ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ανοικτά μαθήματα
opencourses

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Πινάκες και Γραμμικές Απεικονίσεις

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 7

Πινακες και Γραμμικες Απεικονισεις

Στα προηγούμενα Κεφάλαια έχουμε ορίσει την έννοια του πίνακα, η οποία οργανώνει με εποπτικό τρόπο αρκετές πληροφορίες, και έχουμε αναπτύξει την θεωρία των γραμμικών απεικονίσεων. Στο παρόν Κεφάλαιο θα μελετήσουμε την σχέση μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{K}$. Θα δούμε ιδιαίτερα ότι σ' αυτό το πλαίσιο η θεωρία πινάκων και γραμμικών απεικονίσεων είναι ουσιαστικά ισοδύναμη. Η χρήση των γραμμικών απεικονίσεων είναι περισσότερο κατάλληλη για εξαγωγή θεωρητικών αποτελεσμάτων, και η χρήση πινάκων είναι περισσότερο κατάλληλη για υπολογισμούς και προσφέρει ικανοποιητικότερη εποπτεία.

7.1 Βασικές Ιδιότητες Πινάκων

Στην παρούσα ενότητα, αφού υπενθυμίσουμε την έννοια ενός πίνακα, θα μελετήσουμε βασικές ιδιότητες πινάκων.

Από τώρα και στο εξής σταθεροποιούμε ένα σώμα $\mathbb{K}$.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $m, n \in \mathbb{N}$ είναι δύο φυσικοί αριθμοί, τότε ένας $m \times n$ πίνακας A με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$, είναι μια διάταξη $m \cdot n$ αριθμών από το σώμα $\mathbb{K}$ της μορφής:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Στήλες Για κάθε $j = 1, 2, \cdots, n$, η j-**στήλη** του πίνακα A είναι η ακόλουθη διάταξη m αριθμών:

$$A^j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Έτσι ο $m \times n$ πίνακας A αποτελείται από n στήλες $A^1, A^2, \cdots, A^n$ κάθε μία από τις οποίες αποτελείται απο m αριθμούς.

Γραμμές Για κάθε $i = 1, 2, \cdots, m$, η j-**γραμμή** του πίνακα A είναι η ακόλουθη διάταξη m αριθμών:

$$A_i := \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

Έτσι ο $m \times n$ πίνακας A αποτελείται από m γραμμες $A_1, A_2, \cdots, A_m$ κάθε μία από τις οποίες αποτελείται απο n αριθμούς.

Παρατηρούμε ότι το στοιχείο a_{ij} του πίνακα A βρίσκεται στην "τομή" της i-γραμμής με την j-στήλη. Έτσι ορίζουμε το στοιχείο a_{ij} να είναι το στοιχείο του πίνακα στην ij-**θέση**.

Συμβολισμός 7.1.1 *Χάριν συντομίας ένας $m \times n$ πίνακας A όπως παραπάνω θα συμβολίζεται ως εξής: $A = (a_{ij})$.*

Συμβολίζουμε με $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ το σύνολο των $m \times n$-πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = \big\{ A = (a_{ij}) \ \mid \ a_{ij} \in \mathbb{K}, \ \forall i = 1, 2, \cdots m, \ \forall j = 1, 2, \cdots, n \big\}$$

Υπενθυμίζουμε ότι στο σύνολο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ έχουμε ορίσει τις ακόλουθες πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού:

1. Πρόσθεση: Αν $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, τότε $A + B$ είναι ο $m \times n$-πίνακας $(a_{ij} + b_{ij})$. Σχηματικά:

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{ij} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mj}+b_{mj} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός: Αν $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, και $k \in \mathbb{K}$, τότε $k \cdot A$ είναι ο $m \times n$-πίνακας (ka_{ij}). Σχηματικά:

$$k\cdot A = k\cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{ij} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mj} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Πρόταση 7.1.1 *Το σύνολο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$-πινάκων με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$ εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$. Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ είναι ο $m \times n$-πίνακας $\mathbf{0}$ όλα τα στοιχεία του οποίου είναι ίσα με 0:*

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Το αντίθετο διάνυσμα του $m \times n$-πίνακα $A = (a_{ij})$ είναι ο $m \times n$-πίνακας $-A = (-a_{ij})$:

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1j} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2j} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{ij} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mj} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Απόδειξη: Βλέπε το Πόρισμα **;;**. □

Θεωρούμε τους $m \cdot n$ το πλήθος πίνακες E_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, όπου ο πίνακας E_{ij} έχει στην (i, j)-θέση 1 και παντού αλλού 0. Δηλαδή:

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

όπου το 1 εμφανίζεται στην τομή της j-στήλης με την i-γραμμή.

