταση, τότε και ο διανυσματικός χώρος* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ *έχει πεπερασμένη διάσταση και μάλιστα:*

$$\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})=\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E}\cdot\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{F}$$

*Απόδειξη:* Υπενθυμίζουμε από το Κεφάλαιο 1 ότι αν $\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$ και $S$ είναι ένα τυχόν σύνολο, τότε το σύνολο $\mathcal{F}(S,\mathcal{V})$ όλων των απεικονίσεων $f:S\to\mathcal{V}$ με πράξεις όπως ορίσθηκαν από τις σχέσεις $(2.1)$ και $(2.2)$ του Κεφαλαίου 1 (και οι οποίες συμπίπτουν με τις παραπάνω), είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$. Επομένως θέτοντας $S=\mathcal{E}$ και $\mathcal{V}=\mathcal{F}$, έπεται ότι με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο $\mathcal{F}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ όλων των απεικονίσεων (όχι κατ' ανάγκην γραμμικών) $f:\mathcal{E}\to\mathcal{F}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$. Θα δείξουμε ότι το υποσύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ του $\mathcal{F}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ το οποίο αποτελείται από όλες τις γραμμικές απεικονίσεις είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, και άρα είναι ένας διανυσματικός χώρος. Πράγματι: όπως είδαμε παραπάνω η πρόσθεση γραμμικών απεικονίσεων καθώς και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός αριθμού με γραμμική απεικόνιση είναι επίσης γραμμική απεικόνιση. Επιπρόσθετα Η μηδενική απεικόνιση $\mathbb{O}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}:\mathcal{E}\to\mathcal{F}$, $\vec{x}\mapsto\mathbb{O}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\vec{x})=\vec{0}$, η οποία είναι το μηδενικό στοιχείο του διανυσματικού χώρου $\mathcal{F}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, είναι προφανώς γραμμική και επομένως ανήκει στο υποσύνολο

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ του $\mathcal{F}(\mathcal{E},\mathcal{F})$. Ιδιαίτερα $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Επομένως το υποσύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ του $\mathcal{F}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, και άρα είναι ένας διανυσματικός χώρος.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = m$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = n$. Θα δείξουμε ο χώρος $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ έχει πεπερασμένη διάσταση και μάλιστα: $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = mn$.

Έστω $\mathsf{B} := \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$ και $\mathsf{C} := \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{F}$. Σταθεροποιούμε δύο δείκτες $i$ και $j$ με $1 \leq i \leq m$ και $1 \leq j \leq n$. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$f_{ij} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}, \ \text{έτσι ώστε:}\ f_{ij}(\vec{e}_k) = \delta_{ik}\vec{\varepsilon}_j, \ 1 \leq k \leq m \qquad (*)$$

Αν $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_m\vec{e}_m = \sum_{k=1}^{m} x_k\vec{e}_k$, τότε:

$$f_{ij}(\vec{x}) = (\sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}x_k)\vec{\varepsilon}_j$$

Έτσι αποκτούμε $nm$ γραμμικές απεικονίσεις $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathsf{B}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})} := \{f_{ij} \,|\, 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n\}$$

είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$.

*Το σύνολο $\mathsf{B}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο:* Θεωρούμε $nm$ το πλήθος αριθμούς $\{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ από το σώμα $\mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_{ij} = \mathbb{O}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$$

Επειδή μια γραμμική απεικόνιση είναι η μηδενική αν και μόνον αν στέλνει κάθε διάνυσμα της βάσης στο μηδενικό διάνυσμα, η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με την σχέση:

$$[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_{ij}](\vec{e}_k) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_{ij}(\vec{e}_k) = \mathbb{O}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\vec{e}_k) = \vec{0}, \ \ 1 \leq k \leq m$$

Σύμφωνα με τη σχέση $(*)$ η τελευταία σχέση γράφεται ως εξής:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{ik}\vec{\varepsilon}_k = \vec{0}, \ \ 1 \leq k \leq m$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\vec{\varepsilon}_j = \vec{0},\ \ 1 \leq k \leq m$$

