Γραμμικη Αλγεβρα Ι

Ασκησεις - Φυλλαδιο **2**

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://www.math.uoi.gr/∼abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html

23 - 11 - 2011

Άσκηση 1. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Άσκηση 4. *Αν* α, β *και* γ *είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \qquad (\textit{ορίζουσα } \text{Vandermonde}).$$

Άσκηση 5. *Να υπολογίσετε την ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & 1+\alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_1\beta_3 \\ 1+\alpha_2\beta_1 & 1+\alpha_2\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_3 \\ 1+\alpha_3\beta_1 & 1+\alpha_3\beta_2 & 1+\alpha_3\beta_3 \end{vmatrix}$.

Άσκηση 6. *Θεωρούμε έναν πίνακα* $A \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *ο οποίος ικανοποιεί την σχέση:*

$$A^2 + 2 \cdot A = \mathbb{O}$$

Να δείξετε ότι ο πίνακας $A + I_3$ *είναι αντιστρέψιμος, να βρείτε τον* $(A + I_3)^{-1}$*, και να υπολογίσετε την ορίζουσα* $|A|$ *του* A.

Άσκηση 7. *Να λυθεί η εξίσωση* $\begin{vmatrix} 2-x & 1 & i \\ 1 & 2-x & i \\ -i & -i & 2-x \end{vmatrix} = 0$, *όπου* $i^2 = -1$.

Άσκηση 8. *Να υπολογισθεί η* $n \times n$ *ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Άσκηση 9. *Να υπολογισθεί η* $n \times n$ *ορίζουσα* $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$.

Άσκηση 10. *Να υπολογισθεί η* $n \times n$ *ορίζουσα* $A = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$.

Άσκηση 11. *Να υπολογισθεί η* $2n \times 2n$ *ορίζουσα* $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \cdots & \beta & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \beta & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{vmatrix}$.

Άσκηση 12. *Να υπολογισθεί η ορίζουσα του ακόλουθου* $n \times n$ *πίνακα* A, *όπου* $x \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 13. *Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να έχει η ορίζουσα ενός* 5×5 *πίνακα τής μορφής*

$$A = \begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star \end{pmatrix};$$

(Με «$\star$» συμβολίζουμε αυθαίρετες τιμές στοιχείων του $\mathbb{K}$*).*