ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Δυϊκοί Χώροι και Χώροι Πηλίκα

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Κεφάλαιο 6

Δυϊκοι Χωροι και Χωροι Πηλικα

Στο παρόν Κεφάλαιο θα μελετήσουμε εν συντομία δύο σημαντικά θέματα της Γραμμικής Άλγεβρας. Την θεωρία των γραμμικών μορφών και των δυϊκών χώρων, και την θεωρία των χώρων πηλίκων. Η θεωρία των δυϊκών χώρων σε συνάρτηση με την θεωρία βαθμίδας γραμμικών απεικονίσεων θα είναι σημαντική στα επόμενα Κεφάλαια όπου θα μελετήσουμε την θεωρία πινάκων.

6.1 Δυϊκοί Χώροι

Στην παρούσα ενότητα σταθεροποιούμε ένα σώμα $\mathbb{K}$, και συνήθως θα θεωρούμε το $\mathbb{K}$ ως διανυσματικό χώρο υπεράνω του εαυτού του.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$, τότε μια **γραμμική μορφή** επί του $\mathcal{E}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$. Επίσης υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο όλων των γραμμικών μορφών επί του $\mathbb{K}$ συμβολίζεται με

$$\mathcal{E}^\star := \{f : \mathcal{E} \to \mathbb{K} \mid \text{η } f \text{ είναι γραμμική}\}$$

και είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$.

Πρόταση 6.1.1 *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε το σύνολο*

$$\mathcal{B}^\star := \{\vartheta^1, \vartheta^2, \cdots, \vartheta^n\}$$

όπου $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, ϑ^i είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση $\vartheta^i : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$, για την οποία ισχύει:

$$\vartheta^i(\vec{e}_j) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{αν} \quad i = j \\ 0, & \text{αν} \quad i \neq j \end{array} \right\} \qquad\qquad 1 \leq j \leq n$$

είναι μια βάση του δυϊκού χώρου $\mathcal{E}$.

Απόδειξη: Επειδή το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathcal{E}$, από το Θεώρημα Γραμμικής Επέκτασης 5.3.1, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση, δηλαδή γραμμική μορφή, $\vartheta^i : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$ έτσι ώστε να ισχύει $\vartheta^i(\vec{e}_i) = 1$ και $\vartheta^i(\vec{e}_j) = 0$, $\forall j \neq i$. Επομένως αν $\vec{x} \in \mathcal{E}$ και $\vec{x} = \kappa_1\vec{e}_1 + \cdots + \kappa_n\vec{x}_n$ είναι η μοναδική γραφή του $\vec{x}$ ως πρός την βάση $\mathcal{B}$, τότε θα έχουμε $\vartheta^i(\vec{x}) = \kappa_i$, $1 \leq i \leq n$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο των γραμμικών μορφών $\mathcal{B}^\star = \{\vartheta^1, \vartheta^2, \cdots, \vartheta^n\}$ είναι μια βάση του δυϊκού χώρου $\mathcal{E}^\star$. Έστω $\kappa_1\vartheta^1 + \kappa_2\vartheta^2 + \cdots + \kappa_n\vartheta^n = \vec{0}$. Υπολογίζοντας την παραπάνω ισότητα γραμμικών απεικονίσεων στο διάνυσμα $\vec{e}_i \in \mathcal{B}$, και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\vartheta^i(\vec{e}_i) = 1$ και $\vartheta^i(\vec{e}_j) = 0$, $\forall j \neq i$, θα έχουμε $\kappa_i = 0$, $\forall i = 1, 2, \cdots, n$. Επομένως οι γραμμικές μορφές ϑ^i, $1 \leq i \leq n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έστω τώρα ξ μια τυχούσα γραμμική μορφή. Τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ το οποίο έχει μοναδική γραφή $\vec{x} = \kappa_1\vec{e}_1 + \cdots + \kappa_n\vec{x}_n$ ως πρός την βάση $\mathcal{B}$, θα έχουμε $\xi(\vec{x}) = \kappa_1\xi(\vec{e}_1) + \cdots + \kappa_n\xi(\vec{e}_n)$. Όμως από τον ορισμό τους, οι γραμμικές μορφές ϑ^i ικανοποιούν τις σχέσεις $\vartheta^i(\vec{x}) = \kappa_i$, $1 \leq i \leq n$. Άρα $\xi(\vec{x}) = \kappa_1\xi(\vec{e}_1) + \cdots + \kappa_n\xi(\vec{e}_n) = \xi(\vec{e}_1)\vartheta^1(\vec{x}) + \cdots + \xi(\vec{e}_n)\vartheta^n(\vec{x}) = (\xi(\vec{e}_1)\vartheta^1 + \cdots + \xi(\vec{e}_n)\vartheta^n)(\vec{x})$. Επομένως επειδή το διάνυσμα $\vec{x}$ είναι τυχόν, θα έχουμε $\xi = \xi(\vec{e}_1)\vartheta^1 + \cdots + \xi(\vec{e}_n)\vartheta^n$, δηλαδή η γραμμική μορφή ξ είναι γραμμικών συνδυασμός των γραμμικών μορφών $\{\vartheta^1, \cdots, \vartheta^n\}$. Συνοψίζοντας θα έχουμε ότι το σύνολο γραμμικών μορφών $\mathcal{B}^\star$ είναι μια βάση του δυϊκού χώρου $\mathcal{E}^\star$. □

Ορισμός 6.1.2 *Έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε η βάση $\mathcal{B}^\star = \{\vartheta^1, \vartheta^2, \cdots, \vartheta^n\}$ του δυϊκού χώρου $\mathcal{E}^\star$ η οποία κατασκευάστηκε στην Πρόταση 6.1.1 καλείται η* **δυϊκή βάση** *της $\mathcal{B}$.*

Από την κατασκευή της τα στοιχεία της δυϊκής βάσης $\mathcal{B}^\star$ της $\mathcal{B}$ ορίζονται ως εξής: Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε το $\vec{x}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n$. Τότε $\forall i = 1, 2, \cdots, n$, $\vartheta^i(\vec{x}) = x_i$.

Από την Πρόταση 6.1.1, και το Θεώρημα 5.4.3 έπεται άμεσα το ακόλουθο Πόρισμα.

Πόρισμα 6.1.3 *Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$, τότε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}^\star$. Ιδιαίτερα κάθε διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}$ πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ είναι ισόμορφος με τον δυϊκό του χώρο $\mathcal{E}^\star$: $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^\star$.*

Σχόλιο 6.1.1 *Το Πόρισμα 6.1.3 δεν ισχύει αν ο χώρος $\mathcal{E}$ έχει άπειρη διάσταση.*

Επειδή η κατασκευή του δυϊκού χώρου ισχύει για κάθε διανυσματικό χώρο, μπορούμε να θεωρήσουμε και τον δυϊκό χώρο $(\mathcal{E}^\star)^\star$ του δυϊκού χώρου $\mathcal{E}^\star$ του $\mathcal{E}$. Ο διανυσματικός χώρος $(\mathcal{E}^\star)^\star$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{E}^{\star\star}$ και θα καλείται ο **διπλά δυϊκός** χώρος του $\mathcal{E}$. Εκ κατασκευής τα στοιχεία του διπλά δυϊκού χώρου $\mathcal{E}^{\star\star}$ είναι γραμμικές μορφές (απεικονίσεις) $\phi : \mathcal{E}^\star \to \mathbb{K}$.

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 6.1.3 θα έχουμε την ακόλουθη άμεση συνέπεια.

Πόρισμα 6.1.4 *Αν* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$, *τότε* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}^{\star\star}$. *Ιδιαίτερα κάθε διανυσματικός χώρος* $\mathcal{E}$ *πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος* $\mathbb{K}$ *είναι ισόμορφος με τον διπλά δυϊκό του χώρο* $\mathcal{E}^{\star\star}$*:* $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^{\star\star}$.

Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}$ και ο διπλά δυϊκός του $\mathcal{E}^{\star\star}$ συνδέονται μέσω μιας γραμμικής απεικόνισης η οποία ορίζεται με φυσικό τρόπο. Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση

$$\iota : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\star\star}, \;\; \vec{x} \mapsto \iota(\vec{x})$$

όπου $\iota(\vec{x})$ είναι η γραμμική μορφή:

$$\iota(\vec{x}) : \mathcal{E}^\star \to \mathbb{K}, \;\; \xi \mapsto \iota(\vec{x})(\xi) := \xi(\vec{x}).$$

Θεώρημα 6.1.5 *Αν* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$, *τότε η απεικόνιση* $\iota : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\star\star}$ *ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.*

Απόδειξη: Επειδή οι χώροι $\mathcal{E}$ και $\mathcal{E}^{\star\star}$ έχουν την ίδια διάσταση, για να δείξουμε ότι η ι είναι ισομορφισμός, σύμφωνα με την Πρόταση 5.4.7 αρκεί να δείξουμε ότι η ι είναι μονομορφισμός. Δείχνουμε πρώτα ότι η ι είναι γραμμική. Έστω $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{K}$ και $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathcal{E}$. Τότε για κάθε γραμμική μορφή $\xi : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$, δηλαδή στοιχείο του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}^\star$, θα έχουμε $\iota(\kappa_1\vec{x}_1 + \kappa_2\vec{x}_2)(\xi) = \xi(\kappa_1\vec{x}_1 + \kappa_2\vec{x}_2) = \kappa_1\xi(\vec{x}_1) + \kappa_2\xi(\vec{x}_2) = \kappa_1\iota(\vec{x}_1)(\xi) + \kappa_2\iota(\vec{x}_2)(\xi) = [\kappa_1\iota(\vec{x}_1) + \kappa_2\iota(\vec{x}_2)](\xi)$, και επομένως επειδή η γραμμική μορφή ξ είναι τυχούσα, θα έχουμε $\iota(\kappa_1\vec{x}_1 + \kappa_2\vec{x}_2) = \kappa_1\iota(\vec{x}_1) + \kappa_2\iota(\vec{x}_2$, δηλαδή η απεικόνιση ι είναι γραμμική. Έστω τώρα $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(\iota)$, και έστω $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$, όπου $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$. Τότε για κάθε γραμμική μορφή $\xi : \mathcal{E} \to \mathbb{K}$, θα έχουμε $\iota(\vec{x})(\xi) = \vec{0}$. Επομένως για τις γραμμικές μορφές ϑ^i, $1 \leq i \leq n$, όπου $\mathcal{B}^\star := \{\vartheta^1, \cdots, \vartheta^n\}$ είναι η δυϊκή βάση της $\mathcal{B}$, θα έχουμε: $\iota(\vec{x})(\vartheta^i) = 0$, $1 \leq i \leq n$, δηλαδή $\vartheta^i(\vec{x}) = x_i = 0$. Επομένως $\vec{x} = \vec{0}$ και άρα $\mathrm{Ker}(\iota) = \{\vec{0}\}$, δηλαδή η ι είναι μονομορφισμός και συνεπακόλουθα ισομορφισμός. $\square$

Σχόλιο 6.1.2 *Το γεγονός ότι ένας διανυσματικός χώρος $\mathcal{E}$ με πεπερασμένη διάσταση υπεράνω του $\mathbb{K}$ είναι ισόμορφος με τον διπλά δυϊκό του $\mathcal{E}^{\star\star}$ προκύπτει όπως είδαμε και από το Πόρισμα 6.1.4. Όμως ο ισομορφισμός $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}^{\star\star}$ του Πορίσματος 6.1.4 ορίζεται, όπως είναι φανερό από το Πόρισμα 6.1.3, μέσω μιας βάσης του $\mathcal{E}$, και επομένως εξαρτάται από την επιλογή της βάσης. Αντίθετα ο ισομορφισμός $\iota : \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}^{\star\star}$ του Θεωρήματος 6.1.5 είναι ανεξάρτητος της επιλογής βάσης και επομένως είναι περισσότερο «φυσικός» με μια έννοια η οποία μπορεί να γίνει αυστηρή, αλλά ξεφεύγει από τα όρια των παρόντων σημειώσεων. Ουσιαστικά η ιοσομορφισμός ι ορίζεται με τον ίδιο τύπο για κάθε διανυσματικό χώρο και συμπεριφέρεται ομαλά σε σχέση με τις γραμμικές απεικονίσεις.*

6.1.1 Μηδενιστές

Στην παρούσα υποενότητα θα μελετήσουμε την συμπεριφορά υπόχωρων ως προς τους δυϊκούς χώρους.

Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.

Ορισμός 6.1.6 *Ο* **μηδενιστής** *$\mathcal{V}^\circ$ του υπόχωρου $\mathcal{V}$ ορίζεται να είναι το ακόλουθο υποσύνολο του δυϊκού χώρου $\mathcal{E}$:*

$$\mathcal{V}^\circ := \{\xi \in \mathcal{E}^\star \mid \xi(\vec{x}) = 0, \ \forall \vec{x} \in \mathcal{V}\}$$

Πρόταση 6.1.7 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Τότε ο μηδενιστής $\mathcal{V}^\circ$ του $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του δυϊκού χώρου $\mathcal{E}^\star$ του $\mathcal{E}$.*

Επιπλέον αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$, τότε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^\circ$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε την γραμμική απεικόνιση $\iota : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\star\star}, \ \vec{x} \mapsto \iota(\vec{x})$ που ορίσαμε παραπάνω. Για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{V}$, ορίζεται η γραμμική μορφή $\iota(\vec{x}) : \mathcal{E}^\star \to \mathbb{K}$, $\xi \mapsto \iota(\vec{x})(\xi) = \xi(\vec{x})$. Προφανώς τότε θα έχουμε:

$$\mathcal{V}^\circ = \bigcap_{\vec{x} \in \mathcal{V}} \mathrm{Ker}(\iota(\vec{x}))$$

Επειδή ο πυρήνας μιας γραμμικής απεικόνισης είναι υπόχωρος και η τομή υπόχωρων είναι υπόχωρος, έπεται από την παραπάνω περιγραφή ότι ο μηδενιστής $\mathcal{V}^\circ$ του $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}^\star$.

Έστω ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = r$. Επιλέγουμε μια τυχούσα βάση $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_r\}$ του $\mathcal{V}$ και την συμπληρώνουμε σε μια βάση

$$\mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \cdots, \vec{e}_n\}$$

του $\mathcal{E}$. Θεωρούμε επίσης την επαγόμενη δυϊκή βάση

$$\mathcal{B}^{\star}_{\mathcal{E}} = \{\vartheta^1, \cdots, \vartheta^r, \vartheta^{r+1}, \cdots, \vartheta^n\}$$

του $\mathcal{E}^{\star}$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{C} := \{\vartheta^{r+1}, \cdots, \vartheta^n\}$ είναι μια βάση του υπόχωρου $\mathcal{V}^{\circ}$. Έστω $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_r\vec{e}_r$ ένα διάνυσμα του $\mathcal{V}$. Θεωρώντας το $\vec{x}$ σαν δθιάνυσμα του $\mathcal{E}$, αυτό θα γράφεται $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_r\vec{e}_r + 0\vec{e}_{r+1} + \cdots + 0\vec{e}_n$ σαν γραμμικός συνδυασμός της βάσης $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ του $\mathcal{E}$. Τότε για κάθε $i = r+1, \cdots, n$, θα έχουμε: $\vartheta^i(\vec{x}) = 0$. Άρα οι γραμμικές μορφές ϑ^i, $r+1 \leq i \leq n$, μηδενίζουν όλα τα διανύσματα του υπόχωρου $\mathcal{V}$ και επομένως ανήκουν στον υπόχωρο $\mathcal{V}^{\circ}$. Επειδή το σύνολο γραμμικών μορφών $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}^{\star}$ και $\mathcal{V}^{\circ} \subseteq \mathcal{E}^{\star}$, κάθε γραμμική μορφή $\xi \in \mathcal{V}^{\circ}$ θα γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$: $\xi = \lambda_1\vartheta^1 + \cdots + \lambda_r\vartheta^r + \lambda_{r+1}\vartheta^{r+1} + \cdots + \lambda_n\vartheta^n$, όπου όπως είδαμε $\lambda_j = \xi(\vec{e}_j)$, $1 \leq j \leq n$. Επειδή όμως τα διανύσματα $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_r$ ανήκουν στον υπόχωρο $\mathcal{V}$, θα έχουμε $\lambda_i = \xi(\vec{e}_i) = 0$, $\forall i = 1, 2, \cdots, r$. Άρα $\xi = \lambda_{r+1}\vartheta^{r+1} + \cdots + \lambda_n\vartheta^n$, και επομένως το σύνολο γραμμικών μορφών $\mathcal{C}$ παράγει τον υπόχωρο $\mathcal{V}^{\circ}$. Από την άλλη πλευρά το σύνολο $\mathcal{C}$ είναι γραμμμικά ανεξάρτητο ως υποσύνολο του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$. Άρα το $\mathcal{C}$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}^{\circ}$ και επομένως $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^{\circ} = n - r = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$. Συνοψίζονατς θα έχουμε την ζητούμενη σχέση: $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^{\circ}$. □

Πρόταση 6.1.8 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός:*

$$\phi : \mathcal{V} \xrightarrow{\cong} \mathcal{V}^{\circ\circ}$$

Απόδειξη: Από την Πρόταση 6.1.7 θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^{\circ}$$

Αντικαθιστώντας τους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{E}$ και $\mathcal{V}^{\circ} \subseteq \mathcal{E}^{\star}$ με τους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{E}^{\star}$ και $\mathcal{V}^{\circ\circ} \subseteq \mathcal{E}^{\star\star}$, από την ίδια Πρόταση θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}^{\star} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^{\circ} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^{\circ\circ}$$

Επειδή από το Πόρισμα 6.1.4 έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}^{\star}$, έπεται ότι: $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^{\circ} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^{\circ} + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^{\circ\circ}$, και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^{\circ\circ}$.

