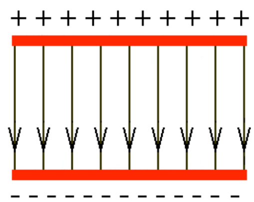
2. Ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, ηλεκτρική ροή και ο νόμος του Gauss

Οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές

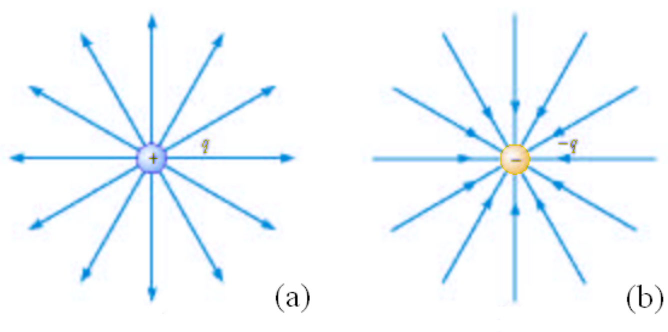
Ενα ηλεκτρικό πεδίο περιγράφεται εποπτικά με τις **ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές**, οι οποίες έχουν τις εξείς ιδιότητες:

(1) Σε κάθε σημείο τους, το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου είναι εφαπτόμενο.
(2) Δεν τέμνονται.
(3) Ξεκινούν από θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά φορτία, ή το άπειρο (όταν υπάρχει φορτίο που πλεονάζει).
(4) Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που διέρχονται από μία μοναδιαία επιφάνεια κάθετη σε αυτές είναι ανάλογος προς την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή αυτή. (Δηλαδή, το ηλεκτρικό πεδίο είναι ισχυρώτερο όπου οι δυναμικές γραμμές είναι πυκνώτερες, και αντίστροφα).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, η ένταση είναι σταθερή κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά. Οι δυναμικές γραμμές είναι παράλληλες και ισαπέχουσες. Πραγματοποιείται στον χώρο μεταξύ δύο επιπέδων μεταλλικών πλακών οι οποίες είναι φορτισμένες με αντίθετα φορτία και βρίσκονται κοντά η μία στην άλλη.

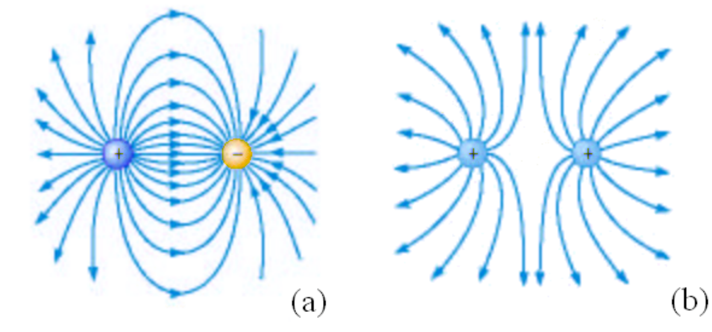


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Το (ανομογενές) ηλεκτρικό πεδίο ενός σημειακού θετικού ή αρνητικού φορτίου.



(1) Οι δυναμικές γραμμές καταλήγουν ή προέρχονται από το άπειρο.
(2) Στο παραπάνω Σχήμα, βλέπουμε τις δυναμικές γραμμές που περιέχονται στο επίπεδο που περιλαμβάνει το φορτίο. Στην πραγματικότητα, οι γραμμές αποκλίνουν από το φορτίο στον τριδιάστατο χώρο.

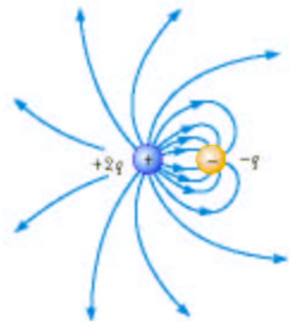
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Δύο (απολύτως) ίσα ομώνυμα ή ετερώνυμα ηλεκτρικά φορτία.



Εδώ, οι δυναμικές γραμμές έχουν κυλινδρική συμμετρία ως προς τον άξονα που συνδέει τα δύο φορτία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Ηλεκτρικό πεδίο ενός φορτίου +2q κοντά σε φορτίο –q.

