Γραμμικη Αλγεβρα Ι

Ασκησεις - Φυλλαδιο 3

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://www.math.uoi.gr/~abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html

30 - 11 - 2011

Άσκηση 1. *Έστω $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Αν $|A| = -3$, τότε να υπολογισθεί η ορίζουσα $|-A^4|$.*

Άσκηση 2. *Έστω $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ένας αντισυμμετρικός πίνακας. Αν ο πίνακας $I_n + A$ είναι αντιστρέψιμος, να εξετάσετε αν και ο πίνακας $I_n - A$ είναι αντιστρέψιμος.*

Άσκηση 3. *Αν $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ και ισχύει ${}^tA = A^{-1}$, ${}^tB = B^{-1}$, να δείξετε ότι:*

$$|(A+B)\cdot(A-B)| = |{}^tA\cdot B - {}^tB\cdot A|$$

Άσκηση 4. *Έστω $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ έτσι ώστε ${}^tA = A$. Να δείξετε ότι ${}^t(\mathsf{adj}A) = \mathsf{adj}A$.*

Άσκηση 5. *Έστω $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος πίνακας με $n \geq 2$. Να αποδειχθεί ότι*

$$|\mathsf{adj}A| = |A|^{n-1}$$

Άσκηση 6. *Έστω $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος πίνακας με $n \geq 2$. Να αποδειχθεί ότι*

$$\mathsf{adj}(\mathsf{adj}A) = |A|^{n-2}\cdot A$$

Άσκηση 7. *Να βρεθεί η ισχυρά κλιμακωτή μορφή του πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Ακολούθως, αν ο A είναι αντιστρέψιμος, να βρεθεί ο A^{-1} με χρήση πράξεων επί των γραμμών του.

Άσκηση 8. *Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Να δειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και στη συνέχεια να υπολογισθεί ο A^{-1}:*

(1) *με χρήση του συμπληρωματικού* $\mathsf{adj}A$ *του* A,

(2) *με τη μέθοδο στοιχειωδών μετασχηματισμών επί των γραμμών του πίνακα* $(A|I_3)$.

Άσκηση 9. *Αν ένας από τους πίνακες $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμος, τότε να δειχθεί ότι:*

$$|A\cdot B + I_n| = |B\cdot A + I_n|$$

Άσκηση 10. *Να λύσετε το σύστημα:*

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

(1) *με τη μέθοδο Cramer,*
(2) *με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.*

Άσκηση 11. *Να λυθούν τα συστήματα:*

(1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 + 11x_4 = 16 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 9 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 12x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

(4) $x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 3.$

Άσκηση 12. *Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):*

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} 2x & + & y & + & z & = & -6\alpha \\ 2x & + & y & + & (\beta+1)z & = & 4 \\ \beta x & + & 3y & + & 2z & = & 3\alpha \end{cases}$$

1. *Να υπολογισθούν οι τιμές του β για τις οποίες το (Σ) έχει μοναδική λύση.*
2. *Για τις τιμές β για τις οποίες το (Σ) δεν έχει μοναδική λύση, να λύσετε το (Σ) με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.*

Άσκηση 13. *Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα:*

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \end{cases}$$

Άσκηση 14. *Αν το πολυώνυμο $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, όπου $a_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, 1, \cdots, n$, έχει $n+1$ διαφορετικές ρίζες, τότε να δείξετε ότι το $P(t)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.*