Τέλος η γραμμική απεικόνιση $\iota : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\star\star}$, $\vec{x} \mapsto \iota(\vec{x})$, περιορίζεται σε μια γραμμική απεικόνιση $\iota_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^{\circ\circ}$. Πράγματικά: για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{V}$ και κάθε γραμμική μορφή $\xi \in \mathcal{V}^{\circ}$, θα έχουμε: $\iota(\vec{x})(\xi) = \xi(\vec{x}) = \vec{0}$. Αυτό σημαίνει ότι $\iota(\vec{x}) \in \mathcal{V}^{\circ\circ} = \{\zeta \in \mathcal{E}^{\star\star} \mid \zeta(\xi) = \vec{0},\ \forall \xi \in \mathcal{V}^{\circ}\}$. Επειδή η $\iota_{\mathcal{V}} = \iota|_{\mathcal{V}}$ είναι ο περιορισμός της ι στον υπόχωρο $\mathcal{V}$, και η ι είναι μονομορφισμός, έπεται ότι η $\iota_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^{\circ\circ}$ θα είναι επίσης μονομορφισμός. Επειδή όμως όπως είδαμε ισχύει $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}^{\circ\circ}$, από τα κριτήρια ισομορφισμών, βλέπε Πρόταση 5.4.7, θα έχουμε ότι η $\iota_{\mathcal{V}}$ είναι ισομορφισμός. $\square$

6.1.2 Η Δυϊκή μιας Γραμμικής Απεικόνισης

Στην παρούσα υπο - ενότητα θα μελετήσουμε την συμπεριφορά των γραμμικών απεικονίσεων σε σχέση με τους δυϊκούς χώρους.

Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Είναι φυσικό να θέσουμε το ερώτημα αν οι δυϊκοί χώροι $\mathcal{E}^{\star}$ και $\mathcal{F}^{\star}$ συνδέονται μέσω μιας γραμμικής απεικόνισης (η οποία φυσικά περιμένουμε να εξαρτάται από την f με κάποιον τρόπο). Αυτό πράγματι συμβαίνει αν και η φορά της γραμμικής απεικόνισης η οποία τους συνδέει είναι αντίθετη με την φορά της f.

Ορίζουμε μια απεικόνιση

$$^{t}f : \mathcal{F}^{\star} \ \longrightarrow \ \mathcal{E}^{\star},\ \xi \ \mapsto \ ^{t}f(\xi) = f \circ \xi$$

Περισσότερο παραστατικά η απεικόνιση ^{t}f ορίζεται ως εξής:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "^{t}f(\xi)=\xi\circ f"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "\xi"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Δηλαδή η απεικόνιση ^{t}f στέλνει μια γραμμική μορφή ξ στην σύνθεση της με την f. Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $^{t}f(\xi) = \xi \circ f$ είναι μια γραμμική μορφή διότι είναι γραμμική απεικόνιση ως σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων.

Ορισμός 6.1.9 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$. Η απεικόνιση $^{t}f : \mathcal{F}^{\star} \to \mathcal{E}^{\star}$ καλείται η* **δυϊκή** *ή* **ανάστροφη απεικόνιση** *της f.*

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να ορίσουμε και την **διπλά δυϊκή** απεικόνιση $^{t}(^{t}f) : \mathcal{E}^{\star\star} \to \mathcal{F}^{\star\star}$ της f ως την δυϊκή απεικόνιση της $^{t}f : \mathcal{F}^{\star} \to \mathcal{E}^{\star}$. Χάριν απλότητας θα συμβολίζουμε $^{t}(^{t}f) := {}^{tt}f : \mathcal{E}^{\star\star} \to \mathcal{F}^{\star\star}$.

Θεώρημα 6.1.10 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$. Τότε η δυϊκή απεικόνιση ${}^t f : \mathcal{F}^\star \to \mathcal{E}^\star$ είναι γραμμική.*

Επιπλέον αν $\iota_\mathcal{E} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\star\star}$ και $\iota_\mathcal{F} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\star\star}$ είναι οι γραμμικές απεικονίσεις του Θεωρήματος 6.1.5 για τους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$, τότε οι συνδέσεις $\iota_\mathcal{F} \circ f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}^{\star\star}$ και ${}^{tt} f \circ \iota_\mathcal{E} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}^{\star\star}$ ταυτίζονται:

$$ {}^{tt} f \circ \iota_\mathcal{E} = \iota_\mathcal{F} \circ f \tag{$\dagger$}$$

Δηλαδή για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$, ισχύει: ${}^{tt} f(\iota_\mathcal{E}(\vec{x})) = \iota_\mathcal{F}(f(\vec{x}))$.

Απόδειξη: Έστω $\xi, \zeta \in \mathcal{F}^\star$ δύο γραμμικές μορφές υπεράνω του $\mathcal{F}$ και έστω $\kappa, \lambda \in \mathbb{K}$. Τότε από την Πρόταση 5.5.5 έχουμε: ${}^t f(\kappa\xi + \lambda\zeta) = (\kappa\xi + \lambda\zeta) \circ f = (\kappa\xi) \circ f + (\lambda\zeta) \circ f = \kappa(\xi \circ f) + \lambda(\zeta \circ f) = \kappa {}^t f(\xi) + \lambda {}^t f(\zeta)$. Επομένως η ${}^t f$ είναι γραμμική. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$· τότε, εξ' ορισμού, για κάθε γραμμική μορφή $\xi \in \mathcal{F}^{\star\star}$ επί του $\mathcal{F}^\star$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} {}^{tt} f[\iota_\mathcal{E}(\vec{x})](\xi) = [\iota_\mathcal{E}(\vec{x}) \circ {}^t f](\xi) = \iota_\mathcal{E}(\vec{x})({}^t f(\xi)) = \iota_\mathcal{E}(\xi \circ f) = (\xi \circ f)(\vec{x}) \\ = \xi(f(\vec{x})) = \iota_\mathcal{F}(f(\vec{x}))(\xi) \end{aligned}$$

Επομένως ${}^{tt} f[\iota_\mathcal{E}(\vec{x})] = \iota_\mathcal{F}(f(\vec{x}))$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, και άρα ${}^{tt} f \circ \iota_\mathcal{E} = \iota_\mathcal{F} \circ f$. □

Σχόλιο 6.1.3 *Η σχέση ($\dagger$) στο Θεώρημα 6.1.10 μπορεί να κατανοηθεί περισσότερο παραστατικά με το παρακάτω διάγραμμα γραμμικών απεικονίσεων:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "\iota_\mathcal{E}"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{E}^{\star\star} \arrow[d, "{}^{tt} f"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "\iota_\mathcal{F}"] & \mathcal{F}^{\star\star} \end{tikzcd} \tag{$\dagger\dagger$}$$

Τότε η σχέση ($\dagger$) είναι ισοδύναμη με την αντιμεταθετικότητα του διαγράμματος ($\dagger\dagger$). Δηλαδή οι δύο δυνατοί τρόποι να πάμε μέσω γραμμικών απεικονίσεων από τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}^{\star\star}$ συμπίπτουν.

Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση και έστω ${}^t f : \mathcal{F}^\star \to \mathcal{E}^\star$ η δυϊκή της. Η επόμενη πρόταση μας δίνει έναν τρόπο υπολογισμού του πυρήνα της γραμμικής απεικόνισης ${}^t f$.