Όμως επειδή το σύνολο $\mathsf{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ είναι βάση του $\mathcal{F}$, θα έχουμε ότι $\forall k = 1, 2, \cdots, m$:

$$k_{ij} = 0,\ \ 1 \leq j \leq n$$

Επομένως οι αριθμοί $\{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ είναι ίσοι με μηδέν, και άρα το σύνολο γραμμικών απεικονίσεων $\mathsf{B}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

*Το σύνολο $\mathsf{B}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})}$ παράγει τον χώρο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$:* Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση. Εφαρμόζοντας την $f$ σε κάθε διάνυσμα $\vec{e}_i$ της βάσης $\mathsf{B}$ του $\mathcal{E}$, γνωρίζουμε ότι η τιμή $f(\vec{e}_i)$ είναι γραμμικός συνδυασμός της βάσης $\mathsf{C} = \{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$ του $\mathcal{F}$. Έτσι υπάρχουν (μοναδικοί) αριθμοί $\{a_{ij} \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n\}$ από το σώμα $\mathbb{K}$ έτσι ώστε:

$$f(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\vec{\varepsilon}_j,\ \ 1 \leq i \leq m \tag{1}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}$. Αυτή η σχέση είναι μια ισότητα μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων. Επομένως η ισχύς της είναι ισοδύναμη, σύμφωνα με το Πόρισμα 5.3.2 με την ισχύ της ακόλουθης σχέσης:

$$f(\vec{e}_k) = \Big[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}\Big](\vec{e}_k),\ \ \forall k = 1, 2, \cdots, m \tag{2}$$

Θα έχουμε, $\forall k = 1, 2, \cdots, m$:

$$\begin{aligned}
\Big[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}\Big](\vec{e}_k) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}(\vec{e}_k) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{ik}\vec{\varepsilon}_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\vec{\varepsilon}_j \\
&= f(\vec{e}_k)
\end{aligned}$$

Άρα η ζητούμενη σχέση (2) ισχύει και επομένως η τυχούσα γραμμική απεικόνιση $f$ είναι γραμμικός συνδυασμός των γραμμικών απεικονίσεων $f_{ij}$. Συνοψίζοντας, έχουμε ότι το σύνολο $\mathsf{B}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})}$ παράγει τον χώρο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$.

Έτσι το σύνολο $\mathsf{B}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})}$ είναι μια βάση του χώρου $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$, και επομένως επειδή $|\mathsf{B}_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F})}| = nm$, έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = mn = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \cdot \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$$

□

Θέτοντας $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ στο Θεώρημα 5.5.1 θα έχουμε το ακόλουθο πόρισμα:

**Πόρισμα 5.5.2** *Αν $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, τότε το σύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ των γραμμικών απεικονίσεων $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$.*

*Επιπλέον αν ο χώρος $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε και ο διανυσματικός χώρος $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ έχει πεπερασμένη διάσταση και μάλιστα:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{E}) = (\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E})^2$$

Υπενθυμίζουμε ότι θεωρώντας το σώμα $\mathbb{K}$ σαν διανυσματικό χώρο υπεράνω του εαυτού του, έχουμε την ακόλουθη άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.4.2.

**Πόρισμα 5.5.3** *Αν $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, τότε το σύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathbb{K})$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$.*

*Επιπλέον αν ο χώρος $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε και ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}^\star = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathbb{K})$ έχει πεπερασμένη διάσταση και μάλιστα:*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}^\star = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$$

**Πόρισμα 5.5.4** *Αν $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διαστάσης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε ο χώρος $\mathcal{E}$ είναι ισόμορφος με τον δυϊκό του χώρο $\mathcal{E}^\star$: $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^\star$.*

*Απόδειξη:* Από το Πόρισμα 5.5.3 έχουμε ότι οι χώροι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}^\star$ έχουν την ίδια διάσταση. Έτσι το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 5.4.3. □

