ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ **1**

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

ΒΟΗΘΟΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: Χ. Ψαρουδάκης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

http://www.math.uoi.gr/~abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html

16 - 11 - 2011

Άσκηση 1. *Να γράψετε αναλυτικά τον* 6×6 *πίνακα* $A = (a_{ij})$ *όπου* $a_{ij} = \min\{i, j\} + i - j$.

Άσκηση 2. *Δίνονται οι πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Να εκτελεστούν, όπου είναι δυνατόν, οι ακόλουθοι πολλαπλασιασμοί πινάκων:

$$A \cdot B, \quad B \cdot A, \quad A \cdot C, \quad C \cdot A, \quad B \cdot C$$

Άσκηση 3. *Έστω οι πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να προσδιοριστεί 3×3 *πίνακας* X, *ο οποίος να ικανοποιεί την εξίσωση:*

$$A + 3X = 2(X - B)$$

Άσκηση 4. *Έστω* $n \in \mathbb{N}$ *με* $n \geq 2$. *Ας είναι* $\mathsf{AT}_n(\mathbb{K})$ *(αντιστοίχως* $\mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$*) το σύνολο των άνω (αντιστοίχως κάτω) τριγωνικών* $n \times n$ *πινάκων με στοιχεία από το σώμα* $\mathbb{K}$.

Να δειχθεί ότι η τομή $\mathsf{AT}_n(\mathbb{K}) \cap \mathsf{KT}_n(\mathbb{K})$*) των δύο αυτών συνόλων ισούται με το σύνολο των διαγωνίων πινάκων.*

Άσκηση 5. *Δίνεται ο πίνακας* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. *Να δείξετε ότι* $A^4 = I_3$ *και ο ακολούθως να δείξετε ότι ο* A *είναι αντιστρέψιμος. Στην συνέχεια να βρείτε τους πίνακες* A^{-1} *και* A^{2011}.

Άσκηση 6. *Έστω* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Βρείτε τον πίνακα* A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 7. *Για κάθε* $n \geq 1$, *να βρείτε την* n*-οστή δύναμη του πίνακα* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Άσκηση 8. *Έστω* A, B *δύο αντιστρέψιμοι* $n \times n$ *πίνακες έτσι ώστε ο πίνακας* $A + B^{-1}$ *να είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι ο πίνακας* $A^{-1} + B$ *είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:*

$$(A^{-1} + B)^{-1} = A \cdot (A + B^{-1})^{-1} \cdot B^{-1}$$

Άσκηση 9. *Αν* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, *να υπολογίσετε τον* A^2 *και να αποδείξετε ότι* $A^2 - 2A - 8I_2 = 0$.

Άσκηση 10. *Έστω* A *και* B *δύο* $n \times n$ *πίνακες τέτοιοι ώστε ο πίνακας* $I_n - (A \cdot B)^2$ *να είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι*

$$\left(I_n - (B \cdot A)^2\right)^{-1} = I_n + B \cdot \left(I_n - (A \cdot B)^2\right)^{-1} \cdot A \cdot B \cdot A$$

Άσκηση 11. *Αν για τον* $n \times n$ *πίνακα* A *ισχύει* $A^4 - A^3 + A^2 - A + I_n = 0$, *να δείξετε ότι:* $A^{-1} = -A^4$.

Άσκηση 12. *Θεωρούμε τους* $n \times n$ *πίνακες* A *και* B, *και υποθέτουμε ότι ο* B *είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:* $A + B = A \cdot B$. *Να δείξετε ότι ο* A *είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:* $A^{-1} + B^{-1} = I_n$.

Άσκηση 13. *Έστω* A, B *δύο* $m \times n$ *πίνακες. Για ποιές τιμές των* $m, n \in \mathbb{N}$ *ισχύει:*

$$A = B \iff \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B);$$

Άσκηση 14. *Έστω* A, B, C *τρεις πίνακες έτσι ώστε να ορίζονται οι πίνακες* $A \cdot B$ *και* $B \cdot C$. *Να δείξετε ότι ορίζονται οι πίνακες* $A \cdot (B \cdot C)$, $(A \cdot B) \cdot C$ *και επιπλέον ισχύει:* $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.