Κεφάλαιο 8

Όργανα ηλεκτρικών μετρήσεων και μεταβατικά φαινόμενα σε ηλεκτρικά κυκλώματα

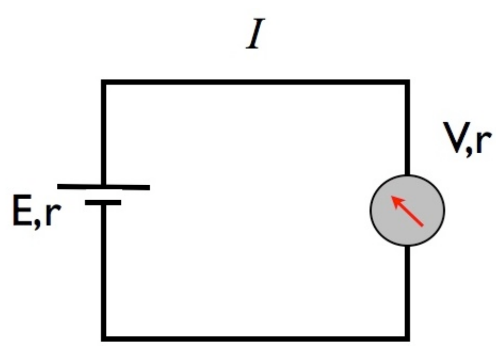
Όργανα ηλεκτρικών μετρήσεων

Το **αμπερόμετρο** είναι όργανο μέτρησης της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος. Συνδέεται σε σειρά με τον αγωγό του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε την ένταση του ρεύματος. Έχει μικρή εσωτερική αντίσταση. Εάν συνδεθεί παράλληλα με τον αγωγό μπορεί να καταστραφεί. Ένα **ιδανικό αμπερόμετρο** θεωρείται ότι έχει μηδενική εσωτερική αντίσταση.

Το **βολτόμετρο** είναι όργανο μέτρησης της τάσης μεταξύ δύο σημείων ενός ηλεκτρικού κυκλώματος. Έχει μεγάλη εσωτερική αντίσταση. Μπορεί να συνδέεται σε σειρά ή παράλληλα προς κάποιο αγωγό, χωρίς να καταστρέφεται. Ένα **ιδανικό βολτόμετρο** θεωρείται ότι έχει άπειρη εσωτερική αντίσταση.

Πρόβλημα

Ένα βολτόμετρο έχει εσωτερική αντίσταση R και συνδέεται με συσσωρευτή που έχει ηλεκτρεγερτική δύναμη E και εσωτερική αντίσταση r. Εάν $\frac{r}{R} = 0.05$, να βρεθεί ο λόγος $\frac{V}{E}$.



Το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι $I = \frac{E}{R+r}$.

Η ένδειξη του βολτομέτρου είναι

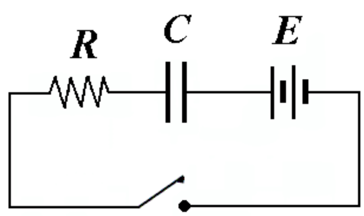
$$V = IR = \frac{ER}{R+r} \quad \Rightarrow \quad \frac{V}{E} = \frac{R}{R+r} \quad \Rightarrow \quad \frac{V}{E} = \frac{1}{1+\frac{r}{R}}$$

Άρα,

$$\frac{V}{E} = \frac{1}{1+0.05} = 0.952$$

Μεταβατικά φαινόμενα σε ηλεκτρικά κυκλώματα

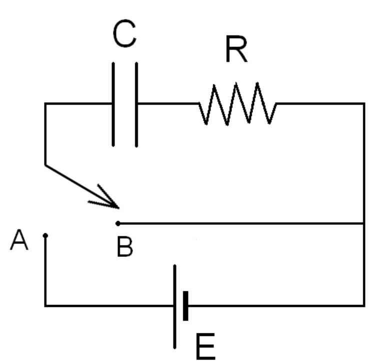
Τα μεταβατικά φαινόμενα αφορούν την συμπεριφορά του ρεύματος, φορτίου ή τάσης, μετά την διακοπή ή την αποκατάσταση συνέχειας σε ένα κύκλωμα, μέχρις ότου δημιουργηθεί σταθερή κατάσταση.



Για παράδειγμα, ο πυκνωτής του Σχήματος είναι αρχικά αφόρτιστος και ο διακόπτης κλείνει την χρονική στιγμή $t=0$. Οταν αποκατασταθεί ηλεκτροστατική ισορροπία, ο πυκνωτής θα αποκτήσει φορτίο. Η μεταβατική συμπεριφορά του κυκλώματος αφορά τα μεγέθη $Q=Q(t)$, $U=U(t)$ και $I=I(t)$. Θα ασχοληθούμε με την μεταβατική συμπεριφορά των κυκλωμάτων RC, RL, LC και RLC.

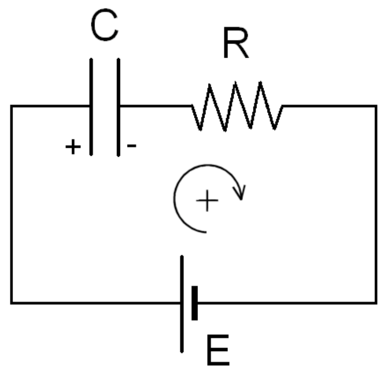
Το κύκλωμα RC

Το επόμενο κύκλωμα χρησιμεύει στη μελέτη της φόρτισης (διακόπτης στη θέση Α) και εκφόρτισης (διακόπτης στη θέση Β) του πυκνωτή χωρητικότητας C μέσω της αντίστασης R.