**Σχόλιο 5.5.2** *Αν και το Πόρισμα 5.5.4 μας εξασφαλίζει ότι κάθε διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}$ πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του $\mathbb{K}$ είναι ισόμορφος με τον δυϊκό του χώρο $\mathcal{E}^\star$, αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι πλήρως ικανοποιητικό. Ο λόγος είναι ότι ο ισομορφισμός $f : \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}^\star$ εξαρτάται δραστικά, όπως προκύπτει από το Θεώρημα 5.4.3, από την επιλογή βάσης στον χώρο $\mathcal{E}$. Επομένως αλλαγή βάσης* *στον $\mathcal{E}$ ορίζει και νέο ισομορφισμό μεταξύ των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}^\star$. Έτσι ο ισομορφισμός δεν είναι «φυσικός» δηλαδή δεν δίνεται από έναν τύπο ο οποίος είναι ανεξάρτητος της επιλογής βάσης.*

Εκτός από την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό γραμμικών απεικονίσεων, σε κάποιες περιπτώσεις, μπορούμε να θεωρήσουμε και μια άλλη πράξη μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων. Πραγματικά αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ και $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε ορίζεται και η σύνθεση $g \circ f : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$, ως εξής: $(g \circ f)(\vec{x}) := g(f(\vec{x}))$. Γι' αυτή την, όχι πάντοτε οριζόμενη πράξη, ισχύει η ακόλουθη Πρόταση.

**Πρόταση 5.5.5** ($\alpha$) *Η σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων (όταν αυτή ορίζεται) είναι γραμμική απεικόνιση.*

($\beta$) *Έστω ότι $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ είναι διανυσματικοί χώροι υπεράνω του $\mathbb{K}$, και έστω ότι $h_1, h_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{E}$, $f : \mathcal{E} \to F$, και $g_1, g_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι γραμμικές απεικονίσεις:*

$$\mathcal{H} \overset{h_1}{\underset{h_2}{\longrightarrow}} \mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F} \overset{g_1}{\underset{g_2}{\longrightarrow}} \mathcal{G}$$

*Τότε ισχύουν τα εξής:*

1. $(h_1 + h_2) \circ f = h_1 \circ f + h_2 \circ f$.

2. $f \circ (g_1 + g_2) = f \circ g_1 + f \circ g_2$.

3. $\mathrm{Id}_{\mathcal{F}} \circ f = f = f \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

4. $g_1 \circ (f \circ h_1) = (g_1 \circ f) \circ h_1$.

($\gamma$) *Αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ και $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, και $k \in \mathbb{K}$, τότε:*

$$(kg) \circ f = g \circ (kf) = k(g \circ f).$$

*Απόδειξη:* Η απόδειξη αφήνεται ως Άσκηση 5.5.3 στον αναγνώστη. □

**Άσκηση 5.5.3** *Αποδείξτε την Πρόταση 5.5.5.*

Αν στην παραπάνω Πρόταση θέσουμε $\mathcal{E} = \mathcal{H} = \mathcal{F} = \mathcal{G}$, τότε η σύνθεση δύο οιωνδήποτε γραμμικών απεικονίσεων από τον $\mathcal{E}$ στον $\mathcal{E}$ ορίζεται πάντα. Επομένως ο διανυσματικός χώρος $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ έχει επιπρόσθετες ιδιότητες και δομή.

**Συμβολισμός 5.5.4** *Αν $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, τότε ο διανυσματικός χώρος $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$ θα συμβολίζεται με $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$, τα δε στοιχεία του* **ενδομορφισμοί** *του $\mathcal{E}$.*

*Δηλαδή ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$.*

*Από τώρα και στο εξής, αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ είναι ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$ και $n \geq 1$ είναι ένας φυσικός αριθμός, θα συμβολίζουμε με $f^n : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ τη σύνθεση της γραμμικής απεικόνισης $f$ με τον εαυτό της $n$ φορές. Δηλαδή $f^n(\vec{x}) = f(f(f(\cdots f)\cdots))(\vec{x})$ όπου η $f$ εφαρμόζεται $n$ φορές. Για παράδειγμα $f^3(\vec{x}) = f(f(f(\vec{x})))$. Για λόγους σύμβασης θέτουμε $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.*

**Σχόλιο 5.5.5** *Από την παραπάνω Πρόταση έπεται ότι για τυχόντες ενδομορφισμούς $f, g, h : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, και τυχόν στοιχείο $k \in \mathbb{K}$, ισχύουν τα εξής:*

1. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

2. $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ *και* $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.

