Γραμμικη Αλγεβρα I

Ασκησεις - Φυλλαδιο 4

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://www.math.uoi.gr/∼abeligia/LinearAlgebraI/LAI.html

14 - 12 - 2011

Άσκηση 1. *Θεωρούμε το σύνολο* $\mathbb{R}^3$ *μαζί με τις πράξεις:*

$$\oplus : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

και

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad r \odot (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Να εξετάσετε αν με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο $\mathbb{R}^3$ *είναι* $\mathbb{R}$*-διανυσματικός χώρος.*

Άσκηση 2. *Στο σύνολο των* 2×2 *πινάκων* $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*, ορίζουμε δυο πράξεις:*

$$\oplus : \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad A \oplus B = -(A + B)$$

και

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad r \odot A = -(rA)$$

Οι πράξεις στα δεξιά μέλη των ανωτέρω ορισμών είναι οι γνωστές πράξεις πρόσθεσης πινάκων και βαθμωτού πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα. Να εξετάσετε ποια από τα αξιώματα που διέπουν τον ορισμό του διανυσματικού χώρου ισχύουν και ποια όχι.

Άσκηση 3. *Στο σύνολο* $\mathbb{C}$ *των μιγαδικών αριθμών ορίζουμε τις πράξεις:*

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (z_1, z_2) \longmapsto z_1 + z_2$$

και

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (r, z) \longmapsto r \cdot z$$

Να δείξετε ότι η τριάδα $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το* $\mathbb{R}$.

Άσκηση 4. *Στο σύνολο* $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ *ορίζουμε τις πράξεις:*

$$\oplus : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad (a, b) \longmapsto a \oplus b = ab - 1$$

και

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad (r, a) \longmapsto r \odot a = a$$

Να εξετάσετε αν η τριάδα $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ *αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από το* $\mathbb{R}$.

Άσκηση 5. *Στο σύνολο* $\mathbb{R}$ *των πραγματικών αριθμών ορίζουμε πράξεις:*

$$\oplus : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (a, b) \longmapsto a \oplus b = ab$$

και

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\lambda, a) \longmapsto \lambda \odot a = \lambda + a$$

Να εξετάσετε αν η τριάδα $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ *αποτελεί διανυσματικό χώρο πάνω από το* $\mathbb{R}$.

Άσκηση 6. *Να δειχθεί ότι το υποσύνολο:*

$$\mathcal{V} = \big\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid c = a-b,\ d = a+b\big\} \ \subseteq\ \mathbb{R}^4$$

αποτελεί έναν $\mathbb{R}$-υπόχωρο του $\mathbb{R}^4$.

Άσκηση 7. *Να εξετασθεί ποιά από τα ακόλουθα υποσύνολα των αντίστοιχων διανυσματικών χώρων είναι υπόχωροι:*

(1) $\mathcal{V}_1 = \{(a,b,1) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, *στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$.*
(2) $\mathcal{V}_2 = \{(a,b,a+2b) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$, *στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$.*
(3) $\mathcal{V}_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a+2b-c = 0,\ \ a,b,c \in \mathbb{R}\}$, *στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$.*
(4) $\mathcal{V}_4 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \geq 0 \ \text{ και } \ c \leq 0\}$, *στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$.*
(5) $\mathcal{V}_5 = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid |a|+|b|+|d| = 0\}$, *στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^4$.*
(6) $\mathcal{V}_6 = \{A \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$, *στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*
(7) $\mathcal{V}_7 = \{A \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A^2 = \mathbb{O}\}$, *στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*
(8) $\mathcal{V}_8 = \{f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 1\}$, *στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
(9) $\mathcal{V}_9 = \{f \colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$, *στον $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathcal{F}\big((-1,1),\mathbb{R}\big)$.*

Άσκηση 8. *Θεωρούμε το σώμα $\mathbb{K}$ ως $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο. Να δείξετε ότι οι μόνοι υπόχωροι του $\mathbb{K}$ είναι οι: $\{0\}$, και $\mathbb{K}$.*

Άσκηση 9. *Να εξετασθεί ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ είναι $\mathbb{R}$-υπόχωροι:*

(1) $\mathcal{V}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid b = a+c \right\}$
(2) $\mathcal{V}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \mid c > 0 \right\}$

Άσκηση 10. *Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ πάνω από το $\mathbb{R}$ και τα παρακάτω υποσύνολα αυτού:*

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

και

$$\mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & c+d \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

(1) *Να δείξετε ότι οι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ είναι υπόχωροι του $\mathsf{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.*
(2) *Να βρεθεί η μορφή των στοιχείων του υποχώρου $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.*

Άσκηση 11. *Έστω $\mathcal{E}$ ένα μη-κενό σύνολο το οποίο είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις:*

$$\oplus \,:\, \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \qquad (x,y) \longmapsto x+y$$

και

$$\odot \,:\, \mathbb{K} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \qquad (\lambda,x) \longmapsto \lambda \odot x$$

(1) *Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα (1) - (8), ΕΚΤΟΣ από το αξίωμα:*

$$x+y = y+x, \qquad \forall x,y \in \mathcal{E} \qquad\qquad \textit{Αξίωμα } (2)$$

Να δείξετε ότι το αξίωμα (2) ικανοποιείται και επομένως η τριάδα $(\mathcal{E},+,\cdot)$ αποτελεί έναν $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρο.

(2) *Να δείξετε ότι το αξίωμα*

$$1 \cdot x = x, \qquad \forall x \in \mathcal{E} \qquad\qquad \textit{Αξίωμα } (8)$$

στον ορισμό ενός $\mathbb{K}$-διανυσματικό χώρου $\mathcal{E}$ δεν είναι συνέπεια των αξιωμάτων (1)-(7).