Πρόταση 7.1.2 *Το σύνολο των $m \times n$ πινάκων*

$$\mathcal{B} := \{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, \ \ 1 \leq j \leq n\}$$

είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Επομένως

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$$

Απόδειξη:

□

Οι ακόλουθες ειδικές περιπτώσεις πινάκων θα είναι πολύ σημαντικές για τα επόμενα:

Ορισμός 7.1.3 *Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα και έστω $n, m \geq 1$.*

1. Ο **χώρος στηλών** *με m στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ ορίζεται να είναι το σύνολο $\mathbb{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$ και συμβολίζεται με $\Sigma_m(\mathbb{K})$:*

$$\Sigma_m(\mathbb{K}) := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{K},\ 1 \le i \le m\}$$

2. Ο **χώρος γραμμών** *με n στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$ ορίζεται να είναι το σύνολο $\mathbb{M}_{1\times n}(\mathbb{K})$ και συμβολίζεται με $\Gamma_n(\mathbb{K})$:*

$$\Gamma_n(\mathbb{K}) := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \end{pmatrix} \mid x_j \in \mathbb{K},\ 1 \le j \le n\}$$

Η επόμενη παρατήρηση προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς:

Παρατήρηση 7.1.4 *1. Ο χώρος στηλών $\Sigma_m(\mathbb{K})$είναι ισόμορφος με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^m$ μέσω του ισομορφισμού*

$$f : \mathbb{K}^m \to \Sigma_m(\mathbb{K}),\ \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

2. Ο χώρος γραμμών $\Gamma_n(\mathbb{K})$ είναι ισόμορφος με τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^n$ μέσω του ισομορφισμού

$$g : \mathbb{K}^n \to \Gamma_n(\mathbb{K}),\ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \end{pmatrix} \overset{g}{\mapsto} (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Διαμέσου των ισομορφισμών f και g συνήθως ταυτίζουμε τους διανυσματικούς χώρους $\Sigma_m(\mathbb{K})$ και $\Gamma_n(\mathbb{K})$ με τους διανυσματικούς χώρους $\mathbb{K}^m$ και $\mathbb{K}^n$ αντίστοιχα.

Θα δούμε τώρα ότι σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε να ορίσουμε μια άλλη σημαντική πράξη μεταξύ πινάκων η οποία καλείται πολλαπλασιασμός ή γινόμενο πινάκων.

Πολλαπλασιασμός Πινάκων: Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και $B \in \mathbb{M}_{n\times r}(\mathbb{K})$. Τότε ορίζουμε το **γινόμενο** του $m \times n$ πίνακα A με τον $n \times r$ πίνακα B να είναι ο $m \times r$ πίνακας $A \cdot B$ του οποίοι το στοιχείο στην (i, j)-θέση είναι:

$$c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Ένας εύκολος τρόπος απομνημόνευσης του γινομένου πινάκων είναι ο εξής. Το στοιχείο c_{ij} στην (i,j)-θέση, όπου $1 \leq i \leq m$ και $1 \leq j \leq r$, του πίνακα $A \cdot B$ προκύπτει από τον ακόλουθο «πολλαπλασιασμό» της i-γραμμής A_i του πίνακα A με την j-στήλη B^j του πίνακα B:

$$c_{ij} := A_i \cdot B^j = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{ij} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Παρατήρηση 7.1.5 *Το γινόμενο $A \cdot B$ δύο πινάκων ορίζεται αν-ν ο αριθμός των στηλών του A είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του B. Έτσι αν $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και $B \in \mathbb{M}_{k\times r}(\mathbb{K})$, τότε το γινόμενο $A \cdot B$ ορίζεται αν-ν $n = k$. Παρόμοια το γινόμενο $B \cdot A$ ορίζεται αν-ν $r = m$. Επομένως τα γινόμενα πινάκων $A \cdot B$ και $B \cdot A$ ορίζονται αν-ν $m = n = r = k$, δηλαδη αν-ν οι πίνακες A και B είναι τετραγωνικοί ίδιας τάξης.*

Υπενθυμίζουμε ότι το σύμβολο του Kronecker δ_{ij} ορίζεται ως εξής:

$$\delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 1: & \text{αν } i = j \\ 0: & \text{αν } i \neq j \end{Bmatrix}$$

Παράδειγμα 7.1.2 *Για κάθε $i, j = 1, 2, \cdots, n$, θεωρούμε τους τετραγωνικούς πίνακες $E_{ij} = (\delta_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Τότε:*

$$\boxed{E_{ij} \cdot E_{kr} = \delta_{jk}E_{ir}}$$

Πρόχειρη Δοκιμασία

Παράδειγμα 7.1.3

Παρατήρηση 7.1.6 *Αν A και B είναι δύο πίνακες έτσι ώστε τα γινόμενα $A \cdot B$ και $B \cdot A$ ορίζονται, τότε* **δεν** *είναι απαραίτητο να ισχύει ότι: $A \cdot B = B \cdot A$. Για παράδειγμα έστω οι 2×2 πίνακες πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot A$$

Η ακόλουθη πρόταση περιγράφει τις· βασικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων και πως αυτή συμπεριφέρεται ως προς την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό πινάκων.

Πρόταση 7.1.7 *Έστω A, B και C τρείς πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$, και $k \in \mathbb{K}$.*

1. Αν τα γινόμενα πινάκων $A \cdot B$ και $B \cdot C$ ορίζονται, τότε ορίζονται και τα γινόμενα πινάκων $A \cdot (B \cdot C)$ και $(A \cdot B) \cdot C$ και μάλιστα:

$$\boxed{A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C}$$

2. Αν τα γινόμενα πινάκων $A \cdot B$ και $A \cdot C$ ορίζονται, τότε ορίζεται και το γινόμενο πινάκων $A \cdot (B + C)$ και μάλιστα:

$$\boxed{A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C}$$

3. Αν τα γινόμενα πινάκων $A \cdot C$ και $B \cdot C$ ορίζονται, τότε ορίζεται και το γινόμενο πινάκων $(A + B) \cdot C$ και μάλιστα:

$$\boxed{(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C}$$

4. Αν το γινόμενο πινάκων $A \cdot B$ ορίζεται, τότε ορίζονται και τα γινόμενα πινάκων $(kA) \cdot B$, και $A \cdot (kB)$ και μάλιστα:

$$\boxed{k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)}$$

Απόδειξη: □

Υπενθυμίζουμε ότι, $\forall n \geq 1$, ο **μοναδιαίος** $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από το $\mathbb{K}$ είναι ο πίνακας:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Η επόμενη πρόταση περιγράφει σημαντικές ιδιότητες του μοναδιαίου πίνακα.

Πρόταση 7.1.8 *Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ και και $B \in \mathbb{M}_{n\times k}(\mathbb{K})$, δύο πίνακες Τότε:*

$$\boxed{A \cdot I_n = A \quad \text{και} \quad I_n \cdot B = B}$$

Ιδιαίτερα $C \cdot I_n = C = I_n \cdot C$, για κάθε τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα $C \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Απόδειξη: □

Ορισμός 7.1.9 *Ένας πίνακας $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ καλείται* **αντιστρέψιμος** *αν υπάρχει πίνακας $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, έτσι ώστε να ισχύει:*

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A$$

Τότε ο πίνακας B καλείται **αντίστροφος** *του A και συμβολίζεται με A^{-1}.*

Πρόταση 7.1.10 *1. Έστω $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε ο αντίστροφος του είναι μοναδικός και είναι επίσης αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον πίνακα A:*

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2. Έστω $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ δύο αντιστρέψιμοι πίνακες. Τότε ο πίνακας $A \cdot B$ είναι αντιστρέψιμος και ισχυει:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Απόδειξη: □

Πρόχειρη Δοκιμασία

Έστω $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος αν-ν $ad - bc \neq 0$. Αν αυτό ισχύει να δείξετε ότι:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Συμβολισμός 7.1.4 *Έστω $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Τότε ορίζεται το γινόμενο $A \cdot A$, και επομένως, σύφωνα με την Πρόταση 7.1.7, ορίζονται και το γινόμενο $A \cdot A \cdot A \cdot \cdots \cdot A$ (k φορές, $\forall k \geq 1$), ο οποίος συμβολίζεται με A^k. Προφανώς θα έχουμε $A^k \cdot A^r = A^{k+r}$.*

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να δείξετε ότι αν $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, τότε:

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να δείξετε ότι αν A είναι ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας, τότε για κάθε $k \geq 1$ ο πίνακας A^k είναι αντιστρέψιμος. Ποιός είναι ο αντίστροφος του A^k;

Θα δούμε τώρα μια κατασκευή η οποία, δοθέντος ενός $m \times n$ πίνακα, μας ορίζει έναν $n \times m$ πίνακα.

Ορισμός 7.1.11 *Έστω*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Ο **ανάστροφος** *του A ορίζεται να είναι ο $n \times m$ πίνακας ${}^tA$ του οποίου οι γραμμές είναι οι στήλες του πίνακα A και οι στήλες του είναι οι γραμμές του πίνακα A:*

$${}^tA := (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1j} & a_{j2} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{mj} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{n2} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$$

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τις κυριότερες ιδιότητες της μετάβασης από έναν πίνακα στον ανάστροφο του.

Πρόταση 7.1.12 *Έστω $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ δύο $m \times n$ πίνακες και $C = (c_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times r}(\mathbb{K})$ ένας $n \times r$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Τότε για κάθε στοιχείο $k \in mbK$, ισχύουν τα εξής:*

1. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.

2. $^t(kA) = k\ ^tA$.

3. $^t(A \cdot C) = {}^t = {}^tC \cdot {}^tA$.

4. $^t({}^tA) = A$.

5. *Αν* $D = (d_{ij}) \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *είναι ένας αντιστρέψιμος* $n \times n$ *πίνακας, τότε και ο ανάστροφος του* ^tD *είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:*

$$({}^tD)^{-1} = {}^t(D^{-1})$$

Απόδειξη:

□

Η παραπάνω πρόταση έχει την ακόλουθη άμεση συνέπεια:

Πόρισμα 7.1.13 *Η απεικόνιση*

$$\phi : \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{K}),\ A \longmapsto \phi(A) = {}^tA$$

είναι ένας ισομορφισμός με αντίστροφη την απεικόνιση

$$\psi : \mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ A \longmapsto \phi(A) = {}^tA$$

Επιπλέον αν $m = n$ *(οπότε οι εμπλεκόμενοι πίνακες είναι τετραγωνικοί και* $\phi = \psi$*), τότε η απεικόνιση* ϕ *στέλνει αντιστρέψιμους πίνακες σε αντιστρέψιμους πίνακες και ισχύει:* $\phi^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})}$.

7.2 Ο Πίνακας μιας Γραμμικής Απεικόνισης

Στην παρούσα ενότητα θα αντιστοιχίσουμε σε κάθε γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης έναν πίνακα ο οποίος εμπεριέχει όλες τις ιδιότητες της γραμμικής απεικόνισης. Επιπρόσθετα θα δείξουμε ότι αυτή η αντιστοιχία είναι 1-1 και επί.

Από τώρα και στο εξής θεωρούμε δύο διανυσματικούς χώρους $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και μια γραμμική απεικόνιση

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$$

Επιπρόσθετα υποθέτουμε ότι:

1. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και έστω $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$ μια βάση του $\mathcal{E}$.

2. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = m$ και έστω $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$ μια βάση του $\mathcal{F}$.

Θεωρούμε τις εικόνες $f(\vec{e}_i)$, $1 \leq i \leq n$, των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ διαμέσου της απεικόνισης f. Επειδή τα διανύσματα $f(\vec{e}_i)$, $1 \leq i \leq n$ ανήκουν στον διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}$ και το σύνολο $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}$ μια βάση του $\mathcal{F}$, έπεται ότι κάθε ένα από τα $f(\vec{e}_i)$ θα γράφεται μοναδικά ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$. Επομένως θα έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{gathered}
f(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{\epsilon}_1 + a_{21}\vec{\epsilon}_2 + \cdots + a_{i1}\vec{\epsilon}_i + \cdots + a_{m1}\vec{\epsilon}_m \\
f(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{\epsilon}_1 + a_{22}\vec{\epsilon}_2 + \cdots + a_{i2}\vec{\epsilon}_i + \cdots a_{m2}\vec{\epsilon}_m \\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\ \cdots \\
f(\vec{e}_j) = a_{1j}\vec{\epsilon}_1 + a_{2j}\vec{\epsilon}_2 + \cdots + a_{ij}\vec{\epsilon}_i + \cdots + a_{mj}\vec{\epsilon}_m \\
\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\ \cdots \\
f(\vec{e}_n) = a_{1n}\vec{\epsilon}_1 + a_{2n}\vec{\epsilon}_2 + \cdots + a_{in}\vec{\epsilon}_i + \cdots + a_{mn}\vec{\epsilon}_m
\end{gathered}$$

Οι παραπάνω σχέσεις γράφονται συνεπτυγμένα ως εξής:

$$\forall j = 1, 2, \cdots, m: \quad f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{\epsilon}_i \tag{$*$}$$

Ορισμός 7.2.1 *Ο* **πίνακας της** $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ *των* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{F}$ *αντίστοιχα, ορίζεται να είναι ο* $m \times n$ *πίνακας στοιχείων του* $\mathbb{K}$*:*

$$M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{$**$}$$

Αν $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ *και επιλέξουμε* $\mathcal{B} := \mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$*, τότε ο πίνακας της* f *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ *καλείται ο πίνακας της* f *ως προς την βάση* $\mathcal{B}$ *και συμβολίζεται ως* $M_{\mathcal{B}}(f)$.

Παρατήρηση 7.2.2 *1.* $\forall j = 1, 2, \cdots, m$*, η* j*-στήλη του πίνακα* $M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f)$ *αποτελείται από τους συντελεστές του διανύσματος* $f(\vec{e}_j)$ *όταν αυτό εκφρασθεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ *του* $\mathcal{F}$.

2. Η διαδικασία την οποία ακολουθούμε για να σχηματίσουμε τον πίνακα μιας γραμμικής απεικόνισης $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \{\}$ *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ *των* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{F}$ *αντίστοιχα, είναι ο εξής: εφαρμόζουμε την* f *σε κάθε διάνυσμα*

$\vec{e}_j$ της βάσης $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ και ακολούθως εκφράζουμε το διάνυσμα $f(\vec{e}_j)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ του $\mathcal{F}$· τότε οι συνιστώσες του $f(\vec{e}_j)$ αποτελούν την j-στήλη του πίνακα $M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f)$.

3. Ο Πίνακας μιας γραμμικής απεικόνισης $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι τετραγωνικός αν-ν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$.

4. Όπως είναι φανερό από τον ορισμό ο πίνακας της f εξαρτάται από τις βάσεις τις οποίες επιλέγουμε. Για παράδειγμα έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, και έστω $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ δύο βάσεις του $\mathcal{E}$. Τότε μπορούμε να σχηματίσουμε τους πίνακες $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$, $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f)$, $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}(f)$, και $M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}(f)$. Γενικά οι παραπάνω πίνακες είναι διαφορετικοί.

Παράδειγμα 7.2.1 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, και έστω $k \in \mathbb{K}$. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση (ομοθεσία με λόγο k):*

$$f_k : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \ \ \vec{x} \longmapsto f_k(\vec{x}) = k\vec{x}$$

Αν $\mathcal{B}$ είναι μια τυχούσα βάση του $\mathcal{E}$, τότε:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f_k) = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

Θέτοντας $k = 0$, έχουμε ότι $f_0 = 0$ είναι η μηδενική γραμμική απεικόνιση, και άρα ο πίνακας της μηδενικής γραμμικής απεικόνισης $0 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ως προς τυχούσα βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$ είναι ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας.

Επιλέγοντας $k = 1$, έχουμε ότι $f_1 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ είναι η ταυτοτική γραμμική απεικόνιση, και άρα ο πίνακας της ταυτοτικής γραμμικής απεικόνισης $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ως προς τυχούσα βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$ είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I_n.

Παράδειγμα 7.2.2 *Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x, x + y, 0)$. Θεωρούμε τις ακόλουθες βάσεις του $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{B}_1 := \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

$$\mathcal{B}_2 := \{\vec{\varepsilon}_1 = (1, 1, 0), \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1, 1), \vec{\varepsilon}_3 = (1, 1, 1)\}$$

Τότε:

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Πραγματικά:

Παράδειγμα 7.2.3 *Έστω η γραμμική απεικόνιση* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (2x + y, y - z)$. *Θεωρούμε τις ακόλουθες βάσεις των* $\mathbb{R}^3$ *και* $\mathbb{R}^2$*:*

$$\mathcal{B}_1 := \{\vec{e}_1 = (1, 0, 1), \vec{e}_2 = (-1, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 1, 2)\}$$

$$\mathcal{B}_2 := \{\vec{\varepsilon}_1 = (1, 0), \vec{\varepsilon}_2 = (0, 1)\}$$

Τότε:

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Πραγματικά:

Το ακόλουθο βασικό θεώρημα αναλύει την σχέση μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων και είναι θεμελιώδες στην Γραμμική Άλγεβρα.