Λήμμα 6.1.11 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση και έστω ${}^t f : \mathcal{F}^\star \to \mathcal{E}^\star$ η δυϊκή της. Τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση:*

$$\mathrm{Ker}({}^t f) = \mathrm{Im}(f)^\circ \subseteq \mathcal{F}^\star$$

Απόδειξη: Έστω $\xi \in \operatorname{Ker}({}^t f)$, δηλαδή $\xi : \mathcal{F}^\star \to \mathbb{K}$ είναι μια γραμμική μορφή επί του $\mathcal{F}$ έτσι ώστε ${}^t f(\xi) = \xi \circ f = 0$. Τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ θα έχουμε $(\xi \circ f)(\vec{x}) = \xi(f(\vec{x})) = 0$, και αυτό σημαίνει ότι η γραμμική μορφή ξ μηδενίζει κάθε διάνυσμα το οποίο ανήκει στην εικόνα της f. Επομένως $\xi \in \operatorname{Im}(f)^\circ$, και άρα $\operatorname{Ker}({}^t f) \subseteq \operatorname{Im}(f)^\circ$. Αντίστροφα αν $\xi \in \operatorname{Im}(f)^\circ$, τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$, θα έχουμε $\xi(f(\vec{x})) = 0$ ή ισοδύναμα $(\xi \circ f)(\vec{x}) = 0$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε όμως $\xi \circ f = 0$ ή ισοδύναμα ${}^t f(\xi) = 0$, δηλαδή $\xi \in \operatorname{Ker}({}^t f)$ και άρα $\operatorname{Ker}({}^t f) \supseteq \operatorname{Im}(f)^\circ$. Συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{Ker}({}^t f) = \operatorname{Im}(f)^\circ$. □

Είμαστε τώρα σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα το οποίο θα το χρησιμοποιήσουμε στην θεωρία πινάκων.

Θεώρημα 6.1.12 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$, και έστω ${}^t f : \mathcal{F}^\star \to \mathcal{E}^\star$ η δυϊκή απεικόνιση της f. Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} < \infty$, τότε:*

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}({}^t f)$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων για την γραμμική απεικόνιση ${}^t f : \mathcal{F}^\star \to \mathcal{E}^\star$:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}^\star = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}({}^t f) + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}({}^t f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}({}^t f) + \mathbf{r}({}^t f)$$

Από το Λήμμα 6.1.11 έχουμε $\operatorname{Ker}({}^t f) = \operatorname{Im}(f)^\circ$ και άρα $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}({}^t f) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f)^\circ$. Επομένως, επειδή από το Πόρισμα 6.1.3 έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}^\star$, από την παραπάνω εξίσωση έπεται ότι:

$$\mathbf{r}({}^t f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}^\star - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}({}^t f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f)^\circ$$

Τέλος από την Πρόταση 6.1.7 έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f) + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f)^\circ$, και άρα:

$$\mathbf{r}({}^t f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} - (\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f)) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f)) = \mathbf{r}(f)$$

□

6.2 Χώροι Πηλίκα

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε μια σημαντική κατασκευή στην θεωρία διανυσματικών χώρων: την κατασκευή του διανυσματικού χώρου πηλίκο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ ως προς έναν υπόχωρο του $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$. Ένα από ερωτήματα τα οποία απετέλεσαν κίνητρο για μελέτη της κατασκευής του χώρου πηλίκο ήταν και το εξής:

«Δοθέντος διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$ και ενός υπόχωρου $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$, υπάρχει διανυσματικός χώρος $\mathcal{F}$ και γραμμική απεικόνιση $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ έτσι ώστε $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathcal{V}$;»

Θα δούμε ότι η απάντηση είναι καταφατική και επιπλέον ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{F}$ και η γραμμική απεικόνιση είναι μοναδικές.

Από τώρα και στο εξής σταθεροποιούμε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{E}$ υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και έναν υπόχωρο $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$.

Ορισμός 6.2.1 *Ένα* **σύμπλοκο** *του υπόχωρου $\mathcal{V}$ επί του χώρου $\mathcal{E}$ είναι ένα σύνολο της μορφής:*

$$\vec{x} + \mathcal{V} := \{\vec{x} + \vec{v} \mid \vec{v} \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{E}$$

όπου $\vec{x} \in \mathcal{E}$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathcal{E}$.

Παρατήρηση 6.2.2 *Ένα σύμπλοκο της μορφής $\vec{x} + \mathcal{V}$, όπου $\vec{x} \in \mathcal{E}$, συνήθως δεν είναι υπόχωρος. Αυτό το οποίο ισχύει είναι ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το σύμπλοκο $\vec{x} + \mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.*
2. *$\vec{x} \in \mathcal{V}$ (και τότε $\vec{x} + \mathcal{V} = \mathcal{V}$).*

Πράγματικα: αν το σύμπλοκο $\vec{x} + \mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, τότε $\vec{0} \in \vec{x} + \mathcal{V}$ και άρα υπάρχει $\vec{y} \in \mathcal{V}$ έτσι ώστε: $\vec{0} = \vec{x} + \vec{y}$. Τότε όμως, επειδή ο $\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος, θα έχουμε: $\vec{x} = -\vec{y} \in \mathcal{V}$. Αντίστροφα αν $\vec{x} \in \mathcal{V}$, τότε προφανώς $\vec{x} + \mathcal{V} = \mathcal{V}$ και άρα το σύμπλοκο $\vec{x} + \mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$.

Το παρακάτω λήμματα περιγράφουν κάποιες βασικές ιδιότητες των συμπλόκων.

Λήμμα 6.2.3 *Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *$\vec{x} + \mathcal{V} = \vec{y} + \mathcal{V}$.*
2. *$\vec{x} \in \vec{y} + \mathcal{V}$.*
3. *$\vec{x} - \vec{y} \in \mathcal{V}$.*

Απόδειξη: 1. $\Rightarrow$ 2. Θα έχουμε: $\vec{x} = \vec{x} + \vec{0} \in \vec{x} + \mathcal{V} = \vec{y} + \mathcal{V}$.

2. $\Rightarrow$ 3. Θα έχουμε: $\vec{x} \in \vec{y} + \mathcal{V} \;\Rightarrow\; \exists \vec{w} \in \mathcal{V} : \vec{x} = \vec{y} + \vec{w}$. Επομένως $\vec{x} - \vec{y} = \vec{w} \in \mathcal{V}$.

3. $\Rightarrow$ 1. Θα έχουμε: $\vec{x} - \vec{y} \in \mathcal{V} \;\Rightarrow\; \exists \vec{w} \in \mathcal{V}$: $\vec{x} - \vec{y} = \vec{w} \in \mathcal{V}$, και άρα $\vec{x} = \vec{y} + \vec{w}$. Τότε όμως: $\vec{x} + \mathcal{V} = \vec{y} + \vec{w} + \mathcal{V}$ και άρα $\vec{x} + \mathcal{V} = \vec{y} + \mathcal{V}$, διότι σύμφωνα με την παραπανω Παρατήρηση 6.2.2, θα έχουμε $\vec{w} + \mathcal{W} = \mathcal{W}$ διότι $\vec{w} \in \mathcal{V}$. □

Λήμμα 6.2.4 *Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}$. Τότε τα σύμπλοκα $\vec{x} + \mathcal{V}$ και $\vec{y} + \mathcal{V}$ είτε θα ταυτίζονται ή θα είναι ξένα. Δηλαδή:*

είτε: $\vec{x} + \mathcal{V} = \vec{y} + \mathcal{V}$.

ή: $(\vec{x} + \mathcal{V}) \cap (\vec{y} + \mathcal{V}) = \emptyset$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $(\vec{x} + \mathcal{V}) \cap (\vec{y} + \mathcal{V}) \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει $\vec{z} \in (\vec{x} + \mathcal{V}) \cap (\vec{y} + \mathcal{V})$ και επομένως από το παραπάνω Λήμμα 6.2.3 θα έχουμε:

1. $\vec{z} \in \vec{x} + \mathcal{V} \;\Rightarrow\; \vec{z} + \mathcal{V} = \vec{x} + \mathcal{V}$.

2. $\vec{z} \in \vec{y} + \mathcal{V} \;\Rightarrow\; \vec{z} + \mathcal{V} = \vec{y} + \mathcal{V}$.