3. $k(f \circ g) = (kf) \circ g = f \circ (kg)$.

4. $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \circ f = f = f \circ \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

*Ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, επί του οποίου έχει ορισθεί μια πράξη $\circ : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $(f, g) \mapsto f \circ g$ (η οποία καλείται πολλαπλασιασμός), έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι παραπάνω ιδιότητες 1. - 4. καλείται* $\mathbb{K}$-**άλγεβρα** *ή άλγεβρα υπεράνω του $\mathbb{K}$.*

*Επομένως για κάθε διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, το σύνολο $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E})$ των ενδομορφισμών του $\mathcal{E}$ (με πολλαπλασιασμό την σύνθεση απεικονίσεων) είναι μια άλγεβρα υπεράνω του $\mathbb{K}$.*

**Σχόλιο 5.5.6** *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f, g$ δύο στοιχεία της $\mathbb{K}$-άλγεβρας $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$, δηλαδή $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις (ενδομορφισμοί του $\mathcal{E}$). Δεν είναι γενικά αληθές ότι ισχύει: $f \circ g = g \circ f$. Για παράδειγμα έστω $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ και έστω οι γραμμικές απεικονίσεις:*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto f(x, y) = (-y, x)$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto g(x, y) = (x, -y)$$

*Τότε για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, έχουμε:*

$$f(g(x, y)) = f(x, -y) = (y, x) \neq (-y, -x) = g(-y, x) = g(f(x, y))$$

*Επομένως γενικά ισχύει:*

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Μια $\mathbb{K}$-άλγεβρα $\mathcal{R}$ τα στοιχεία της οποίας ικανοποιούν την σχέση $f \circ g = g \circ f$ καλείται *αντιμεταθετικη* $\mathbb{K}$-άλγεβρα. Για παράδειγμα ο διανυσματικός χώρος των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι μια αντιμεταθετική $\mathbb{R}$-άλγεβρα. Η θεωρία των αλγεβρών είναι πολύ εκτεταμένη και ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτών των σημειώσεων, επομένως δεν θα μας απασχολήσει περαιτέρω.

## 5.6 Βαθμίδα Γραμμικής Απεικόνισης

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε πιο αναλυτικά τις βασικές ιδιότητες της βαθμίδας μιας γραμμικής απεικόνισης. Ιδιαίτερα θα μας απασχολήσει πως μεταβάλλεται η βαθμίδα ως προς διάφορες πράξεις γραμμικών απεικονίσεων, όπως η σύνθεση, η πρόσθεση, και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός. Οι ιδιότητες τις οποίες θα αποδείξουμε στο παρόν εδάφιο θα έχουν σημαντικές εφαρμογές στην θεωρία βαθμίδας πινάκων.

Πριν περάσουμε στις ιδιότητες της βαθμίδας θα δούμε κάποιες ιδιότητες της εικόνας μιας γραμμικής απεικόνισης.

**Πρόταση 5.6.1** *Έστω $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ τρεις διανυσματικοί χώρου υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. *Αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, και $k \in \mathbb{K}$, $k \neq 0$, τότε:*

$$\mathrm{Im}(kf) = \mathrm{Im}(f)$$

2. *Αν $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις, τότε:*

$$\mathrm{Im}(f + g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$$

3. *Αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ και $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ είναι δύο γραμμικές απεικονίσεις, τότε:*

$$\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$$

4. *Αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε:*

$$\cdots \subseteq \mathrm{Im}(f^{n+1}) \subseteq \mathrm{Im}(f^n) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Im}(f^2) \subseteq \mathrm{Im}(f)$$

*Απόδειξη:* 1. Αν $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f)$, τότε $f(\vec{x}) = \vec{y}$ για κάποιο $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Όμως $\vec{y} = kf(\frac{1}{k}\vec{x})$, διότι $k \neq 0$, και αυτό σημαίνει ότι $\vec{y} \in \mathrm{Im}(kf)$. Άρα $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(kf)$. Αν $\vec{y} \in \mathrm{Im}(kf)$, τότε $\vec{y} = (kf)(\vec{x}) = kf(\vec{x}) = f(k\vec{x}) \in \mathrm{Im}(f)$. Άρα $\mathrm{Im}(kf) \subseteq \mathrm{Im}(f)$, και επομένως $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(kf)$.