Οι μισές από τις δυναμικές γραμμές που αναδύονται από το θετικό σημειακό φορτίο +2q καταλήγουν στο αρνητικό φορτίο –q. Οι άλλες μισές καταλήγουν στο άπειρο. Εάν το +2q αυξηθεί απεριόριστα ως προς το –q, το πεδίο θα καταλήξει στην μορφή του Σχήματος 2(α).



Η ηλεκτρική ροή

Κάθε στοιχειώδης επιφάνεια dS μπορεί να παρασταθεί ως ένα διάνυσμα $d\vec{S}$ το οποίο έχει μέτρο ίσο με το στοιχειώδες εμβαδό dS και διεύθυνση κάθετη προς το στοιχειώδες εμβαδό: $d\vec{S} = \hat{n}dS$, όπου $\hat{n}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια.

Μία πεπερασμένη ανοικτή επιφάνεια περιγράφεται με το διάνυσμα $\vec{S} = \iint d\vec{S}$

Η **στοιχειώδης ηλεκτρική ροή** dΦ που διέρχεται από μία στοιχειώδη επιφάνεια dS η οποία βρίσκεται σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ ορίζεται ως το εσωτερικό γινόμενο της έντασης του πεδίου $\vec{E}$ επί το διάνυσμα $d\vec{S}$ που παριστάνει την στοιχειώδη επιφάνεια:

$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Η **ηλεκτρική ροή** μέσω μίας πεπερασμένης ανοικτής επιφάνειας S είναι

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Η ηλεκτρική ροή είναι φυσικό μέγεθος που περιγράφει ποσοτικά τον αριθμό των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών που διέρχονται από μία επιφάνεια.

Ο νόμος του Gauss

Ο νόμος του Gauss αναφέρει ότι η συνολική ηλεκτρική ροή Φ που διέρχεται από μία κλειστή επιφάνεια είναι ανάλογη του συνολικού φορτίου $q_{\varepsilon\sigma}$ που βρίσκεται στο εσωτερικό της επιφάνειας

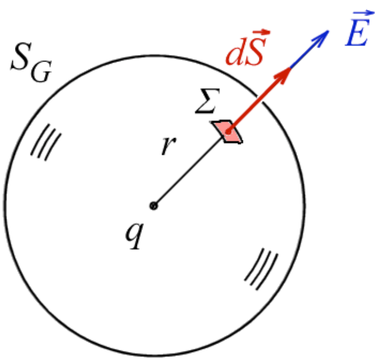
$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\epsilon_0}$$

όπου ϵ_0 είναι η ηλεκτρική διαπερατότητα του κενού.

Ο νόμος του Gauss βρίσκει εφαρμογή στον υπολογισμό της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου ενός πλήθους προβλημάτων τα οποία παρουσιάζουν μεγάλη συμμετρία.

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση r από ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο $q > 0$.



Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss την επιφάνεια σφαίρας με ακτίνα r και κέντρο το φορτίο. Στην επιφάνεια S_G το μέτρο της έντασης του πεδίου είναι σταθερό, η διεύθυνση είναι εκείνη της ακτίνα και η φορά προς τα έξω.

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_G} E \cdot dS = E \cdot \oiint_{S_G} dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Άρα,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

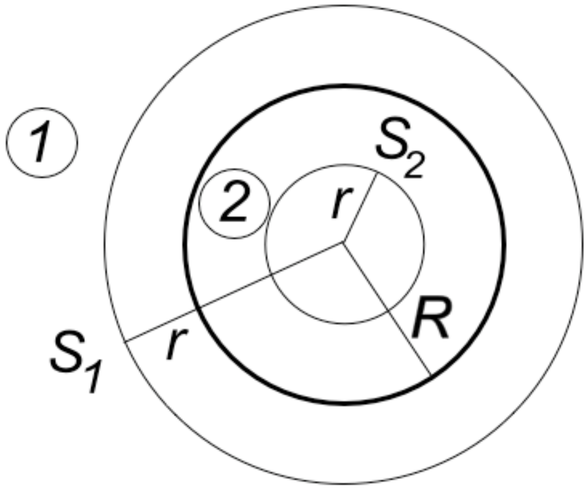
Επιπλέον, η δύναμη την οποία δέχεται ένα δοκιμαστικό φορτίο q_0 στην επιφάνεια S_G είναι

$$F = q_0 E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2}$$

Δηλαδή, καταλήγουμε στην έκφραση του νόμου του Coulomb. Επομένως, ο νόμος του Gauss είναι ισοδύναμος με τον νόμο του Coulomb.

