ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Βαθμίδα Πίνακα

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης

Τμήμα: Μαθηματικών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κεφάλαιο 8

Βαθμιδα Πινακα

Στο παρόν Κεφάλαιο θα μελετήσουμε την βαθμίδα ενός πίνακα με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$, καθώς και τις κυριότερες ιδιότητες της. Η έννοια της βαθμίδας είναι ανάλογη της έννοιας της βαθμίδας μιας γραμμικής απεικόνισης, και θα διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στα επόμενα κεφάλαια που αφορούν την θεωρία οριζουσών και γραμμικών συστημάτων.

8.1 Ορισμός και Βασικές Ιδιότητες

Στην παρούσα ενότητα σταθεροποιούμε ένα σώμα $\mathbb{K}$.

Έστω

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$.

Υπενθυμίζουμε ότι με:

1. $\Sigma_m(\mathbb{K})$ συμβολίζουμε τον χώρο στηλών με στοιχεία από το $\mathbb{K}$.

2. $\Gamma_n(\mathbb{K})$ συμβολίζουμε τον χώρο γραμμών με στοιχεία από το $\mathbb{K}$.

Θεωρώντας τις στήλες του πίνακα A, βλέπουμε ότι ο πίνακας A ορίζει τα ακόλουθα διανύσματα του χώρου στηλών $\Sigma_m(\mathbb{K})$:

$$\vec{A}^1 := \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \vec{A}^2 := \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \quad \vec{A}^n := \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \ \in \ \Sigma_m(\mathbb{K})$$

Παρόμοια θεωρώντας τις γραμμές του πίνακα A, βλέπουμε ότι ο πίνακας A ορίζει τα ακόλουθα διανύσματα του χώρου στηλών $\Gamma_n(\mathbb{K})$:

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}, \ \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$\vec{A}_m = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \ \in \ \Gamma_n(\mathbb{K})$$

Ορισμός 8.1.1 *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$.*

1. **Ο χώρος στηλών του πίνακα** A *ορίζεται να είναι ο υπόχωρος $\Sigma(A)$ του $\Sigma_m(\mathbb{K})$ ο οποίος παράγεται από τις n στήλες $\vec{A}^1, \vec{A}^2, \cdots, \vec{A}^n$ του πίνακα A.*

2. **Η βαθμίδα στηλών** $\sigma(A)$ **του πίνακα** A *ορίζεται να είναι η διάσταση του χώρου στηλών $\Sigma(A)$ του πίνακα A:*

$$\sigma(A) := \dim_{\mathbb{K}} \Sigma(A)$$

   Δηλαδή $\sigma(A)$ είναι το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα A, θεωρώντας τις στήλες του A ως διανύσματα του χώρου στηλών $\Sigma(A)$.

3. **Ο χώρος γραμμών του πίνακα** A *ορίζεται να είναι ο υπόχωρος $\Gamma(A)$ του $\Gamma_n(\mathbb{K})$ ο οποίος παράγεται από τις m γραμμές $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \cdots, \vec{A}_m$ του πίνακα A.*

4. **Η βαθμίδα γραμμών** $\gamma(A)$ **του πίνακα** A *ορίζεται να είναι η διάσταση του χώρου γραμμών $\Gamma(A)$ του πίνακα A:*

$$\gamma(A) := \dim_{\mathbb{K}} \Gamma(A)$$

   Δηλαδή $\gamma(A)$ είναι το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών του πίνακα A, θεωρώντας τις γραμμές του A ως διανύσματα του χώρου γραμμών $\Gamma(A)$.

Παρατήρηση 8.1.2 *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Παρατηρούμε ότι επειδή $\Sigma(A) \subseteq \Sigma_m(\mathbb{K})$ και $\dim_{\mathbb{K}} \Sigma_m(\mathbb{K}) = m$, θα έχουμε: $\sigma(A) \leq m$. Παρόμοια επειδή $\Gamma(A) \subseteq \Gamma_n(\mathbb{K})$ και $\dim_{\mathbb{K}} \Gamma_n(\mathbb{K}) = n$, θα έχουμε: $\gamma(A) \leq n$.*

Παρατήρηση 8.1.3 *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Τότε:*

$$\sigma(A) = \gamma({}^tA)$$

Πραγματικά αυτό προκύ·πτει άμεσα από τον ορισμό καθώς οι στήλες του ${}^tA$ είναι οι γραμμές του A και οι γραμμές του ${}^tA$ είναι οι στήλες του A

Ένας από τους βασικούς σκοπούς της παρούσης ενότητας είναι να δείξουμε ότι ισχύει: $\sigma(A) = \gamma(A)$. Προηγουμένως όμως χρειαζόμαστε κάποια προεργασία.