Άρα $\vec{x} + \mathcal{V} = \vec{y} + \mathcal{V}$. □

Συμβολισμός 6.2.1 *Από τώρα και στο εξής ένα σύμπλοκο της μορφής $\vec{x} + \mathcal{V}$, όπου $\vec{x} \in \mathcal{E}$, θα συμβολίζεται ως εξής:*

$$[\vec{x}] := \vec{x} + \mathcal{V} = \{\vec{x} + \vec{v} \mid \vec{v} \in \mathcal{V}\}$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπανω συμβολισμό και τα Λήμματα 6.2.3 και 6.2.4, θα έχουμε ως άμεση συνέπεια το ακόλουθο

Πόρισμα 6.2.5 *Το σύνολο όλων των συμπλόκων του υπόχωρου $\mathcal{V}$ επί του χώρου $\mathcal{E}$ ορίζει μια* **διαμέριση** *του συνόλου $\mathcal{E}$, δηλαδή ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. $\mathcal{E} = \bigcup_{\vec{x} \in \mathcal{E}} [\vec{x}]$.

2. *Αν $[\vec{x}] \neq [\vec{y}]$, τότε: $[\vec{x}] \cap [\vec{y}] = \emptyset$.*

Ορισμός 6.2.6 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Ο* **χώρος πηλίκο** *$\mathcal{E}/\mathcal{V}$ του χώρου $\mathcal{E}$ ως προς τον υπόχωρο $\mathcal{V}$ ορίζεται να είναι το σύνολο όλων των συμπλόκων του $\mathcal{V}$ επί του $\mathcal{E}$:*

$$\mathcal{E}/\mathcal{V} := \{[\vec{x}] \subseteq \mathcal{E} \mid \vec{x} \in \mathcal{E}\}$$

Βασικός σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι ο χώρος πηλίκο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$, καθώς και να αναλύσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες του. Πρίν περάσουμε όμως σ' αυτήν την ανάλυση θα δούμε μια διαφορετική, αλλά ισοδύναμη, προσέγγιση στον ορισμό του χώρου πηλίκο.

Παρατήρηση 6.2.7 *Διατηρώντας τις παραπάνω υποθέσεις και συμβολισμούς, ορίζουμε στο σύνολο $\mathcal{E}$ μια σχέση $\mathcal{R}_{\mathcal{V}}$ ως εξής:*

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{E}: \; \vec{x} \equiv \vec{y}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}}) \iff \vec{x} - \vec{y} \in \mathcal{V}$$

Ισχυρισμός: *Η σχέση $\mathcal{R}_{\mathcal{V}}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathcal{E}$ και οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\mathcal{R}_{\mathcal{V}}$ συμπίπτουν με τα σύμπλοκα του υπόχωρου $\mathcal{V}$ επί του χώρου $\mathcal{E}$.*

Πραγματικά χρησιμοποιώντας τον ορισμό της σχέσης $\mathcal{R}_{\mathcal{V}}$ και το γεγονός ότι ο $\mathcal{V}$ ειναι υπόχωρος, θα έχουμε:

Ανακλαστική Ιδιότητα: $\vec{x} \equiv \vec{x}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}})$ *διότι* $\vec{x} - \vec{x} = \vec{0} \in \mathcal{V}$.

Συμμετρική Ιδιότητα: *Άν* $\vec{x} \equiv \vec{y}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}})$, *τότε* $\vec{x} - \vec{y} \in \mathcal{V} \Rightarrow \vec{y} - \vec{x} \in \mathcal{V}$ *και άρα* $\vec{y} \equiv \vec{x}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}})$.

Μεταβατική Ιδιότητα: *Άν* $\vec{x} \equiv \vec{y}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}})$ *και* $\vec{y} \equiv \vec{z}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}})$, *τότε* $\vec{x} - \vec{y} \in \mathcal{V}$ *και* $\vec{y} - \vec{z} \in \mathcal{V}$. *Τοτε όμως* $(\vec{x} - \vec{y}) + (\vec{y} - \vec{z}) = \vec{x} - \vec{z} \in \mathcal{V}$ *και επομένως:* $\vec{x} \equiv \vec{z}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}})$.

Ορίζουμε πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού στον χώρο πηλίκο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ ως εξής:

Πρόσθεση: Αν $[\vec{x}], [\vec{y}] \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$, τότε ορίζουμε το άθροισμα $[\vec{x}] + [\vec{y}]$ των $[\vec{x}]$ και $[\vec{y}]$ να είναι το σύμπλοκο:

$$[\vec{x}] + [\vec{y}] := [\vec{x} + \vec{y}]$$

Η παραπάνω πράξη είναι καλά ορισμένη διότι αν επίσης έχουμε $[\vec{x}] = [\vec{x}']$ και $[\vec{y}] = [\vec{y}']$, τότε $\vec{x} + \mathcal{V} = \vec{x}' + \mathcal{V}$ και $\vec{y} + \mathcal{V} = \vec{y}' + \mathcal{V}$. Επομένως $\vec{x} - \vec{x}' \in \mathcal{V}$ και $\vec{y} - \vec{y}' \in \mathcal{V}$ και άρα $(\vec{x} + \vec{y}) - (\vec{x}' + \vec{y}') \in \mathcal{V}$ το οποιο σημαίνει ότι $(\vec{x} + \vec{y}) + \mathcal{V} = (\vec{x}' + \vec{y}') + \mathcal{V}$, δηλαδή $[\vec{x} + \vec{y}] = [\vec{x}' + \vec{y}']$.

Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός: Αν $[\vec{x}] \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$ και $k \in \mathbb{K}$, τότε ορίζουμε τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό $k[\vec{x}]$ του συμπλόκου $[\vec{x}]$ με τον αριθμό k να είναι το σύμπλοκο:

$$k[\vec{x}] := [k\vec{x}]$$

Η παραπάνω πράξη είναι καλά ορισμένη διότι αν επίσης έχουμε $[\vec{x}] = [\vec{x}']$, τότε $\vec{x} + \mathcal{V} = \vec{x}' + \mathcal{V}$ και άρα $\vec{x} - \vec{x}' \in \mathcal{V}$. Επομένως $k(\vec{x} - \vec{x}') \in \mathcal{V} \Rightarrow k\vec{x} - \lambda\vec{x}' \in \mathcal{V}$ το οποίο σημαίνει ότι $(k\vec{x}) + \mathcal{V} = (k\vec{x}') + \mathcal{V}$ δηλαδή: $[k\vec{x}] = [k\vec{x}']$.

Θεώρημα 6.2.8 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Τότε το σύνολο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ των συμπλόκων του $\mathcal{V}$ επί του $\mathcal{E}$, εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι εύκολη και αφήνεται ώς ΑΣΚΗΣΗ στον αναγνώστη. Σημειώνουμε μόνο τα εξής: Το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}}$ του $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ είναι το σύμπλοκο $\mathcal{V}$, δηλαδή: $\vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}} = [\vec{0}] = \vec{0} + \mathcal{V} = \mathcal{V}$. Επίσης αν $[\vec{x}] \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$, τότε το αντίθετο του $[\vec{x}]$ είναι το σύμπλοκο $[-\vec{x}]$. □

Θα δούμε τώρα ότι ο χώρος $\mathcal{E}$ και ο χώρος πηλίκο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ ως προς έναν υπόχωρο $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ συνδέονται μέσω μιας γραμμικής απεικόνισης η οποία έχει σημαντικές ιδιότητες.

Ορίζουμε μια απεικόνιση ως εξής:

$$\pi_{\mathcal{V}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{V}, \ \ \vec{x} \mapsto \pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = [\vec{x}]$$

Ορισμός 6.2.9 *Η απεικόνιση $\pi_{\mathcal{V}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{V}$ καλείται η* **κανονική προβολή** *του χώρου $\mathcal{E}$ στον χώρο πηλίκο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$. Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης γράφουμε απλά π αντί για $\pi_{\mathcal{V}}$.*

Θεώρημα 6.2.10 *1. Η απεικόνιση $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{V}$ είναι ένας επιμορφισμός με πυρήνα τον υπόχωρο $\mathcal{V}$: $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathcal{V}$.*

2. Αν ο χώρος $\mathcal{E}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε και ο χώρος $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ έχει πεπερασμένη διάσταση και επιπλέον:

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}/\mathcal{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}}$$

Απόδειξη: 1. Προφανώς η απεικόνιση π προφανώς είναι καλά ορισμένη. Επίσης από την κατασκευή της η π είναι απεικόνιση επί. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η π είναι γραμμική. Έστω $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathcal{E}$ και $k \in \mathbb{K}$. Τότε απο τον ορισμό της πρόσθεσης θα έχουμε: $\pi(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = [\vec{x}_1 + \vec{x}_2] = [\vec{x}_1] + [\vec{x}_2] = \pi(\vec{x}_1) + \pi(\vec{x}_2)$. Επίσης από τον ορισμό του βαθμωτού πολλαπλασιασμού θα έχουμε: $\pi(k\vec{x}_1) = [k\vec{x}_1] = k[\vec{x}_1] = k\pi(\vec{x}_1)$. Συμπεραίνουμε ότι η π είναι γραμμική και άρα επιμορφισμός διότι είναι επί.

2. Έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και έστω $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Έστω $[\vec{x}] \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$ ένα τυχόν διάνυσμα του $\mathcal{E}/\mathcal{V}$. Επειδή $\vec{x} = k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n$, για κάποια μοναδικά $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{K}$, θα έχουμε: $[\vec{x}] = [k_1\vec{e}_1 + \cdots + k_n\vec{e}_n] = k_1[\vec{e}_1] + \cdots + k_n[\vec{e}_n]$. Συμεραίνουμε ότι το σύνολο $\mathcal{C} = \{[\vec{e}_1], \cdots, [\vec{e}_n]\}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ και άρα από το Πόρισμα 4.3.2 έπεται ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}/\mathcal{V} < \infty$. Επομένως μπορούμε να

εφαρμόσουμε την Θεμελιώδη Εξίσωση Διαστάσεων, βλέπε Θεώρημα 5.4.2, για την γραμμική απεικόνιση $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{V}$:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(\pi) + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(\pi) \tag{1}$$

Επειδή η π είναι επιμορφισμός θα έχουμε $\operatorname{Im}(\pi) = \mathcal{E}/\mathcal{V}$ και άρα: $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(\pi) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}/\mathcal{V}$, δηλαδή

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(\pi) + \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}/\mathcal{V} \tag{2}$$

Μένει να προσδιορίσουμε τον πυρήνα της π. Θα έχουμε

$$\operatorname{Ker}(\pi) = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \pi(\vec{x}) = [\vec{x}] = [\vec{0}] = \mathcal{V}\} = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid \vec{x} \in \mathcal{V}\} = \mathcal{V}$$

Επομένως θα έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(\pi) = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$, και άρα από την σχέση (2) θα έχουμε:

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}/\mathcal{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$$

□

Πόρισμα 6.2.11 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ και έστω $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}$ ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$. Τότε η απεικόνιση συνόλων*

$$\Pi : \big\{\textit{υπόχωροι } \mathcal{W} \textit{ του } \mathcal{E} \textit{ έτσι ώστε } \mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}\big\} \longrightarrow \big\{\textit{υπόχωροι } \mathcal{G} \textit{ του } \mathcal{E}/\mathcal{V}\big\}$$

η οποία ορίζεται ως $\Pi(\mathcal{W}) := \pi(\mathcal{W}) = \mathcal{V}/\mathcal{W}$ είναι 1-1 και επί. Η αντίστροφη της Π είναι η απεικόνιση $\Pi^{-1}(\mathcal{G}) := \pi^{-1}(\mathcal{G})$.

Ιδιαίτερα κάθε υπόχωρος του $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ είναι της μορφής $\mathcal{W}/\mathcal{V}$, όπου $\mathcal{W}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$ με $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι άμεση απόρροια της Πρότασης 5.2.5, διότι η απεικόνιση $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{V}$ είναι επιμορφισμός. □

Άσκηση 6.2.2 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.*

1. *Δείξτε ότι:* $\mathcal{E}/\{\vec{0}\} \cong \mathcal{E}$.
2. *Δείξτε ότι:* $\mathcal{E}/\mathcal{E} \cong \{\vec{0}\}$.

Θα κλείσουμε την παρούσα ενότητα με κάποιες σημαντικές ιδιότητες γραμμικών απεικονίσεων οι οποίες σχετίζονται με την θεωρία των χώρων πηλίκο.

Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση. Τότε όπως έχουμε δει η εικόνα $\operatorname{Im}(f)$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{F}$. Συμβολίζουμε με $\mu : \operatorname{Im}(f) \rightarrowtail \mathcal{F}$ την κανονική έγκλειση συνόλων $\mu(\vec{y}) = \vec{y}$, $\forall \vec{y} \in \operatorname{Im}(f)$ η οποία είναι προφανώς ένας μονομορφισμός. Επιπρόσθετα ορίζεται και η γραμμική απεικόνιση $\varepsilon : \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(f)$, όπου $\varepsilon(\vec{x}) = f(\vec{x})$.[1] Προφανώς η ε είναι ένας επιμορφισμός και η γραμμική απεικόνιση f είναι σύνθεση των ε και μ, δηλαδή το ακόλουθο διάγραμμα γραμμικών απεικονίσεων είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathrm{Im}(f) \arrow[dl, "\mu"] \\ & \mathcal{F} & \end{tikzcd} \qquad f = \mu \circ \varepsilon$$

Η παραπάνω ανάλυση της γραμμικής απεικόνισης f ως σύνθεση ενός μονομορφισμού και ενός επιμορφισμού, καλείται **κανονική ανάλυση** της f.

Από την άλλη πλευρά γνωρίζουμε ότι ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(f)$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, και επομένως ορίζεται ο χώρος πηλίκο $\mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f)$. Θα δούμε τώρα μια σημαντική ιδιότητα του χώρου $\mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f)$.

Πρόταση 6.2.12 *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος περιέχεται στον πυρήνα της f: $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $f^* : \mathcal{E}/\mathcal{V} \to \mathcal{F}$ έτσι ώστε $f = f^* \circ \pi_{\mathcal{V}}$, όπου $\pi_{\mathcal{V}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{V}$ είναι η κανονική προβολή. Με άλλα λόγια το ακόλουθο διάγραμμα γραμμικών απεικονίσεων είναι αντιμεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "\pi_{\mathcal{V}}"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathcal{E}/\mathcal{V} \arrow[dl, "\exists!\, f^*"] \\ & \mathcal{F} & \end{tikzcd} \qquad f = f^* \circ \pi_{\mathcal{V}}$$

Ιδιαίτερα μπορούμε να διαλέξουμε $\mathcal{V} = \mathrm{Ker}(f)$.

Απόδειξη: Ορίζουμε μια απεικόνιση ως εξής:

$$f^* : \mathcal{E}/\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{F}, \; f^*([\vec{x}]) := f(\vec{x})$$

1. Δείχνουμε ότι η f^* είναι καλά ορισμένη. Αν $[\vec{x}_1] = [\vec{x}_2]$, τότε $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \mathcal{V}$. Επειδή $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, έπεται ότι $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ και άρα $f(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{0}$, ή ισοδύναμα $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2)$. Τότε όμως εξ' ορισμού $f^*([\vec{x}_1]) = f^*([\vec{x}_2])$ και άρα η f^* είναι καλά ορισμένη.

2. Δείχνουμε ότι η f^* είναι γραμμική και ικανοποιεί την ζητούμενη σχέση $f = f^* \circ \pi_{\mathcal{V}}$. Έστω $[\vec{x}_1], [\vec{x}_2] \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$ και έστω $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$. Τότε από τον

[1] Οι απεικονίσεις $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ και $\varepsilon : \mathcal{E} \to \mathrm{Im}(f)$ αν και έχουν τον ίδιο τύπο ορισμού, είναι διαφορετικές διότι γενικά $\mathcal{F} \neq \mathrm{Im}(f)$.

ορισμό της f και την γραμμικότητα της f, θα έχουμε: $f^*(k_1[\vec{x}_1] + k_2[\vec{x}_2]) = f^*([k_1\vec{x}_1] + [k_2\vec{x}_2]) = f^*([k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2]) = f([k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2]) = k_1 f(\vec{x}_1) + k_2 f(\vec{x}_{2]}) = k_1 f^*([\vec{x}_1]) + k_2 f^*([\vec{x}_2])$. Συμπεραίνουμε ότι η f^* είναι γραμμική. Επίσης για κάθε $\vec{x} \in \mathcal{E}$ θα έχουμε $(f^* \circ \pi_{\mathcal{V}})(\vec{x}) = f^*(\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x})) = f^*([\vec{x}]) = f(\vec{x})$. Επομένως $f = f^* \circ \pi_{\mathcal{V}}$.