2. Έστω $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f+g)$. Τότε $\vec{y} = (f+g)(\vec{x})$, για κάποιο $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε $\vec{y} = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$. Άρα $\mathrm{Im}(f+g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.

3. Έστω $\vec{y} \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. Τότε $\vec{y} = (g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$ για κάποιο $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\vec{y} \in \mathrm{Im}(g)$. Επομένως $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im}(g)$.

4. Είναι άμεση εφαρμογή του 3. □

**Άσκηση 5.6.1** *Διατυπώστε και αποδείξτε τις ανάλογες ιδιότητες της Πρότασης 5.6.1 για τον πυρήνα γραμμικής απεικόνισης.*

**Άσκηση 5.6.2** *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, να δείξετε ότι η βαθμίδα $\mathbf{r}(f)$ είναι ίση με την βαθμίδα των διανυσμάτων $f(\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n)$:*

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}\langle f(\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n)\rangle$$

**Λύση:** *Υπενθυμίζουμε ότι $\mathbf{r}\langle\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n\rangle = \dim_{\mathbb{K}}\langle\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n\rangle$, και άρα για να δείξουμε την ζητούμενη σχέση αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{Im}(f) = \langle\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n\rangle$. Προφανώς $\mathrm{Im}(f) \supseteq \langle\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n\rangle$. Έστω $\vec{z} \in \mathrm{Im}(f)$. Τότε υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f(\vec{x}) = \vec{z}$. Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι μια βαση του $\mathcal{E}$, μπορούμε να γράψουμε μοναδικά $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$, όπου $x_i \in \mathbb{K}$, $1 \le i \le n$. Τότε $\vec{z} = f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + x_n f(\vec{e}_n) \in \langle\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n\rangle$. Άρα $\mathrm{Im}(f) \subseteq \langle\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n\rangle$.*

$\boxed{\text{Βασικες Ιδιοτητες Βαθμιδας}}$

**1.** Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση.

(**a**) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(kf) = \mathbf{r}(f), \ \ \forall k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}} \tag{1}$$

**Απόδειξη:** Από τη Πρόταση 5.6.1 έχουμε $\mathrm{Im}(kf) = \mathrm{Im}(f)$. Παίρνοντας διαστάσεις θα έχουμε $\mathbf{r}(kf) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(kf) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = \mathbf{r}(f)$.

(**b**) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(f) \le \min\{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}, \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}\}} \tag{2}$$

**Απόδειξη:** Επειδή $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathcal{F}$, παίρνοντας διαστάσεις έχουμε $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) \le \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$. Επίσης από την θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων έχουμε $\mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f)$. Άρα $\mathbf{r}(f) \le \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$ και επομένως $\mathbf{r}(f) \le \min\{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}, \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}\}$.

**2.** Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις:

$$\mathcal{E} \xrightarrow[g]{f} \mathcal{F}$$

Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \leq \mathbf{r}(f+g) \leq \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)} \tag{3}$$

**Απόδειξη:** Από τη Πρόταση 5.6.1 έχουμε ότι $\operatorname{Im}(f+g) \subseteq \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$. Παίρνοντας διαστάσεις θα έχουμε: $\mathbf{r}(f+g) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f+g) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g))$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανισότητα και το Θεώρημα 5.4.6 θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(f+g) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)) &= \\ \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(g) - \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)) &\leq \\ \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) &\end{aligned}$$

Επειδή $f = f + g + (-g)$, εφαρμόζοντας την παραπάνω ανισότητα για τις απεικονίσεις $(f+g)$ και $(-g)$ καθώς και την ισότητα $(1)$, θα έχουμε:

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}[(f+g) + (-g)] \leq \mathbf{r}(f+g) + \mathbf{r}(-g) = \mathbf{r}(f+g) + \mathbf{r}(g)$$

Επομένως: $\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g) \leq \mathbf{r}(f+g)$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των $f$ και $g$, θα έχουμε και: $\mathbf{r}(g) - \mathbf{r}(f) \leq \mathbf{r}(f+g)$. Άρα $|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \leq \mathbf{r}(f+g)$. Συνοψίζοντας θα έχουμε τελικά: $|\mathbf{r}(f) - \mathbf{r}(g)| \leq \mathbf{r}(f+g) \leq \mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g)$.