Θεώρημα 7.2.3 *Έστω* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{F}$ *δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$ *και έστω* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ *μια γραμμική απεικόνιση.*

Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ *και* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = m$, *και σταθεροποιούμε μια βάση* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ *του* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ *μια βάση του* $\mathcal{F}$.

Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ *των γραμμικών απεικονίσεων* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, *και τον διανυσματικό χώρο* $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *των* $m \times n$ *πινάκων με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$.

Τότε η απεικόνιση M *η οποία στέλνει την γραμμική απεικόνιση* f *στον πίνακα της* $M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f)$ *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ *των* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{F}$ *αντίστοιχα, είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων:*

$$\mathsf{M} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \quad f \longmapsto \mathsf{M}(f) := M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f)$$

Απόδειξη: □

Η ακόλουθη πρόταση μας δίνει πως από πίνακες μεταβαίνουμε σε γραμμικές απεικονίσεις, χωρίς να γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι μας έχουν δοθεί κάποιοι συγκεκριμένοι διανυσματικοί χώροι.

Πρόταση 7.2.4 *Έστω* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *ένας* $m \times n$ *πίνακας με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$. *Τότε η απεικόνιση:*

$$f_A : \Sigma_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \Sigma_m(\mathbb{K})$$

η οποία ορίζεται ως εξής $f_A(\vec{X}) := A \cdot \vec{X}$, *δηλαδή:*

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xmapsto{f_A} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

είναι μια γραμμική απεικόνιση και ο πίνακας της ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{B}_{\Sigma_n(\mathbb{K})}$ *και* $\mathcal{B}_{\Sigma_n(\mathbb{K})}$ *των διανυσματικών χώρων* $\Sigma_n(\mathbb{K})$ *και* $\Sigma_m(\mathbb{K})$ *είναι ο* A*:*

$$M_{\mathcal{B}_{\Sigma_n(\mathbb{K})},\mathcal{B}_{\Sigma_n(\mathbb{K})}}(f_A) = A$$

Απόδειξη:

□

Άσκηση 7.2.4 *Να δείξετε ότι η απεικόνιση:*

$$G : \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\Sigma_n(\mathbb{K}), \Sigma_m(\mathbb{K}), \;\; A \longmapsto G(A) := f_A$$

είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Παράδειγμα 7.2.5

Θα δείξουμε τώρα ότι ο ισομορφισμός του Θεωρήματος 7.2.3 στέλνει την σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ διανυσματικών χώρων στο γινόμενο των πινάκων τους ως προς κάποιες επιλεγμένες βάσεις των χώρων.

Θεώρημα 7.2.5 *Έστω* $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ *και* $\mathcal{G}$ *τρεις διανυσματικοί χώροι υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$ *και έστω*

$$\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{G}$$

δύο γραμμικές απεικονίσεις. Υποθέτουμε ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = m$, *και* $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{G} = r$, *και σταθεροποιούμε μια βάση* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ *του* $\mathcal{E}$, *μια βάση* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ *του* $\mathcal{F}$, *και μια βάση* $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ *του* $\mathcal{G}$. *Τότε ο πίνακας της σύνθεσης* $g \circ f : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ *ως προς τις βάσεις* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ *των* $\mathcal{E}$ *και* $\mathcal{G}$ *είναι το γινόμενο των πινάκων των γραμμικών απεικονίσεων* f *και* g *ως προς τι βάσεις* $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$, *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ *και* $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ *αντίστοιχα:*

$$M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{G}}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}_{\mathcal{F}},\mathcal{B}_{\mathcal{G}}}(g) \cdot M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f)$$

Απόδειξη: □

7.3 Αλλαγή Βάσης και Συνιστωσών

Στην παρούσα ενότητα θα δούμε έναν τρόπο ο οποίος μας επιτρέπει να περάσουμε από μια βάση ενός διανυσματικού χώρου σε μια άλλη βάση του ίδιου χώρου. Επίσης θα δούμε πως αλλάζουν οι συνιστώσες ενός διανύσματος όταν αλλάξουμε βάση, και πως αλλάζει ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνισης όταν αλλάξουμε βάσεις στους διανυσματικούς χώρους στους οποίους είναι ορισμένη η γραμμική απεικόνιση.

Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$. Έστω ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και έστω

$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$
$$\mathcal{B}' := \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$$

δύο τυχούσες βάσεις του $\mathcal{E}$.

Τότε κάθε διάνυσμα της βάσης $\mathcal{B}'$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσεις $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\varepsilon}_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n \\
\vec{\varepsilon}_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n \\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\cdots \\
\vec{\varepsilon}_n &= a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n
\end{aligned}$$

ή περισσοτερο αναλυτικά:

$$\forall j = 1, 2, \cdots, n : \quad \vec{\varepsilon}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i$$

Ορισμός 7.3.1 *Ο* **πίνακας μετάβασης από την βάση** $\mathcal{B}$ **στην βάση** $\mathcal{B}'$ *ορίζεται να είναι ο τετραγωνικός* $n \times n$ *πίνακας:*

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Παρόμοια κάθε διάνυσμα της βάσης $\mathcal{B}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσεις $\mathcal{B}'$:

$$\vec{e}_1 = b_{11}\vec{\varepsilon}_1 + b_{21}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + b_{n1}\vec{\varepsilon}_n$$

$$\vec{e}_2 = b_{12}\vec{\varepsilon}_1 + b_{22}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + b_{n2}\vec{\varepsilon}_n$$
$$\cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots\cdots$$
$$\vec{e}_n = b_{1n}\vec{\varepsilon}_1 + b_{2n}\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + b_{nn}\vec{\varepsilon}_n$$

ή περισσοτερο αναλυτικά:

$$\forall i = 1, 2, \cdots, n : \ \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\vec{\varepsilon}_k$$

Ορισμός 7.3.2 *Ο* **πίνακας μετάβασης από την βάση** $\mathcal{B}'$ **στην βάση** $\mathcal{B}$ *ορίζεται να είναι ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας:*

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 7.3.1 *Έστω οι ακόλουθες βάσεις του $\mathbb{R}^3$:*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (2, 0, 0), \vec{e}_2 = (-3, -1, 0), \vec{e}_3 = (0, 2, \frac{1}{2}\}$$

$$\mathcal{B}' = \{\vec{\varepsilon}_1 = (1, -1, 0), \vec{\varepsilon}_2 = (1, 0, 1), \vec{\varepsilon}_3 = (0, 1, -2\}$$

Τότε ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}'$ στην βάση $\mathcal{B}$ είναι ο εξής:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{13}{2} & -\frac{27}{2} \\ 1 & 4 & -9 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Πρόχειρη Δοκιμασία

Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ για τις βάσεις του παραπάνω παραδείγματος.

Παράδειγμα 7.3.2 *Θεωρούμε την κανονική βάση*

$$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1 = (1, 0, \cdots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, \vec{e}_n = (0, 0, \cdots, 1)\}$$

του διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}^n$. Θεωρούμε επίσης μια διαφορετική τυχούσα βάση

$$\mathcal{B}' = \{\vec{\varepsilon}_1 = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}), \vec{\varepsilon}_2 = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}), \cdots, \vec{\varepsilon}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{nn})\}$$

του $\mathbb{K}^n$. Τότε ο πίνακας μετάβασης από την βάση την κανονική βάση $\mathcal{B}$ στην τυχούσα βάση $\mathcal{B}'$ είναι ο $n \times n$ που προκύπτει αν μετατρέψουμε τα διανύσματα $\vec{\varepsilon}_i$ σε στήλες:

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε τι σχέση έχουν οι πίνακες μετάβασης μεταξύ δύο βάσεων ενός διανυσματικού χώρου. Την απάντηση την δίνει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 7.3.3 *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{K}$, και έστω*

$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

$$\mathcal{B}' := \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$$

δύο τυχούσες βάσεις του $\mathcal{E}$. Τότε ο πίνακας μετάβασης $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ από την βάση $\mathcal{B}$ στην βάση $\mathcal{B}'$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του είναι ο πίνακας μετάβασης $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ από την βάση $\mathcal{B}'$ στην βάση $\mathcal{B}$:

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = M^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Απόδειξη: □

Έστω, όπως και πριν, $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και έστω

$$\mathcal{B} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

$$\mathcal{B}' := \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$$

δύο βάσεις του $\mathcal{E}$. Τότε κάθε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων των βάσεων $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i$$

$$\vec{x} = x'_1\vec{\varepsilon}_1 + x'_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + x'_n\vec{\varepsilon}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{\varepsilon}_i$$

Θεωρούμε τα διανύσματα στήλες:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_i \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

τα οποία καλούνται τα **διανύσματα-στήλες των συνιστωσών** του $\vec{x}$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει πως αλλάζουν οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{x}$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$.

Πρόταση 7.3.4 *Ισχύοουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

$$\vec{X}' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot \vec{X} = M^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot \vec{X} \qquad \textit{και} \qquad \vec{X} = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot \vec{X}' = M^{-1}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot \vec{X}'$$

Περισσότερο αναλυτικά:

$$\forall k = 1, 2, \cdots n: \; x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} x'_i \quad x'_k = \sum_{i=1}^{n} b_{ki} x_i$$

όπου: $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (a_{ij})$ *και* $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = (b_{ij})$.

Απόδειξη: □

7.4 Ισοδύναμοι και Όμοιοι Πίνακες

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε πως αλλάζει ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνισης όταν αλλάξουμε βάσεις.

Από τώρα και στο εξής υποθέτουμε ότι μας έχουν δοθεί τα ακόλουθα:

1. $\mathcal{E}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, και έστω $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ και $\mathcal{B}'_{\mathcal{E}}$ δύο βάσεις του:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{E}} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}, \quad \mathcal{B}'_{\mathcal{E}} := \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \cdots, \vec{e}'_n\}$$

2. $\mathcal{F}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$ με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = m$, και έστω $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ και $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$ δύο βάσεις του:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{F}} := \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_m\}, \quad \mathcal{B}'_{\mathcal{F}} := \{\vec{\varepsilon}'_1, \vec{\varepsilon}'_2, \cdots, \vec{\varepsilon}'_m\},$$

3. $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση.

Συμβολίζουμε με:

4. $A = M_{\mathcal{B}_\mathcal{E},\mathcal{B}_\mathcal{F}}(f)$ τον πίνακα της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_\mathcal{E}$ και $\mathcal{B}_\mathcal{F}$ των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$:

$$A = (a_{ij}) := M_{\mathcal{B}_\mathcal{E},\mathcal{B}_\mathcal{F}} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

5. $A' = M_{\mathcal{B}'_\mathcal{E},\mathcal{B}'_\mathcal{F}}(f)$ τον πίνακα της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'_\mathcal{E}$ και $\mathcal{B}'_\mathcal{F}$ των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$:

$$A' = (a'_{ij}) := M_{\mathcal{B}'_\mathcal{E},\mathcal{B}'_\mathcal{F}} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

6. $P = M_{\mathcal{B}_\mathcal{E},\mathcal{B}'_\mathcal{E}}$ τον πίνακα μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}_\mathcal{E}$ στην βάση $\mathcal{B}'_\mathcal{E}$:

$$P = (p_{ij}) := M_{\mathcal{B}_\mathcal{E},\mathcal{B}'_\mathcal{E}} \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$$

Τότε από το Θεώρημα 7.3.3 γνωρίζουμε ότι ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}'_\mathcal{E}$ στην βάση $\mathcal{B}_\mathcal{E}$ είναι ο P^{-1}, δηλαδή: $P^{-1} = M_{\mathcal{B}'_\mathcal{E},\mathcal{B}_\mathcal{E}}$.

7. $Q = M_{\mathcal{B}_\mathcal{F},\mathcal{B}'_\mathcal{F}}$ τον πίνακα μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}_\mathcal{F}$ στην βάση $\mathcal{B}'_\mathcal{F}$:

$$Q = (q_{ij}) := M_{\mathcal{B}_\mathcal{F},\mathcal{B}'_\mathcal{F}} \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$$

Τότε από το Θεώρημα 7.3.3 γνωρίζουμε ότι ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}'_\mathcal{F}$ στην βάση $\mathcal{B}_\mathcal{F}$ είναι ο Q^{-1}, δηλαδή: $Q^{-1} = M_{\mathcal{B}'_\mathcal{F},\mathcal{B}_\mathcal{F}}$.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$. Γι' αυτό το σκοπό χρειαζόμαστε κάποια προεργασία.

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$ ένα τυχόν διάνυσμα του $\mathcal{E}$, το οποίο το εκφράζουμε ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων των βάσεων $\mathcal{B}_\mathcal{E}$ και $\mathcal{B}'_\mathcal{E}$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i \tag{7.2}$$

$$\vec{x} = x'_1\vec{e}'_1 + x'_2\vec{e}'_2 + \cdots + x'_n\vec{e}'_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}'_i \tag{7.3}$$

Συμβολίζουμε με $\vec{X}$ και $\vec{X}'$ τα διανύσματα-στήλες των συνιστωσών του $\vec{x}$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_\mathcal{E}$ και $\mathcal{B}'_\mathcal{E}$ όπως στην σχέση ??. Τότε από την Πρόταση 7.3.4, έχουμε τις σχέσεις:

$$\vec{X} = P \cdot \vec{X}', \quad \vec{X}' = P^{-1} \cdot \vec{X} \tag{7.4}$$

Εφαρμόζουμε την γραμμική απεικόνιση f στο διάνυσμα $\vec{x}$ και έστω $\vec{y} = f(\vec{x})$. Εν συνεχεία εκφράζουμε το $\vec{y}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων των βάσεων $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ και $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$:

$$f(\vec{x}) = \vec{y} = y_1\vec{\varepsilon}_1 + y_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + y_n\vec{\varepsilon}_m = \sum_{i=1}^{m} x_i\vec{\varepsilon}_i \tag{7.5}$$

$$f(\vec{x}) = \vec{y} = y'_1\vec{\varepsilon}'_1 + y'_2\vec{\varepsilon}'_2 + \cdots + y'_n\vec{\varepsilon}'_n = \sum_{i=1}^{m} x_i\vec{\varepsilon}'_i \tag{7.6}$$

Συμβολίζουμε με $\vec{Y}$ και $\vec{Y}'$ τα διανύσματα-στήλες των συνιστωσών του $\vec{y} = f(\vec{x})$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ και $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$ όπως στην σχέση ??. Τότε από την Πρόταση 7.3.4, έχουμε τις σχέσεις:

$$\vec{Y} = Q \cdot \vec{Y}', \quad \vec{Y}' = Q^{-1} \cdot \vec{Y} \tag{7.7}$$

Λήμμα 7.4.1 *Τα διάνυσματα-στήλες $\vec{X}$ και $\vec{Y}$ των συνιστωσών των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{y} = f(\vec{x})$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ και $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ τν $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ αντίστοιχα, συνδέονται με τον ακόλουθο τύπο:*

$$\vec{Y} = A \cdot \vec{X} \tag{7.8}$$

ή περισσότερο αναλυτικά:

$$\forall i = 1, 2, \cdots, m: \quad y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \tag{7.9}$$

Απόδειξη:

□

Θεώρημα 7.4.2 *Έστω $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Επιλέγουμε δύο τυχούσες βάσεις $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ και $\mathcal{B}'_{\mathcal{E}}$ του $\mathcal{E}$, και δύο τυχούσες βάσεις $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ και $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$ του $\mathcal{F}$. Έστω A ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ και $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ και έστω A' ο πίνακας της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'_{\mathcal{E}}$ και $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$. Τέλος έστω P ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ στην βάση $\mathcal{B}'_{\mathcal{E}}$ του $\mathcal{E}$, και έστω Q ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ στην βάση $\mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$ του $\mathcal{F}$. Τότε ισχύει ο ακόλουθος τύπος:*

$$\boxed{A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P}$$

Απόδειξη:

□

Το Θεώρημα 7.4.2 μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.4.3 *Έστω $A, A' \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ δύο $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Οι πίνακες A και A' καλούνται* **ισοδύναμοι** *αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας $P \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ και ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας $Q \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$, έτσι ώστε:*

$$A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$$

Θεώρημα 7.4.4 *Δύο πίνακες $A, A' \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ είναι ισοδύναμοι αν-ν είναι πίνακες μιας γραμμικής απεικόνισης $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = m$, ως προς διαφορετικές βάσεις των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$.*

Απόδειξη:

□

Υποθέτουμε τώρα ότι $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ και θέτουμε $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} = \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ και $\mathcal{B}'_{\mathcal{E}} = \mathcal{B}'_{\mathcal{F}}$, στα παραπάνω δεδομένα. Επομένως έχουμε μια γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ και δύο βάσεις του $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{E}} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}, \quad \mathcal{B}'_{\mathcal{E}} := \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \cdots, \vec{e}'_n\}$$

Όπως προηγουμένως, έστω $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ ο πίνακας της f στην βάση $\mathcal{B}$ και $A' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ ο πίνακας της f στην βάση $\mathcal{B}'$. Επίσης έστω $P = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ ο πίνακας μετάβασης από την βάση $\mathcal{B}$ στην βάση $\mathcal{B}'$. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 7.3.3, ο πίνακας μετάβασης $Q = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ από την βάση $\mathcal{B}'$ στην βάση $\mathcal{B}$ είναι $Q = P^{-1}$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 7.4.2, θα έχουμε $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Αυτή η σχέση τετραγωνικών πινάκων μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.4.5 *Έστω $A, A' \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ δύο τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Οι πίνακες A και A' καλούνται* **όμοιοι** *αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας $P \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$έτσι ώστε:*

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Η παρπάνω ανάλυση μας οδηγεί στο ακόλουθο βασικό Θεώρημα, το οποίο είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 7.4.4.

Θεώρημα 7.4.6 *Δύο τετραγωνικοί πίνακες $A, A' \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ είναι όμοιοι αν-ν είναι πίνακες μιας γραμμικής απεικόνισης $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, ως προς διαφορετικές βάσεις του $\mathcal{E}$.*

Απόδειξη:

□

Παράδειγμα 7.4.1 *Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμμική απεικόνιση η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x, x + y, 0)$$

Θεωρούμε τις ακόλουθες βάσεις του $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}_1 := \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

$$\mathcal{B}_2 := \{\vec{e}_1' = (1, 1, 0), \vec{e}_2' = (0, 1, 1), \vec{e}_3' = (1, 1, 1)\}$$

όπως στο Παράδειγμα 7.2.2.

Στο σύνολο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ορίζουμε μια σχέση $\sim$ ως εξής:

$$\forall A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) :\ \ A \sim B \iff \text{οι πίνακες } A, B \text{ είναι ισοδύναμοι}$$

δηλαδή: $A \sim B$ αν-ν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ και ένας αντιστρέψιμος $m\times m$ πίνακας $Q \in \mathbb{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$, έτσι ώστε: $B = Q^{-1}\cdot A\cdot P$.

Πρόταση 7.4.7 *Η σχέση $\sim_{m\times n}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ των $m \times n$ πινάκων.*

Απόδειξη: □

Περιοριζόμενοι σε τετραγωνικούς $n \times n$ πίνακες έχουμε ανάλογα τον ακόλουθο ορισμό και την ακόλουθη πρόταση.

Στο σύνολο $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ορίζουμε μια σχέση $\sim_{n\times n}$ ως εξής:

$$\forall A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) :\ \ A \sim_{n\times n} B \iff \text{οι πίνακες } A, B \text{ είναι όμοιοι}$$

δηλαδή: $A \sim_{n\times n} B$ αν-ν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε: $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Πρόταση 7.4.8 *Η σχέση ομοιότητας $\sim_{n\times n}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ των $n \times n$ πινάκων.*

Απόδειξη: □

Σύμφωνα με τις Προτάσεις 7.4.7 και 7.4.8 η σχέση $\sim_{m\times n}$ διαμερίζει το σύνολο $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ σε κλάσεις ισοδυναμίας (ισοδύναμων πινάκων), και η σχέση $\sim_{n\times n}$ διαμερίζει το σύνολο $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ σε κλάσεις ισοδυναμίας (όμοιων πινάκων). Δύο από τους βασικότερους σκοπούς της Γραμμικής Άλγεβρας είναι: (α) η εύρεση των πλέον απλών αντιπροσώπων σε κάθε κλάση ισοδυναμίας ή ομοιότητας, και (β) η εύρεση ιδιοτήτων πινάκων οι οποίες ισχύουν για κάθε πίνακα ο οποίος ανήκει σε μια δεδομένη κλάση ισοδυναμίας η ομοιότητας. Στα επόμενα Κεφάλαια θα δούμε κάποιες από αυτές τις ιδιότητες.

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης «Γραμμική Άλγεβρα Ι». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1225.

Σημείωμα Αδειοδότησης