Λήμμα 8.1.4 *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, και έστω η επαγόμενη γραμμική απεικόνιση την οποία ορίζει ο A:*

$$f_A : \Sigma_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \Sigma_m(\mathbb{K}), \ \vec{X} \longmapsto f_A(\vec{X}) := A \cdot \vec{X}$$

Τότε: $\mathbf{r}(f_A) = \sigma(A)$.

Απόδειξη: □

Λήμμα 8.1.5 *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, και έστω η επαγόμενη γραμμική απεικόνιση την οποία ορίζει ο ανάστροφος ${}^tA$ του A:*

$$f_{{}^tA} : \Sigma_m(\mathbb{K}) \longrightarrow \Sigma_n(\mathbb{K}), \ \vec{X} \longmapsto f_{{}^tA}(\vec{X}) := {}^tA \cdot \vec{X}$$

Τότε: $\mathbf{r}(f_{{}^tA}) = \sigma(A) = \gamma({}^tA) \leq \min\{m, n\}$.

Απόδειξη: □

8.2 Βαθμίδα Γραμμικής Απεικόνισης και Πίνακα

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε ορίσαμε την βαθμίδα $\mathbf{r}(f)$ της fως την διάσταση του υπόχωρου $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(f)$. Στην παρούσα ενότητα θα αναλύσουμε την σχέση μεταξύ της βαθμίδας της f και της βαθμίδας γραμμών ή στηλών του πίνακα της f ως προς τυχούσες βάσεις των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$.

Θεώρημα 8.2.1 *Έστω $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ δύο διανυσματικοί χώροι υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και έστω $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = m$. Αν $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε υπάρχει μια βάση $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ του $\mathcal{E}$ και μια βάση $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ του $\mathcal{F}$, έτσι ώστε ο πίνακας της f στις παραπάνω βάσεις να είναι της μορφής:*

$$M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

όπου:

$$I_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \ \in \ \mathbb{M}_{r\times r}(\mathbb{K})$$

είναι ο μοναδιαίος $r \times r$ πίνακας και $r = \mathbf{r}(f)$.

Απόδειξη: □

Ο $m \times n$ πίνακας του Θεωρήματος 8.2.1 γράφεται περισσότερο συνοπτικά ως εξής:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

όπου $0_{r\times(n-r)}$ είναι ο μηδενικός $r\times(n-r)$ πίνακας, $0_{(m-r)\times r}$ είναι ο μηδενικός $(m-r)\times r$ πίνακας, και $0_{(m-r)\times(n-r)}$ είναι ο μηδενικός $(m-r)\times(n-r)$ πίνακας.

Πρόταση 8.2.2 *Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Τότε ο A είναι ισοδύναμος με έναν πίνακα της μορφής:*

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right), \quad \text{όπου} \ \ r := \sigma(A)$$

Δηλαδή υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P και ένας αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας Q έτσι ώστε:

$$Q^{-1} \cdot A \cdot P = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

Απόδειξη:

□

Θεώρημα 8.2.3 *Έστω $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ δύο $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι.*

2. *Οι πίνακες A και B έχουν την ίδια βαθμίδα στηλών:*

$$\sigma(A) = \sigma(B)$$

Απόδειξη: □

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$, και $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε ορίσαμε την ανάστροφη απεικόνιση μεταξύ των δυϊκών χώρων $\mathcal{F}^\star$ και $\mathcal{E}^\star$ ως εξής:

$$^t f : \mathcal{F}^\star \longrightarrow \mathcal{E}^\star, \; \xi \longmapsto {}^t f(\xi) = \xi \circ f$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1.12 οι απεικονίσεις f και $^t f$ έχουν την ίδια βαθμίδα:

$$\mathbf{r}(f) = \mathbf{r}(^t f)$$

Υποθέτουμε ότι:

1. $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$ και $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} = m$.

2.

$$\mathcal{B}_{\mathcal{E}} := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{E}$, και έστω

$$\mathcal{B}^\star_{\mathcal{E}} := \{\vartheta^1, \vartheta^2, \cdots, \vartheta^n\}$$

είναι η δυϊκή της βάση του $\mathcal{E}^\star$.

3.

$$\mathcal{B}_{\mathcal{F}} := \{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{F}$, και έστω

$$\mathcal{B}^\star_{\mathcal{F}} := \{\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^n\}$$

είναι η δυϊκή της βάση του $\mathcal{F}^\star$.

Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε αν ο πίνακας της ανάστροφης απεικόνισης ${}^t f$ ως προς τις δυϊκές βάσεις $\mathcal{B}^\star_{\mathcal{F}}$ και $\mathcal{B}^\star_{\mathcal{E}}$ σχετίζεται με τον πίνακα της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ και $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$. Την απάντηση δίνει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 8.2.4 *Έστω $A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f)$ ο πίνακας της $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}_{\mathcal{E}}$ και $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ των $\mathcal{E}$ και $\mathcal{F}$ αντίστοιχα.*

Τότε ο πίνακας $B := (b_{ij}) = M_{\mathcal{B}^\star_{\mathcal{F}},\mathcal{B}^\star_{\mathcal{E}}}({}^t f)$ της ανάστροφης απεικόνισης ${}^t f : \mathcal{F}^\star \to \mathcal{E}^\star$ είναι ο ανάστροφος του A, δηλαδή $B = {}^t A$ ή περισσότερο αναλυτικά:

$$M_{\mathcal{B}^\star_{\mathcal{F}},\mathcal{B}^\star_{\mathcal{E}}}({}^t f) = {}^t M_{\mathcal{B}_{\mathcal{E}},\mathcal{B}_{\mathcal{F}}}(f)$$

Απόδειξη: □

Θεώρημα 8.2.5 *Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Τότε η βαθμίδα στηλών του A είναι ίση με την βαθμίδα γραμμών του A:*

$$\sigma(A) = \gamma(A)$$

Απόδειξη: □

Ορισμός 8.2.6 *Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Η κοινή τιμή $\sigma(A) = \gamma(A)$ καλείται* **βαθμίδα** *του A και συμβολίζεται με $\mathbf{r}(A)$.*

Θεώρημα 8.2.7 *Έστω $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ δύο $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι.*

2. $\mathbf{r}(A) = \mathbf{r}(B)$.

3. *Οι πίνακες A και B είναι ισοδύναμοι με τον $m \times n$ πίνακα:*

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

Αν $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας, τότε γνωρίζουμε ότι $\mathbf{r}(A) \leq n$. Το ακόλουθο Θεώρημα χαρακτηρίζει τους τετραγωνικούς πίνακες των οποίων η βαθμίδα λαμβάνει την μέγιστη δυνατή τιμή.

Θεώρημα 8.2.8 *Έστω $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.*

2. $\mathbf{r}(A) = n$.

3. *Ο πίνακας είναι ισοδύναμος με τον μοναδιαίο* $n \times n$ *πίνακα* I_n.

Ιδιαίτερα δύο τετραγωνικοί αντιστρέψιμοι πίνακες είναι πάντα ισοδύναμοι.

Απόδειξη: □

Όπως έχουμε δείξει η βαθμίδα ενός πίνακα $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ συμπίπτει με την βαθμίδα της γραμμικής απεικόνισης $f_A : \Sigma_n(\mathbb{K}) \to \Sigma_m(\mathbb{K})$, έπεται ότι η βαθμίδα πίνακα έχει τις ίδιες ιδιότητες τις οποίες έχει η βαθμίδα πίνακα. Επομένως συνοψίζοντας τα αποτελέσματα περί βαθμίδας γραμμικής απεικόνισης τα οποία αποδείξαμε στην ενότητα **;;** καθώς και τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου, θα έχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$.

α. Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(kA) = \mathbf{r}(A), \;\; \forall k \in \mathbb{K}} \tag{1}$$

Απόδειξη: Θα

β. Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(A) \leq \min\{m, n\}} \tag{2}$$

2. $A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ δύο $m \times n$ πίνακες με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$. Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{|\mathbf{r}(A) - \mathbf{r}(B)| \leq \mathbf{r}(A+B) \leq \mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B)} \tag{3}$$

3. Έστω $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ένας $m \times n$ πίνακας και $B \in \mathbb{M}_{n\times r}(\mathbb{K})$ ένας $n \times r$ πίνακας με στοιχεία από ένα σώμα $\mathbb{K}$.

α. Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(A \cdot B \leq \min\{\mathbf{r}(A), \mathbf{r}(B)\}} \tag{4}$$

β. Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(A \cdot B) = \mathbf{r}(A) \;\;\text{αν ο } B \text{ είναι αντιστρέψιμος}} \tag{5}$$

ς. Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(A \cdot B) = \mathbf{r}(B) \quad \text{αν ο } B \text{ είναι αντιστρέψιμος}} \tag{6}$$

δ. Ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{r}(A \cdot B) \geq \mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B) - n} \tag{7}$$

8.3 Μέθοδοι Εύρεσης Βαθμίδας

Σκοπός μας στην παρούσα ενότητα είναι να αναπτύξουμε κάποιες μεθόδους υπολογισμού της βαθμίδας ενός πίνακα.

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης «Γραμμική Άλγεβρα Ι». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1225.

Σημείωμα Αδειοδότησης