**3.** Έστω $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ τρεις διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ και $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις:

$$\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{G}$$

(**a**) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(g \circ f) \leq \min\{\mathbf{r}(f), \mathbf{r}(g)\}} \tag{4}$$

**Απόδειξη:** Από τη Πρόταση 5.6.1 έχουμε ότι: $\operatorname{Im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{Im}(g)$. Επομένως παίρνοντας διαστάσεις, θα έχουμε: $\mathbf{r}(g \circ f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(g \circ f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(g) = \mathbf{r}(g)$. Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα και τη θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων για την απεικόνιση $g \circ f : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$, θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(g \circ f) + \mathbf{r}(g \circ f)$$

Επίσης από τη θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων για την απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \mathbf{r}(f)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εξισώσεις θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) + \mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(g \circ f) + \mathbf{r}(g \circ f)$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{r}(g \circ f) - \mathbf{r}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(g \circ f)$$

Όμως $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g \circ f)$. Πράγματι: αν $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$, τότε $f(\vec{x}) = \vec{0}$ και άρα $g(f(\vec{x})) = g(\vec{0}) = \vec{0}$. Έτσι $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$. Τότε όμως $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(g \circ f)$. Επομένως η τελευταία εξίσωση έχει σαν συνέπεια ότι $\mathbf{r}(g \circ f) - \mathbf{r}(f) \leq 0$, δηλαδή $\mathbf{r}(g \circ f) \leq \mathbf{r}(f)$. Συνοψίζοντας θα έχουμε: $\mathbf{r}(g \circ f) \leq \min\{\mathbf{r}(f), \mathbf{r}(g)$.

(**b**) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(f) \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{\vec{0}\}} \tag{5}$$

(**c**) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(g) \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g) = \mathcal{F}} \tag{6}$$

(**d**) Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(g) \ \Leftrightarrow \ \mathcal{F} = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)} \tag{7}$$

**Άσκηση 5.6.3** *Αποδείξτε τις ισοδυναμίες* (5), (6) *και* (7).

**Άσκηση 5.6.4** *Έστω $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$. Να δείξετε ότι αν η $g$ είναι ισομορφισμός, τότε:*

$$\mathbf{r}(f \circ g) = \mathbf{r}(g \circ f) = \mathbf{r}(f)$$

**Λύση:** *Πράγματι χρησιμοποιώντας την σχέση* (4) *και το ότι η βαθμίδα ενός ισομορφισμού είναι ίση με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, θα έχουμε:*

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(f \circ g \circ g^{-1}) \leq \mathbf{r}(f \circ g) \leq \mathbf{r}(f)$$

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(g^{-1} \circ g \circ f) \leq \mathbf{r}(g \circ f) \leq \mathbf{r}(f)$$

*Επομένως:*

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(f \circ g) \quad \textit{και} \quad \mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(g \circ f)$$

## 5.7 Ασκήσεις

**Άσκηση 5.7.1** *Ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές; Σε κάθε περίπτωση δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.*

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ f(x, y) = (2x - y, x)$.

   $\boxed{\textit{Σωστό}}$     *Λάθος*

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \ f(x, y, z) = (z, x + y)$.

   $\boxed{\textit{Σωστό}}$     *Λάθος*

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ f(x, y) = (x^2, y^2)$.

   *Σωστό*     $\boxed{\textit{Λάθος}}$

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \ f(x) = (2x, -x)$.

   $\boxed{\textit{Σωστό}}$     *Λάθος*

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \ f(x) = (1, -1)$.

   *Σωστό*     $\boxed{\textit{Λάθος}}$

6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \ f(x, y) = (xy, y, x)$.

   *Σωστό*     $\boxed{\textit{Λάθος}}$

7. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \ f(x, y, z) = (|x|, 0)$.

   *Σωστό*     $\boxed{\textit{Λάθος}}$

8. $f : \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \ f(A) = A^2$.

   *Σωστό*     $\boxed{\textit{Λάθος}}$

9. $f : \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}),\ \ f(A) = A + X$, *όπου* $X$ *είναι ένας σταθερός* $n \times n$ *πίνακας.*

   *Σωστό*     $\boxed{\textit{Λάθος}}$

10. $f : \mathbb{R}_n[t] \to \mathbb{R}_n[t],\ \ f(P(t)) = P(t)P'(t)$.

    *Σωστό*     $\boxed{\textit{Λάθος}}$

**Άσκηση 5.7.2** *Θεωρούμε τις ακόλουθες γραμμικές απεικονίσεις:*

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \ f_1(x, y, z) = (x + y + z, x + y)$$
$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \ f_2(x, y, z) = (2x + z, x + y)$$
$$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \ f_3(x, y, z) = (2y, x)$$

1. *Να δείξετε ότι το υποσύνολο* $\mathcal{F} := \{f_1, f_2, f_3\}$ *του διανυσματικού χώρου* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ *των γραμμικών απεικονίσεων* $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

2. *Να εξετάσετε αν το υποσύνολο* $\mathcal{F}$ *είναι βάση του χώρου* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

**Άσκηση 5.7.3** *Έστω* $a_0, a_1, \cdots, a_n$ *διακεκριμένα στοιχεία ενός σώματος* $\mathbb{K}$. *Να δείξετε ότι η απεικόνιση*

$$f : \mathbb{K}_n[t] \to \mathbb{K}^{n+1},\ \ P(t) \ \mapsto\ f(P(t)) := (P(a_0), P(a_1), \cdots, P(a_n))$$

*είναι γραμμική. Επίσης να εξεταστεί αν η* $f$ *είναι ισομορφισμός.*

**Άσκηση 5.7.4** *Να βρεθούν βάσεις της εικόνας και του πυρήνα για κάθε μια από τις γραμμικές απεικονίσεις* $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *της παραπάνω Άσκησης,* $i = 1, 2, 3$.

**Άσκηση 5.7.5** *Θεωρούμε τη βάση*

$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1 = (1, 2, 3),\ \vec{e}_2 = (2, 5, 3),\ \vec{e}_3 = (1, 0, 1)\}$$

*του* $\mathbb{R}^3$ *και τα διανύσματα*

$$\vec{w}_1 = (1, 0),\ \ \vec{w}_2 = (1, 0),\ \ \vec{w}_3 = (1, 1)$$

*του* $\mathbb{R}^2$. *Να προσδιορισθεί η μοναδική γραμμική απεικόνιση* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *έτσι ώστε:* $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$, $1 \leq i \leq 3$.

**Άσκηση 5.7.6** *Θεωρούμε τη βάση*

$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1 = 1,\ \vec{e}_2 = t,\ \vec{e}_3 = t^2\}$$

*του* $\mathbb{R}_2[t]$ *και τα διανύσματα*

$$\vec{w}_1 = 1 + t,\ \ \vec{w}_2 = 3 - t^2,\ \ \vec{w}_3 = 4 + 2t - 3t^2$$

*του* $\mathbb{R}_2[t]$. *Να προσδιορισθεί η μοναδική γραμμική απεικόνιση* $f : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ *έτσι ώστε:* $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$, $1 \leq i \leq 3$.

**Άσκηση 5.7.7** *Έστω* $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *μια γραμμική απεικόνιση, όπου* $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ *είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$. *Να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η* $f$ *είναι ισομορφισμός.*

2. *Η $f$ στέλνει μια τυχούσα βάση του $\mathcal{V}$ σε μια βάση του $\mathcal{W}$.*

**Άσκηση 5.7.8** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ η μοναδική γραμμική απεικόνιση η οποία στέλνει τα διανύσματα της κανονικής βάσης $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ στα διανύσματα*

$$\vec{w}_1 = (0,0,\cdots,0,0), \vec{w}_2 = (1,0,\cdots,0,0), \vec{w}_3 = (0,2,\cdots,0,0), \cdots, \vec{w}_n = (0,0,\cdots,n{-}1,0)$$