Παράδειγμα 2

Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση r από το κέντρο μίας συμπαγούς σφαίρας, ομοιόμορφα φορτισμένης με φορτίο $Q > 0$.



Στην περιοχή 1, επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss S_G την επιφάνεια σφαίρας με ακτίνα $r > R$. ʽΕχουμε

$$\oiint_{S_G} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_G} E_1 \cdot dS = E_1 \cdot \oiint_{S_G} dS = E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Άρα,

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Στην περιοχή 2, επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss S_G την επιφάνεια σφαίρας με ακτίνα $r < R$. Εάν η φορτισμένη σφαίρα έχει χωρική πυκνότητα φορτίου Q, η σφαίρα S_G περιέχει φορτίο

$$q = \rho V_{S_G} = \rho \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{\tfrac{4}{3}\pi R^3} \tfrac{4}{3}\pi r^3 = Q \frac{r^3}{R^3}$$

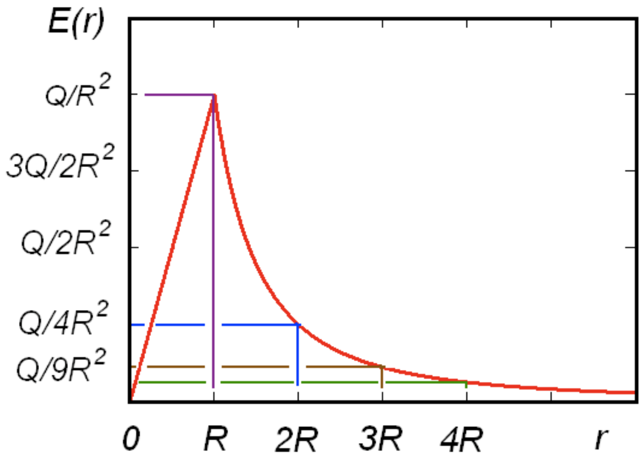
Απο τον νόμο του Gauss έχουμε

$$\oiint_{S_G} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} = \oiint_{S_G} E_2 \cdot dS = E_2 \cdot \oiint_{S_G} dS = E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Άρα,

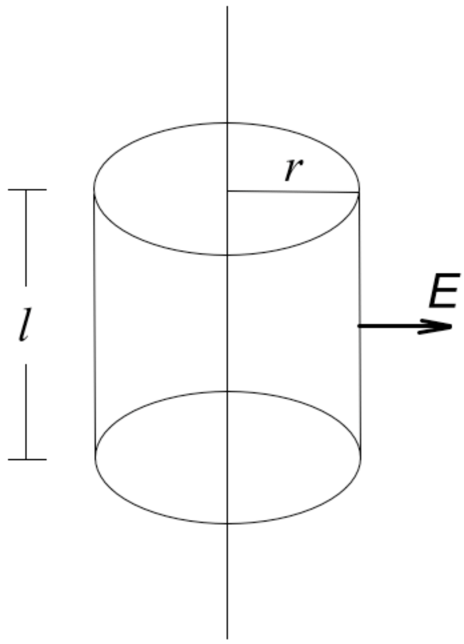
$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} Q \frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} r$$

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου (σε μονάδες $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$) ως συνάρτηση της απόστασης δίδεται στην επόμενη γραφική παράσταση.



Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση r από μία ευθεία, ομοιόμορφα φορτισμένη με γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda > 0$.



Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss S_G την επιφάνεια ενός κυλίνδρου μήκους l με άξονα την ευθεία και ακτίνα r.

Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, το ολοκλήρωμα Gauss γράφεται

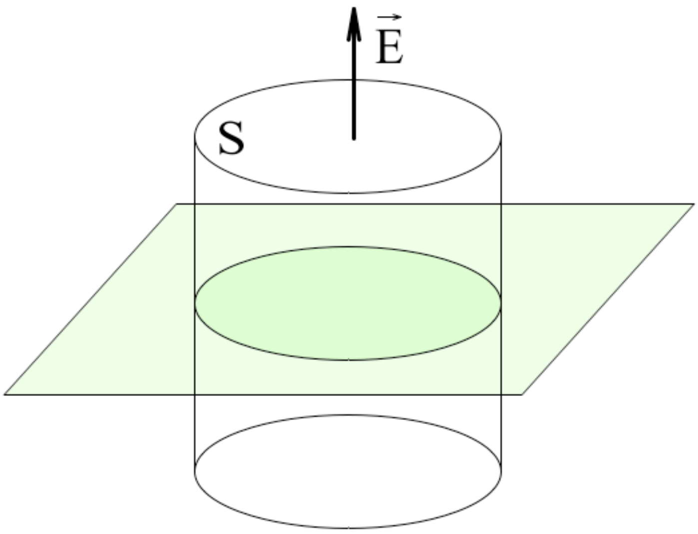
$$\oint\!\!\!\!\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

όπου $q = \lambda l$. Άρα, $E2\pi r l = \dfrac{\lambda l}{\varepsilon_0}$, οπότε

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

Παράδειγμα 3

Να υπολογίσετε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση από μία άπειρη επίπεδη επιφάνεια, ομοιόμορφα φορτισμένη με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma > 0$.



Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss S_G την επιφάνεια ενός κυλίνδρου με αυθαίρετο μήκος και βάσεις τοποθετημένες συμμετρικά ως προς την φορτισμένη επιφάνεια. Εάν συμβολίσουμε με S το εμβαδό κάθε βάσης, το ηλεκτρικό φορτίο που περιέχει ο κύλινδρος είναι $q = \sigma S$. Ο νόμος του Gauss δίνει

$$\oint\!\!\!\!\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E2S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Άρα, $E2S = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0}$, οπότε

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Για εύκολη αναφορά, τα προηγούμενα αποτελέσματα δίδονται στον επόμενο Πίνακα.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ορισμένων προβλημάτων με χρήση του νόμου του Gauss	
Κατανομή φορτίου	**Ηλεκτρικό πεδίο**
Μονωτική σφαίρα με ακτίνα R, ομοιόμορφα φορτισμένη με συνολικό φορτίο Q.	$\begin{cases} k\dfrac{Q}{r^2}, & r > R \\ k\dfrac{Q}{R^3}r, & r < R \end{cases}$
Λεπτό σφαιρικό κέλυφος με ακτίνα R, ομογενώς φορτισμένο με συνολικό φορτίο Q.	$\begin{cases} k\dfrac{Q}{r^2}, & r > R \\ 0, & r < R \end{cases}$
Ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους ομογενώς φορτισμένος με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ.	$2k\dfrac{\lambda}{r} = \dfrac{1}{2\pi\epsilon_0}\dfrac{\lambda}{r}$, *έξω από την φορτισμένη γραμμή*
Επίπεδη επιφάνεια απείρων διαστάσεων φορτισμένη με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ.	$\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$, *Οπουδήποτε έξω από το επίπεδο*
Αγωγός φορτισμένος με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ.	$\begin{cases} \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}, & \text{Μόλις έξω από τον αγωγό} \\ 0, & \text{Μέσα στον αγωγό} \end{cases}$

Αγωγοί σε ηλεκτροστατική ισορροπία

Ένας αγωγός βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισοροπία όταν δεν υπάρχει μετακίνηση φορτίων προς κάποια διεύθυνση μέσα στον αγωγό. Ένας αγωγός σε ηλεκτροστατική ισορροπία έχει τις εξείς ιδιότητες:

1. Στο εσωτερικό του αγωγού, το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν.
2. Όλο το ηλεκτρικό φορτίο κατανέμεται στην επιφάνεια του αγωγού.

3. Το ηλεκτρικό πεδίο λίγο έξω από την επιφάνεια του αγωγού είναι κάθετο στην επιφάνεια και είναι ίσο με $E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, όπου σ είναι η τοπική επιφανειακή πυκνότητα φορτίου.
4. Εάν ο αγωγός έχει ακαθόριστο σχήμα, το φορτίο τείνει να συσσωρεύεται στα μέρη όπου η ακτίνα καμπυλότητος είναι μικρότερη (ακίδες ή αιχμηρά σημεία).