Φόρτιση του πυκνωτή

Το ισοδύναμο κύκλωμα είναι



Αρχικές συνθήκες: Τη χρονική στιγμή $t = 0$, $Q(0) = 0$, $U(0) = 0$ και $I = E/R$.

Για $t > 0$, από τον 2$^{\text{ο}}$ κανόνα του Kirchhoff έχουμε

$$\sum E = \sum IR \quad \Rightarrow \quad E - \frac{q}{C} = IR \quad \Rightarrow \quad IR + \frac{q}{C} = E$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο,

$$\frac{d}{dt}\left(IR + \frac{q}{C}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \qquad\qquad (1)$$

Επίλυση της (1):

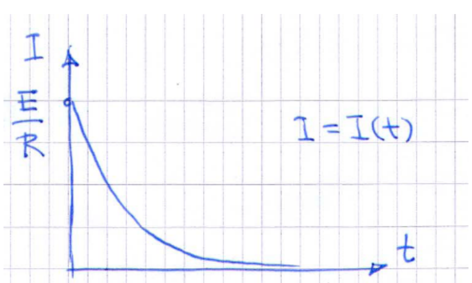
$$\frac{dI}{dt} + \frac{I}{RC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{I}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{I} = -\frac{dt}{\tau}$$

Η ποσότητα $\tau = RC$ έχει διαστάσεις χρόνου και ονομάζεται **σταθερά χρόνου** του κυκλώματος RC.

$$\int_0^{I_0} \frac{dI}{I} = -\int_0^t \frac{dt}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{I(t)}{I_0} = -\frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Άρα,

$I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, όπου $\tau = RC$ και $I_0 = \dfrac{E}{R}$.



Η σταθερά χρόνου τ είναι μέτρο της ταχύτητας φόρτισης του πυκνωτή. Μετά από χρόνο t=τ, το ρεύμα γίνεται $I(\tau)=I_0 e^{-1}=\frac{I_0}{e}\cong\frac{I_0}{2.72}\cong 0.368 I_0$, δηλαδή, γίνεται ίσο με το 36.8% της αρχικής τιμής.

Το φορτίο του πυκνωτή υπολογίζεται από το ηλεκτρικό ρεύμα.

$$I=\frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad dq=Idt=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}dt.$$

Έχουμε

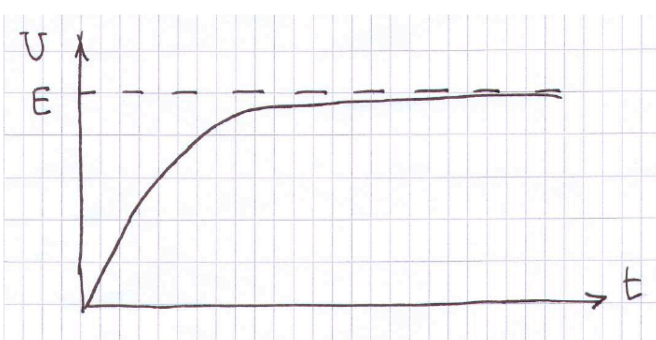
$$\int_0^{q(t)} dq=\frac{E}{R}\int_0^t e^{-\frac{t}{\tau}}dt=\frac{E}{R}(-\tau)\left(e^{-\frac{t}{\tau}}-e^0\right)=\frac{E}{R}RC\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Άρα,

$q(t)=EC\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, όπου $\tau=RC$.

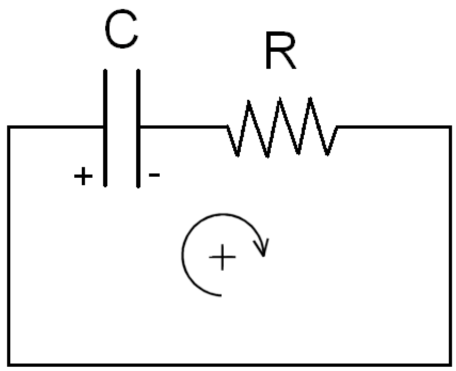
Η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι $U=q/C$. Άρα,

$U(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$, όπου $\tau=RC$.



Εκφόρτιση του πυκνωτή

Με τον διακόπτη στη θέση Β, το ισοδύναμο κύκλωμα είναι



Η αρχική συνθήκη είναι ότι για $t > 0$, η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι Ε και το φορτίο του είναι $q(0) = CE$.

Ο 2^{ος} κανόνας του Kirchhoff την χρονική στιγμή $t > 0$ δίνει

$\sum E = \sum IR \Rightarrow -\frac{q}{C} = IR \Rightarrow I = -\frac{q}{\tau}$, όπου $\tau = RC$.

Το πρόσημο (-) είναι λόγω της μείωσης του ρεύματος. Έχουμε

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{\tau} \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow \int_0^q \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{\tau} \Rightarrow \ln\frac{q(t)}{q(0)} = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow q(t) = q(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Άρα

$q(t) = CEe^{-\frac{t}{\tau}}$, όπου $\tau = RC$.

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι

$$U(t) = \frac{q(t)}{C} \Rightarrow U(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

Η ένταση του ρεύματος είναι

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} \Rightarrow I(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$