*Δηλαδή $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$, $1 \leq i \leq n$. Να δείξετε ότι $f^n = 0$ και ακολούθως να προσδιορίσετε βάσεις για τον πυρήνα $\mathrm{Ker}(f)$ και την εικόνα $\mathrm{Im}(f)$.*

**Άσκηση 5.7.9** *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι $f^n = 0$, και $f^{n-1} \neq 0$ (0 είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση $: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$). Αν $\vec{x} \in \mathcal{E}$, τότε να δείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η $f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$.*

2. *Το υποσύνολο διανυσμάτων $\{\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \cdots, f^{n-1}(\vec{x})\}$ του $\mathcal{V}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

**Άσκηση 5.7.10** *Να βρεθεί η βαθμίδα καθώς και η διάσταση του πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης:*

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z,w) := (x - y + z + w, x + 2y - z + w, 3y - 2z)$$

**Άσκηση 5.7.11** *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(f^2)$. Να δείξετε ότι $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.*

**Άσκηση 5.7.12** *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f^2)$. Να δείξετε ότι $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.*

**Άσκηση 5.7.13** *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Αν ισχύει $f^2 = \alpha f$, να δείξετε ότι $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.*

**Άσκηση 5.7.14** *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_4\}$ μια βάση του $\mathbb{R}^4$. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η μοναδική γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ για την οποία ισχύει:*

$$f(\vec{\varepsilon}_1) = \vec{\varepsilon}_1 + \lambda\vec{\varepsilon}_4,\quad f(\vec{\varepsilon}_2) = 2\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2,\quad f(\vec{\varepsilon}_3) = 2\vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3,\quad f(\vec{\varepsilon}_4) = 2\vec{\varepsilon}_3 + \vec{\varepsilon}_4$$

*να είναι ισομορφισμός.*

**Άσκηση 5.7.15** *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και $f : \mathbb{K}_n[t] \to \mathbb{K}_n[t]$ η απεικόνιση η οποία ορίζεται ως εξής: $f(P(t)) = P(t+1)$. Να δείξετε ότι η $f$ είναι γραμμική και ακολούθως να εξετάσετε εαν η $f$ είναι ισομορφισμός.*

**Άσκηση 5.7.16** *Να βρεθεί η βαθμίδα καθώς και η διάσταση του πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης:*

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z,w) := (x - z + 2w, -2x + y + 2z, y + 4w)$$

*Επιπλέον:*

1. *Να δείξετε ότι το διάνυσμα $(1,3,k)$ ανήκει στην εικόνα $\mathrm{Im}(f)$ της $f$ αν και μόνον αν $k = 5$.*

2. *Ποιά συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το διάνυσμα $(1, a, 1, b)$ να ανήκει στον πυρήνα $\mathrm{Ker}(f)$ της $f$;*

**Άσκηση 5.7.17** *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι $f^2 = 0$. Να δείξετε τα ακόλουθα:*

1. $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(f) \geq \frac{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}}{2}$.

3. *Η ανισότητα του 2. είναι ισότητα αν και μόνον αν $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.*

**Άσκηση 5.7.18** *Έστω $f, g : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις (γραμμικές μορφές), όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Ορίζουμε μια νέα απεικόνιση ως εξής:*

$$h : \mathcal{E} \to \mathbb{K}^2,\ h(\vec{x}) := (f(\vec{x}), g(\vec{x}))$$

*Να δείξετε τα ακόλουθα:*

1. *Η απεικόνιση $h$ είναι γραμμική.*

2. $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$.

3. $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{K}^2$ *(δηλαδή η $h$ είναι επιμορφισμός) αν και μόνον αν $f \neq 0 \neq g$.*

**Άσκηση 5.7.19** *Έστω $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, και έστω ότι $f + g = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$. Να δείξετε ότι:*

$$\mathbf{r}(f) + \mathbf{r}(g) \geq n$$

**Άσκηση 5.7.20** *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνη, όπου $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $m \geq 1$, έτσι ώστε:*

$$\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(f^m) \oplus \mathrm{Im}(f^m)$$

**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα**

**Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**

# Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.


# Σημειώματα

**Σημείωμα Αναφοράς**



# Σημείωμα Αδειοδότησης