3. Τέλος δείχνουμε ότι η f^* είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση $\mathcal{E}/\mathcal{V} \to \mathcal{F}$ έτσι ώστε $f = f^* \circ \pi_{\mathcal{V}}$. Αν $g : \mathcal{E}/\mathcal{V} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε να ισχύει $f = g \circ \pi_{\mathcal{V}}$, τότε για κάθε διάνυσμα $[\vec{x}] \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$, χρησιμοποιώντας ότι $\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = [\vec{x}]$ θα έχουμε $g([\vec{x}]) = g(\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x})) = (g \circ \pi_{\mathcal{V}})(\vec{x}) = f(\vec{x}) = f^*([\vec{x}])$. Επειδή αυτή η σχέση ισχύει για κάθε $[\vec{x}] \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$, έπεται ότι $g = f^*$ και άρα η f^* είναι μοναδική. $\square$

Άσκηση 6.2.3 *Να εξετασθεί αν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 6.2.12. Δηλαδή αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, $\mathcal{V}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{E}$, και $f^* : \mathcal{E}/\mathcal{V} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση έτσι ώστε $f = f^* \circ \pi_{\mathcal{V}}$, να εξετασθεί αν ισχύει ότι $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.*

Το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα είναι γνωστό ως Πρωτο Θεωρημα Ισομορφισμου για διανυσματικούς χώρους.

Θεώρημα 6.2.13 *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση.*

1. *Η f επάγει έναν ισομορφισμό $f^\dagger$ του χώρου πηλίκο $\mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f)$ με τον υπόχωρο $\mathrm{Im}(f)$ του $\mathcal{F}$:*

$$f^\dagger : \mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}(f), \ [\vec{x}] \mapsto f^\dagger([\vec{x}]) := f(\vec{x})$$

2. *Η γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ γράφεται ως σύνθεση $\mu \circ f^\dagger \circ \pi_{\mathrm{Ker}(f)}$ του επιμορφισμού $\pi_{\mathrm{Ker}(f)} : \mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f)$, του ισομορφισμού $f^\dagger : \mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}(f)$, και του μονομορφισμού $\mu : \mathrm{Im}(f) \rightarrowtail \mathcal{F}$. Δηλαδή $f = \mu \circ f^\dagger \circ \pi_{\mathrm{Ker}(f)}$ είναι η σύνθεση:*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F} \ = \ \mathcal{E} \xrightarrow{\pi_{\mathrm{Ker}(f)}} \mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{f^\dagger} \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{\mu} \mathcal{F}$$

Απόδειξη: 1. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $f^* : \mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f) \to \mathcal{F}$ της Πρότασης 6.2.12, όπου $f^*([\vec{x}]) = f(\vec{x})$, και έστω

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f) \arrow[rr, "f^\dagger"] \arrow[dr, "f^*"'] & & \mathrm{Im}(f) \arrow[dl, "\mu"] \\
& \mathcal{F} &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad f^* = \mu \circ f^\dagger$$

η κανονική ανάλυση της f^*. Θα δείξουμε ότι η $f^\dagger$ είναι ισομορφισμός. Εκ' κατασκευής η $f^\dagger$, δίνεται από τον τύπο $f^\dagger([\vec{x}]) = f(\vec{x})$, είναι επιμορφισμός και ισχύει $f^* = \mu \circ f^\dagger$, βλέπε την συζήτηση πρίν από την Πρόταση 6.2.12. Επομένως αρκεί να δείξουμε η $f^\dagger$ είναι μονομορφισμός. Έστω $[\vec{x}] \in \mathrm{Ker}(f^\dagger)$. Τότε $f^\dagger([\vec{x}]) = 0$ και επομένως $f(\vec{x}) = \vec{0}$, δηλαδή $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι $[\vec{x}] = [\mathrm{Ker}(f)] = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f)}$, δηλαδή το διάνυσμα $[\vec{x}]$ είναι το μηδενικό διάνυσμα του χώρου $\mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f)$. Αντίστροφα αν $[\vec{x}] = [\mathrm{Ker}(f)] = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f)}$, δηλαδή $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$, τότε $f^\dagger([\vec{x}]) = f(\vec{x}) = \vec{0}$. Συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{Ker}(f^\dagger) = \{[\mathrm{Ker}(f)]\} = \{\vec{0}_{\mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f)}\}$ και άρα η $f^\dagger$ είναι μονομορφισμός. Επομένως η $f^\dagger$ είναι ισομορφισμός.

2. Έχουμε ήδη δείξει ότι η απεικόνιση $\mu : \mathrm{Im}(f) \to \mathcal{F}$ είναι μονομορφισμός, η απεικόνιση $f^\dagger : \mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Im}(f)$ είναι ισομορφισμός, και η απεικόνιση $\pi_{\mathrm{Ker}(f)} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f)$ είναι επιμορφισμός. Επιπλέον για κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$, θα έχουμε: $(\mu \circ f^\dagger \circ \pi_{\mathrm{Ker}(f)})(\vec{x}))) = \mu(f^\dagger(\pi_{\mathrm{Ker}(f)}(\vec{x})) = \mu(f^\dagger([\vec{x}]) = \mu(f(\vec{x})) = f(\vec{x})$. Επειδή οι απεικονίσεις f, $\mu \circ f^\dagger \circ \pi_{\mathrm{Ker}(f)} : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ παίρνουν τις ίδιες τιμές, έπεται ότι $f = \mu \circ f^\dagger \circ \pi_{\mathrm{Ker}(f)}$. □

Το ακόλουθο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 6.2.13.

Πόρισμα 6.2.14 *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν η f είναι επιμορφισμός, τότε η f ορίζει έναν ισομορφισμό:*

$$\widetilde{f} : \mathcal{E}/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}, \quad [\vec{x}] \longmapsto \widetilde{f}([\vec{x}]) := f(\vec{x})$$

Πρόταση 6.2.15 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{E}$.*

1. *Η απεικόνιση*

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{V} \times \mathcal{E}/\mathcal{W}, \quad \vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) := \big(\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}), \pi_{\mathcal{W}}(\vec{x})\big)$$

είναι μια γραμμική απεικόνιση με πυρήνα τον υπόχωρο $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$:

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$$

2. *Αν $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{E}$, τότε η απεικόνιση f είναι επιμορφισμός και επάγει έναν ισομορφισμό:*

$$\widetilde{f} : \mathcal{E}/\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}/\mathcal{V} \times \mathcal{E}/\mathcal{W}, \quad \vec{x} \longmapsto f([\vec{x}]) := \big(\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}), \pi_{\mathcal{W}}(\vec{x})\big)$$

3. *Αν $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{E}$, τότε η απεικόνιση f είναι ισομορφισμός:*

$$f : \mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}/\mathcal{V} \times \mathcal{E}/\mathcal{W}, \ \vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) := (\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}), \pi_{\mathcal{W}}(\vec{x}))$$

Απόδειξη: 1. Η απόδειξη ότι η f είναι γραμμική είναι άμεση απόρροια των ορισμών και αφήνεται ως Ασκηση στον αναγνώστη. Δείχνουμε ότι $\mathrm{Ker}(f) = \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Αν $\vec{x} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$, τότε επειδή από το Θεώρημα 6.2.10 έπεται ότι $\mathrm{Ker}(\pi_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V}$ και $\mathrm{Ker}(\pi_{\mathcal{W}}) = \mathcal{W}$, θα έχουμε $\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}}$ και $\pi_{\mathcal{W}}(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{W}}$. Επομένως $f(\vec{x}) = (\vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}}, \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{W}})$ το οποίο, όπως έχουμε δει στο Κεφάλαιο 1, είναι το μηδενικό διάνυσμα του διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}/\mathcal{V} \times \mathcal{E}/\mathcal{W}$. Άρα $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Αντίστροφα αν $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$, τότε $(\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}), \pi_{\mathcal{W}}(\vec{x})) = (\vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}}, \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{W}})$ και άρα: $\pi_{\mathcal{V}}(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}}$ και $\pi_{\mathcal{W}}(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{W}}$. Οι τελευταίες σχέσεις είναι φυσικά ισοδύναμες με τις ακόλουθες σχέσεις $\vec{x} \in \mathcal{V}$ και $\vec{x} \in \mathcal{W}$. Άρα $\vec{x} \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ και επομένως $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Συνοψίζοντας θα έχουμε την ζητούμενη σχέση: $\mathrm{Ker}(f) = \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.

2. Σύμφωνα με το Πόρισμα 6.2.14 αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι επιμορφισμός. Έστω $([\vec{y}], [\vec{z}]) \in \mathcal{E}/\mathcal{V} \times \mathcal{E}/\mathcal{W}$. Τότε $\vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{E}$ και άρα από την υπόθεση $\mathcal{E} = \mathcal{V} + \mathcal{W}$, θα έχουμε: $\vec{y} = \vec{v}_1 + \vec{w}_1$ και $\vec{z} = \vec{v}_2 + \vec{w}_2$, όπου $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathcal{V}$ και $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathcal{W}$. Τότε στον χώρο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ θα έχουμε $[\vec{y}] = [\vec{v}_1 + \vec{w}_1] = [\vec{v}_1] + [\vec{w}_1] = [\vec{w}_1]$ διότι $[\vec{v}_1] = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}}$ καθώς $\vec{v}_1 \in \mathcal{V}$. Παρόμοια στον χώρο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ θα έχουμε $[\vec{z}] = [\vec{v}_2 + \vec{w}_2] = [\vec{v}_2] + [\vec{w}_2] = [\vec{v}_2]$ διότι $[\vec{w}_2] = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{W}}$ καθώς $\vec{w}_2 \in \mathcal{W}$. Επομένως $([\vec{y}], [\vec{z}]) = ([\vec{w}_1], [\vec{v}_2])$. Θέτοντας $\vec{x} = \vec{w}_1 + \vec{v}_2$, θα έχουμε εκ' κατασκευής $f(\vec{x}) = ([\vec{x}], [\vec{x}]) = ([\vec{w}_1 + \vec{v}_2], [\vec{w}_1 + \vec{v}_2]) = ([\vec{w}_1] + [\vec{v}_2], [\vec{w}_1] + [\vec{v}_2])$. Όμως $[\vec{w}_1 + \vec{v}_2] = [\vec{w}_1] + [\vec{v}_2] = [\vec{w}_1]$ στον χώρο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ διότι $[\vec{v}_2] = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{V}}$ καθώς $\vec{v}_2 \in \mathcal{V}$. Παρόμοια $[\vec{w}_1] + [\vec{v}_2] = [\vec{w}_1] + [\vec{v}_2] = [\vec{v}_2]$ στον χώρο $\mathcal{E}/\mathcal{W}$ διότι $[\vec{w}_1] = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{W}}$ καθώς $\vec{w}_1 \in \mathcal{W}$. Επομένως $f(\vec{x}) = ([\vec{x}], [\vec{x}]) = ([\vec{w}_1], [\vec{v}_2]) = ([\vec{y}], [\vec{z}])$ και άρα η f είναι επιμορφισμός.

3. Αν $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, τότε $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\}$ και $\mathcal{E} = \mathcal{V} + \mathcal{W}$. Επομένως σύμφωνα με το 2. και το γεγονός ότι $\mathcal{E}/\{\vec{0}\} \cong \mathcal{E}$, θα έχουμε ότι η f είναι ισομορφισμός.
□

Άσκηση 6.2.4 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{E}$. Να δείξετε ότι αν $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{E}$, τότε:*

$$\mathcal{E}/\mathcal{V} \ \cong \ \mathcal{W} \quad \text{και} \quad \mathcal{E}/\mathcal{W} \ \cong \ \mathcal{V}$$

Υπόδειξη: *Δείξτε ότι οι απεικόνισεις*

$$f : \mathcal{E}/\mathcal{V} \to \mathcal{W}, \ [\vec{x}] \ \mapsto \ f([\vec{x}]) = \vec{x} \quad \text{και} \quad g : \mathcal{E}/\mathcal{W} \to \mathcal{V}, \ [\vec{x}] \ \mapsto \ g([\vec{x}]) = \vec{x}$$

είναι καλά ορισμένες και επιπλέον είναι ισομορφισμοί.

Κλείνουμε το παρόν Κεφάλαιο με το ακόλουθο αποτέλεσμα, γνωστό ως Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμού για διανυσματικούς χώρους.

Θεώρημα 6.2.16 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{E}$, έτσι ώστε: $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$. Τότε ο χώρος πηλίκο $\mathcal{W}/\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του χώρου πηλίκο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$ και υπάρχει ένας ισομορφισμός:*

$$\mathcal{E}/\mathcal{V}/\mathcal{W}/\mathcal{V} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}/\mathcal{W}$$

Απόδειξη: Είναι εύκολο να δειχθεί (δείξτε το σαν Ασκηση) ότι ο χώρος πηλίκο $\mathcal{W}/\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}/\mathcal{V}$ είναι υπόχωρος του χώρου πηλίκο $\mathcal{E}/\mathcal{V}$. Θεωρούμε την κανονική προβολή

$$\pi_{\mathcal{W}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}/\mathcal{W}, \ \vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = [\vec{x}]$$

η οποία γνωρίζουμε ότι είναι επιμορφισμός με πυρήνα $\mathrm{Ker}(\pi_{\mathcal{W}}) = \mathcal{W}$. Επειδή $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, από την Πρόταση 6.2.12, έπεται ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\pi^*_{\mathcal{V}} : \mathcal{E}/\mathcal{V} \to \mathcal{E}/\mathcal{W}$ έτσι ώστε: $\pi^*_{\mathcal{V}} \circ \pi_{\mathcal{V}} = \pi_{\mathcal{W}}$. Επειδή η $\pi_{\mathcal{W}}$ είναι επιμορφισμός, έπεται άμεσα ότι και η $\pi^*_{\mathcal{V}}$ είναι επιμορφισμός. Από την Πρόταση 6.2.12 η απεικόνιση $\pi^*_{\mathcal{V}}$ ορίζεται ως εξής: $\pi^*_{\mathcal{V}}([\vec{x}]) = \pi_{\mathcal{W}}(\vec{x}) = [\vec{x}]$, δηλαδή η $\pi^*_{\mathcal{V}}$ στέλνει σύμπλοκα του $\mathcal{E}$ ως προς τον υπόχωρο $\mathcal{V}$ σε σύμπλοκα του $\mathcal{E}$ ως προς τον υπόχωρο $\mathcal{W}$. Σύμφωνα με το Πόρισμα 6.2.14 αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{Ker}(\pi^*_{\mathcal{V}}) = \mathcal{W}/\mathcal{V}$. Έστω $[\vec{x}] \in \mathcal{W}/\mathcal{V}$, δηλαδή $[\vec{x}] \in \mathcal{E}/\mathcal{V}$ με $\vec{x} \in \mathcal{W}$. Τότε $\pi^*_{\mathcal{V}}([\vec{x}]) = [\vec{x}] = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{W}}$ διότι $\vec{x} \in \mathcal{W}$. Άρα $\mathcal{W}/\mathcal{V} \subseteq \mathrm{Ker}(\pi^*_{\mathcal{V}})$. Αντίστροφα αν $[\vec{x}] \in \mathrm{Ker}(\pi^*_{\mathcal{V}})$, τότε $\pi^*_{\mathcal{V}}([\vec{x}]) = [\vec{x}] = \vec{0}_{\mathcal{E}/\mathcal{W}}$ και αυτό συμβαίνει αν και μόνον αν $\vec{x} \in \mathcal{W}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $[\vec{x}] \in \mathcal{W}/\mathcal{V}$ και επομένως $\mathrm{Ker}(\pi^*_{\mathcal{V}}) \subseteq \mathcal{W}/\mathcal{V}$. Έτσι τελικά θα έχουμε $\mathrm{Ker}(\pi^*_{\mathcal{V}}) = \mathcal{W}/\mathcal{V}$ και το Πόρισμα 6.2.14 ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Η ακόλουθη Άσκηση περιγράφει ένα αποτέλεσμα το οποίο είναι γνωστό ως Δεύτερο Θεώρημα Ισομορφισμού για διανυσματικούς χώρους.

Άσκηση 6.2.5 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ δύο υπόχωροι του $\mathcal{E}$. Τότε ο $\mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V} + \mathcal{W}$, ο $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{V}$ και υπάρχει ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων:*

$$\mathcal{V} + \mathcal{W}/\mathcal{W} \xrightarrow{\cong} \mathcal{V}/\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$$

6.3 Ασκήσεις

Άσκηση 6.3.1 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$.*

1.

2.

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης