Χρήστος Δ. Ζαρολιάγκης
Αναπλ. Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής

Εισαγωγή στους Αλγορίθμους

Σημειώσεις για την Επίλυση Αναδρομικών Σχέσεων

Πάτρα, Νοέμβριος 2004

1 Εισαγωγή

Αναδρομικές σχέσεις εμφανίζονται πολύ συχνά κατά την ανάλυση της πολυπλοκότητας χρόνου ή χώρου των αλγορίθμων, ιδιαίτερα όταν ένας αλγόριθμος περιέχει μια αναδρομική κλήση στον εαυτό του. Σκοπός του παρόντος είναι η παρουσίαση πέντε μεθόδων επίλυσης αναδρομικών σχέσεων, δηλ. εύρεσης κλειστού τύπου για άνω ή κάτω όρια. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, εδώ θα ασχοληθούμε με την εύρεση άνω ορίων ("O"-όρια). Η εύρεση κάτω ορίων ("Ω"-όρια) επιτυγχάνεται με συμμετρικό τρόπο.

2 Μέθοδος Αντικατάστασης

Η *μέθοδος αντικατάστασης ή σωστής πρόβλεψης* συνίσταται στην πρόβλεψη της λύσης της αναδρομής, την οποία επαληθεύουμε (αποδεικνύουμε) στη συνέχεια με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Η μέθοδος αυτή δίνει πολύ καλά αποτελέσματα, αλλά προφανώς μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο στις περιπτώσεις που η πρόβλεψη είναι εύκολη.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να βρούμε ένα άνω όριο στην αναδρομή

$$T(n) = 2T(n/2) + n$$

και έστω ότι προβλέπουμε ότι $T(n) = O(n \log n)$. Εφαρμογή της μεθόδου σημαίνει να αποδείξουμε ότι $T(n) \leq cn \log n$ για κάποια σταθερά $c > 0$. Η απόδειξη θα γίνει με χρήση μαθηματικής επαγωγής στο n. Υποθέτουμε (επαγωγική υπόθεση) ότι η πρόβλεψή μας ισχύει για κάθε τιμή μικρότερη του n, άρα $T(n/2) \leq c(n/2)\log(n/2)$, και θα την αποδείξουμε για την τιμή n. Αντικαθιστώντας αυτή την τελευταία σχέση στην αναδρομή μας, παίρνουμε

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n \\ &\leq 2c(n/2)\log(n/2) + n \\ &= cn\log(n/2) + n \\ &= cn\log n - cn + n \\ &\leq cn\log n \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει για οποιαδήποτε $c \geq 1$. Η ακριβής σταθερά θα προσδιορισθεί από τις αρχικές συνθήκες τις οποίες η μαθηματική επαγωγή πρέπει να ικανοποιεί, δηλ. το c πρέπει να επιλεχθεί έτσι ώστε η ανισότητα $T(n) \leq cn \log n$ να ισχύει και για τις αρχικές συνθήκες (το βασικό βήμα της επαγωγής). Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα αν δεν είμαστε προσεκτικοί. Αν π.χ. επιλέξουμε ως αρχική συνθήκη $T(1) = 1$, τότε δεν υπάρχει c που να ικανοποιεί την $1 = T(1) \leq c1\log 1 = 0$.

Τέτοια προβλήματα μπορούμε να τα ξεπεράσουμε εύκολα, είτε με το να θέσουμε την τιμή της $T(1)$ ίση με μια κατάλληλη σταθερά που δεν εξαρτάται από τον κλειστό τύπο της $T(n)$, είτε με το να απομακρύνουμε την αρχική συνθήκη που δημιουργεί το πρόβλημα και να θεωρήσουμε άλλες μικρές τιμές του n, π.χ. $n = 2, 3$, που μας βολεύουν καλύτερα. Αυτό είναι και σύμφωνο με τον ασυμπτωτικό συμβολισμό, ο οποίος μας υπαγορεύει να αποδείξουμε ότι $T(n) \leq cn \log n$ για όλα τα $n \geq n_0$, όπου n_0 είναι μια σταθερά. Από την αναδρομή προκύπτει ότι $T(2) =$

$2T(1)+2=4$, και επομένως πρέπει να διαλέξουμε c τέτοια ώστε $4=T(2)\leq c2\log 2$. Άρα, οποιαδήποτε $c\geq 2$ είναι αρκετή για την περίπτωσή μας. Σε όλες τις αναδρομικές σχέσεις που θα εξετάσουμε, είναι σχεδόν προφανές το πως μπορούν να επεκταθούν οι αρχικές συνθήκες έτσι ώστε οι κλειστοί τύποι των αναδρομών να ισχύουν και για μικρές τιμές του n. Για το λόγο αυτό δεν θα ασχοληθούμε με αρχικές συνθήκες στη συνέχεια.

Υπάρχουν δύο ειδών δυσκολίες (που μπορεί να οδηγήσουν σε λάθη) στην εφαρμογή της μεθόδου της αντικατάστασης. Και οι δύο έχουν να κάνουν με τη χρήση του ασυμπτωτικού συμβολισμού.

Η πρώτη δυσκολία προέρχεται από την καθεαυτή λανθασμένη χρήση του ασυμπτωτικού συμβολισμού στην απόδειξη με επαγωγή. Στο παράδειγμα με την $T(n)=2T(n/2)+n$ μπορούμε λανθασμένα να αποδείξουμε ότι $T(n)=O(n)$, προβλέποντας ότι $T(n)\leq cn$ και γράφοντας

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2)+n \\ &\leq 2c(n/2)+n \\ &= cn+n \\ &= O(n) \quad \Leftarrow \text{ΛΑΘΟΣ!} \end{aligned}$$

επειδή c είναι μια σταθερά. Το λάθος εδώ έγκειται στο γεγονός ότι δεν αποδεικνύουμε τον ακριβή τύπο της αναδρομής.

Η δεύτερη δυσκολία έγκειται στο ότι ενώ προβλέπουμε σωστά το ασυμπτωτικό όριο, τα μαθηματικά δεν δουλεύουν ως προς τις σταθερές. Έστω για παράδειγμα η αναδρομή

$$T(n)=2T(n/2)+1$$

για την οποία προβλέπουμε ότι $T(n)=O(n)$, δηλ. θέλουμε να αποδείξουμε ότι $T(n)\leq cn$, για κάποια $c>0$. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο όπως και πριν και έχουμε

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2)+1 \\ &\leq 2c(n/2)+1 \\ &= cn+1 \;\; ??? \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι *δεν υπάρχει* σταθερά c για την οποία $T(n)\leq cn$.

Σε μια τέτοια περίπτωση, η πρώτη αντίδραση είναι να δοκιμάσουμε να φράξουμε την $T(n)$ με ένα πολυώνυμο μεγαλύτερης δύναμης, π.χ. $O(n\log n)$ ή $O(n^2)$. Αλλά στην πραγματικότητα η πρόβλεψή μας ότι $T(n)=O(n)$ είναι σωστή. Διαφέρει μόνο κατά τη σταθερά 1, δηλ. έναν όρο μικρότερης δύναμης ($1=n^0$). Το πρόβλημα δημιουργείται διότι χρειαζόμαστε μια ισχυρότερη επαγωγική υπόθεση. Σ'αυτές τις περιπτώσεις, μπορούμε συνήθως να ξεπεράσουμε ένα τέτοιο πρόβλημα με την *αφαίρεση* ενός όρου μικρότερης δύναμης από την προηγούμενη πρόβλεψή μας. Η νέα πρόβλεψη γίνεται τώρα $T(n)\leq cn-b$, όπου $b>0$ είναι μια άλλη σταθερά. Η νέα πρόβλεψη δίνει τώρα

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2)+1 \\ &\leq 2(c(n/2)-b)+1 \\ &= cn-2b+1 \\ &\leq cn-b \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει για οποιαδήποτε $b \geq 1$.

3 Μέθοδος Αλλαγής Μεταβλητών

Η μέθοδος αυτή συνίσταται στον μετασχηματισμό μιας αναδρομικής σχέσης σε μιαν άλλη απλούστερη μέσω αλλαγής των μεταβλητών. Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να επιλύσουμε την αναδρομή

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$$

η οποία, σε πρώτη ματιά, φαίνεται δύσκολη. Αν θέσουμε όμως $m = \log n$ (που συνεπάγεται ότι $n = 2^m$ και $\sqrt{n} = 2^{m/2}$), τότε παίρνουμε

$$T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m$$

και θέτοντας $S(m) = T(2^m)$ έχουμε την αναδρομή

$$S(m) = 2S(m/2) + m$$

την οποία γνωρίζουμε ήδη πως να επιλύσουμε: $S(m) = O(m \log m)$. Επομένως, $T(n) = T(2^m) = S(m) = O(m \log m) = O(\log n \log \log n)$.

4 Επαναληπτική Μέθοδος

Η *επαναληπτική μέθοδος* συνίσταται στην ανάλυση της αναδρομής με χρήση επαναλήψεων και έκφρασή της σαν άθροισμα όρων και αρχικών συνθηκών. Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να επιλύσουμε την αναδρομή

$$T(n) = 2T(n/2) + n^2$$

Αυτό που μας "εμποδίζει" να βρούμε κλειστό τύπο για την $T(n)$ είναι ο όρος $T(n/2)$. Τον όρο αυτό μπορούμε να τον αντικαταστήσουμε από την επανάληψη της αναδρομής για την τιμή $n/2$, δηλ. $T(n/2) = 2T(n/4) + (n/2)^2$. Τώρα, το πρόβλημα μετατίθεται στον όρο $T(n/4)$, τον οποίο μπορούμε να αντικαταστήσουμε συναρτήσει του όρου $T(n/8)$, κ.ο.κ. Με αυτό τον τρόπο δημιουργούμε μια ακολουθία εξισώσεων

$$\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n^2 \\
T(n/2) &= 2T(n/2^2) + (n/2)^2 \\
T(n/2^2) &= 2T(n/2^3) + (n/2^2)^2 \\
&\vdots \\
T(n/2^{k-1}) &= 2T(n/2^k) + (n/2^{k-1})^2
\end{aligned}$$

όπου η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι εκείνο το βήμα k για το οποίο $n/2^k = 1$, δηλ. $k = \log n$ (υποθέτουμε για ευκολία ότι το n είναι δύναμη του 2). Επίσης υποθέτουμε ότι η αρχική μας συνθήκη είναι $T(1) = c$, όπου c είναι μια σταθερά.

Στην παραπάνω ακολουθία των εξισώσεων παρατηρούμε ότι οι όροι της αναδρομής $T(\cdot)$, εκτός από τους $T(n)$ και $T(n/2^k)$, εμφανίζονται μία φορά στο δεξιό και μία φορά στο αριστερό μέλος των εξισώσεων. Επομένως, θα επιθυμούσαμε την απαλοιφή των όρων αυτών ώστε να μείνουν οι $T(n)$ και $T(n/2^k) = T(1)$ και οι υπόλοιποι όροι που εξαρτώνται μόνο από το n. Η απαλοιφή συνήθως επιτυγχάνεται παίρνοντας το άθροισμα ενός τέτοιου συνόλου εξισώσεων. Εδώ δεν μπορούμε απευθείας να το κάνουμε αυτό, γιατί παρατηρούμε ότι οι συντελεστές των όρων $T(\cdot)$ στα δεξιά μέλη των εξισώσεων δεν είναι ίδιοι με εκείνους των αντίστοιχων όρων στα αριστερά μέλη. Π.χ. ο όρος $T(n/2^2)$ στο δεξιό μέλος της δεύτερης εξίσωσης έχει συντελεστή 2, ενώ ο αντίστοιχος όρος στο αριστερό μέλος της τρίτης εξίσωσης έχει συντελεστή 1. Μπορούμε να διορθώσουμε αυτή την "ασυμμετρία" πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της τρίτης εξίσωσης με το συντελεστή 2.

Γενικά, εφαρμόζουμε τον ακόλουθο κανόνα: αν στο δεξιό μέλος μιας εξίσωσης εμφανίζεται κάποιος όρος $T(m)$ με συντελεστή d, πολλαπλασιάζουμε με d και τα δύο μέλη της επόμενης εξίσωσης στην οποία ο $T(m)$ εμφανίζεται στο αριστερό μέλος. Η εφαρμογή του κανόνα αυτού στο παράδειγμα μας δίνει:

$$\begin{array}{rcl} T(n) & = & 2T(n/2) + n^2 \\ 2T(n/2) & = & 2^2T(n/2^2) + 2(n/2)^2 \\ 2^2T(n/2^2) & = & 2^3T(n/2^3) + 2^2(n/2^2)^2 \\ & \vdots & \\ 2^{k-1}T(n/2^{k-1}) & = & 2^kT(n/2^k) + 2^{k-1}(n/2^{k-1})^2 \end{array}$$

Αθροίζοντας τώρα τις παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε

$$\begin{array}{rcl} T(n) & = & 2^kT(n/2^k) + (n^2 + n^2/2 + n^2/2^2 + \cdots + n^2/2^{k-1}) \\ & = & nT(1) + n^2 \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ & \leq & cn + n^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ & = & cn + n^2 \cdot \frac{1}{1-1/2} \\ & = & cn + 2n^2 \\ & = & O(n^2) \end{array}$$

Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα εφαρμογής της επαναληπτικής μεθόδου στην αναδρομή

$$T(n) = 3T(n/4) + n$$

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω και έχουμε

$$\begin{array}{rcl} T(n) & = & 3T(n/4) + n \\ 3T(n/4) & = & 3^2T(n/4^2) + 3n/4 \\ 3^2T(n/4^2) & = & 3^3T(n/4^3) + 3^2n/4^2 \\ & \vdots & \\ 3^{k-1}T(n/3^{k-1}) & = & 3^kT(n/4^k) + 3^{k-1}n/4^{k-1} \end{array}$$

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι εκείνο το βήμα k για το οποίο $n/4^k = 1$, δηλ. $k = \log_4 n$. Όπως και πριν, υποθέτουμε ότι η αρχική μας συνθήκη είναι $T(1) = c$, όπου c είναι μια σταθερά. Αθροίζοντας τις παραπάνω εξισώσεις, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3^k T(n/4^k) + (n + 3n/4 + 3^2 n/4^2 + \cdots + 3^{k-1} n/4^{k-1}) \\
&= 3^{\log_4 n} T(1) + n \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \\
&\leq cn^{\log_4 3} + n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i \\
&\leq cn^{0.8} + n \cdot \frac{1}{1 - 3/4} \\
&= cn^{0.8} + 4n \\
&= O(n)
\end{aligned}$$

5 Μέθοδος Δένδρου Αναδρομών

Η *μέθοδος του δένδρου αναδρομών* συνίσταται στην ανάλυση της αναδρομής σε δενδρική μορφή, η οποία μας επιτρέπει να κάνουμε μια καλή πρόβλεψη για τη λύση της αναδρομής. Η ορθότητα της πρόβλεψής μας μπορεί να επαληθευθεί με την μέθοδο της αντικατάστασης. Σε ένα *δένδρο αναδρομών* κάθε κορυφή αντιπροσωπεύει το κόστος ενός υποπροβλήματος που ανήκει στο σύνολο των αναδρομικών κλήσεων της συνάρτησης της αναδρομής. Για να βρούμε την επιθυμητή πρόβλεψη, αθροίζουμε πρώτα τα κόστη των κορυφών που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και στη συνέχεια αθροίζουμε τα κόστη όλων των επιπέδων.

Στη γενική περίπτωση, έχουμε μια αναδρομή της μορφής

$$T(n) = T(n_1) + T(n_2) + \cdots + T(n_k) + f(n)$$

όπου n_i, $1 \leq i \leq k$, είναι το μέγεθος του υποπροβλήματος που θα επιλυθεί αναδρομικά και $k \geq 1$ είναι ο αριθμός αυτών των υποπροβλημάτων. Το δένδρο αναδρομών σχηματίζεται σταδιακά. Στην αρχή υπάρχει μόνο μία κορυφή (ρίζα) που αντιπροσωπεύει την $T(n)$, δηλ. το αριστερό μέλος της αναδρομής. Στο επόμενο βήμα, η κορυφή αυτή "αντικαθίσταται" από ένα ισοδύναμο δένδρο το οποίο αντιπροσωπεύει το δεξιό μέλος της αναδρομής. Το δένδρο αυτό έχει ρίζα την $f(n)$ και παιδιά τις αναδρομικές κλήσεις $T(n_1), T(n_2), \ldots, T(n_k)$. Στη συνέχεια, το ίδιο βήμα επαναλαμβάνεται για κάθε μία κορυφή που αντιπροσωπεύει μια αναδρομική κλήση. Δηλαδή, η κορυφή που αντιπροσωπεύει τον όρο $T(n_i)$ "αντικαθίσταται" με ένα δένδρο που αντιπροσωπεύει το δεξιό μέλος της αναδρομής στην οποία αναλύεται η $T(n_i)$, και το οποίο αποτελεί ένα υποδένδρο του τελικού δένδρου αναδρομών. Έστω ότι $T(n_i) = T(n_i^1) + T(n_i^2) + \cdots + T(n_i^j) + f(n_i)$, για κάποιο $j \geq 1$. Τότε το (υπο)δένδρο που "αντικαθιστά" τον όρο $T(n_i)$ έχει ρίζα τον όρο $f(n_i)$ και παιδιά τις αναδρομικές κλήσεις $T(n_i^1), T(n_i^2), \ldots, T(n_i^j)$. Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου όλες οι κορυφές αντιπροσωπεύουν είτε κάποιο γνωστό κόστος της συνάρτησης $f(\cdot)$, είτε κάποια αναδρομική κλήση σε κάποιο υποπρόβλημα πολύ μικρού μεγέθους (π.χ. $n = 1$) για το οποίο γνωρίζουμε το κόστος επίλυσης του. Η κατασκευή του δένδρου αναδρομών θα γίνει περισσότερο κατανοητή με τη βοήθεια κάποιων παραδειγμάτων.

Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να επιλύσουμε την αναδρομή

$$T(n) = 3T(n/4) + n$$

Στο Σχήμα 1 φαίνονται τα πρώτα τέσσερα στάδια ανάπτυξης του δένδρου αναδρομών για την παραπάνω αναδρομή. Το Σχήμα 1(α) δείχνει την $T(n)$, η οποία αναλύεται στο Σχήμα 1(β) σε ένα ισοδύναμο δένδρο που αντιπροσωπεύει την αναδρομή. Ο όρος n στην ρίζα του δένδρου αντιπροσωπεύει το κόστος στο πρώτο επίπεδο της αναδρομής (επίπεδο 0), ενώ τα τρία παιδιά του αντιπροσωπεύουν το κόστος των υποπροβλημάτων μεγέθους $n/4$. Οι τρεις αυτές κορυφές είναι ουσιαστικά ρίζες των υποδένδρων που σχετίζονται με τα τρία υποπροβλήματα και μπορούν να αναλυθούν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Η ανάλυσή τους μας δίνει το δένδρο του Σχήματος 1(γ). Τέλος, το Σχήμα 1(δ) αντιπροσωπεύει το πλήρες δένδρο αναδρομών για την συγκεκριμένη αναδρομή μαζί με τα κόστη επιπέδων και το συνολικό κόστος.

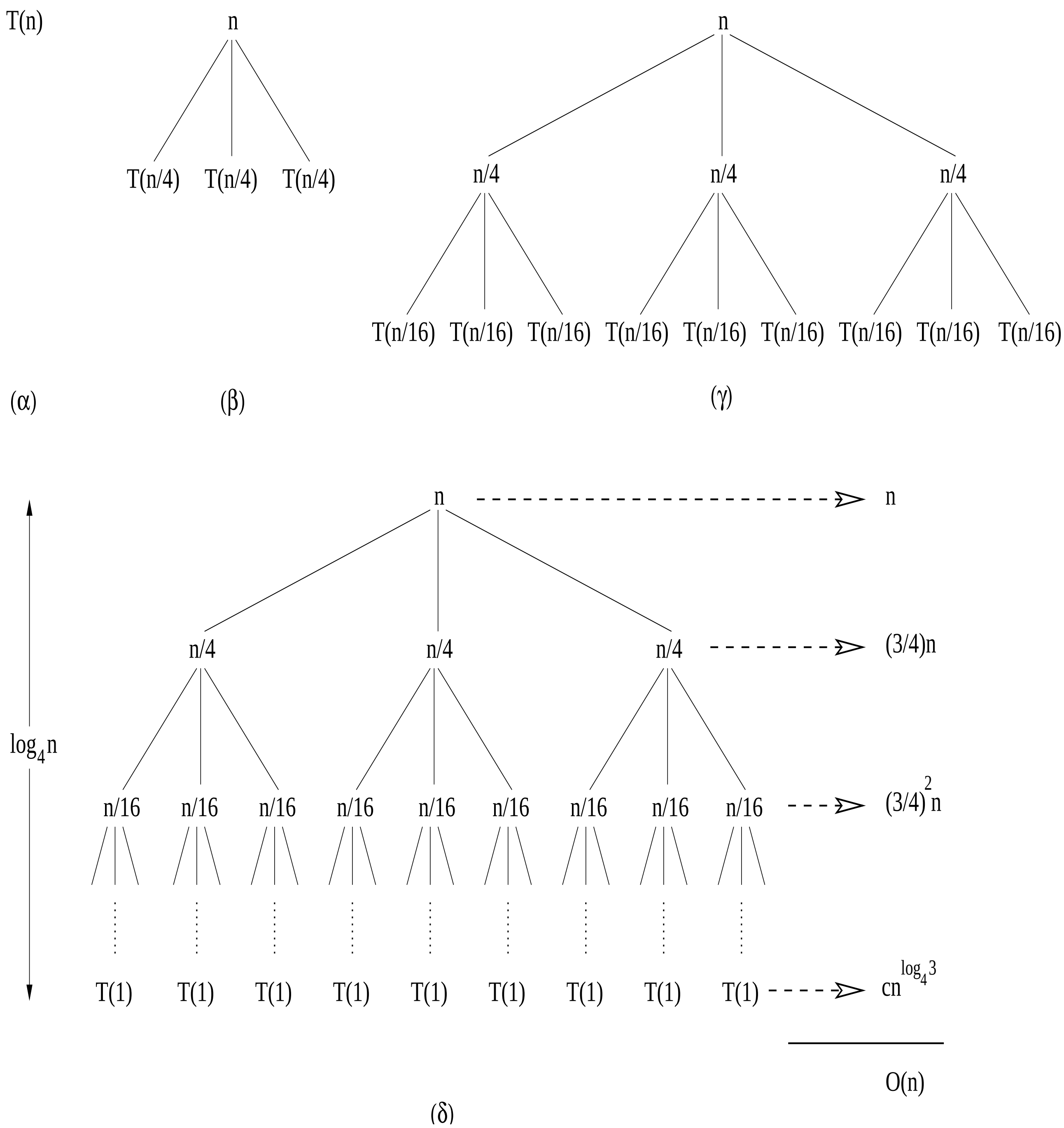
Τα φύλλα (κορυφές τελευταίου επιπέδου) αντιπροσωπεύουν την αρχική συνθήκη, δηλ. τη γνώση της λύσης για κάποια σταθερή τιμή του μεγέθους του υποπροβλήματος (συνήθως για $n = 1$) και στο οποίο μέγεθος θα φτάσουμε κάποια στιγμή, αφού η ανάπτυξη της αναδρομής οδηγεί σε συνεχώς μικρότερα υποπροβλήματα. Ποιο είναι όμως το βάθος της ανάπτυξης της αναδρομής, δηλ. το βάθος του δένδρου; Από το Σχήμα 1, είναι εύκολο να δούμε ότι το μέγεθος του υποπροβλήματος στο επίπεδο i είναι $n/4^i$. Επομένως το μέγεθος του υποπροβλήματος γίνεται 1 όταν $n/4^i = 1$, δηλ. όταν $i = \log_4 n$ (συγκρίνετε την ομοιότητα με αυτό που βρήκαμε στην Παράγραφο 4).

Για να υπολογίσουμε το κόστος σε κάθε επίπεδο του δένδρου, παρατηρούμε ότι κάθε επίπεδο έχει 3 φορές περισσότερες κορυφές από το προηγούμενό του. Επομένως, ο αριθμός των κορυφών στο επίπεδο i είναι 3^i (θυμηθείτε ότι για την ρίζα $i = 0$). Αφού κάθε κορυφή στο επίπεδο i έχει κόστος $n/4^i$, το συνολικό κόστος του επιπέδου i είναι $(3/4)^i n$. Το τελευταίο επίπεδο έχει $3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$ κορυφές, κάθε μία από τις οποίες έχει κόστος $T(1) = O(1)$. Άρα, το συνολικό κόστος όλων των επιπέδων είναι:

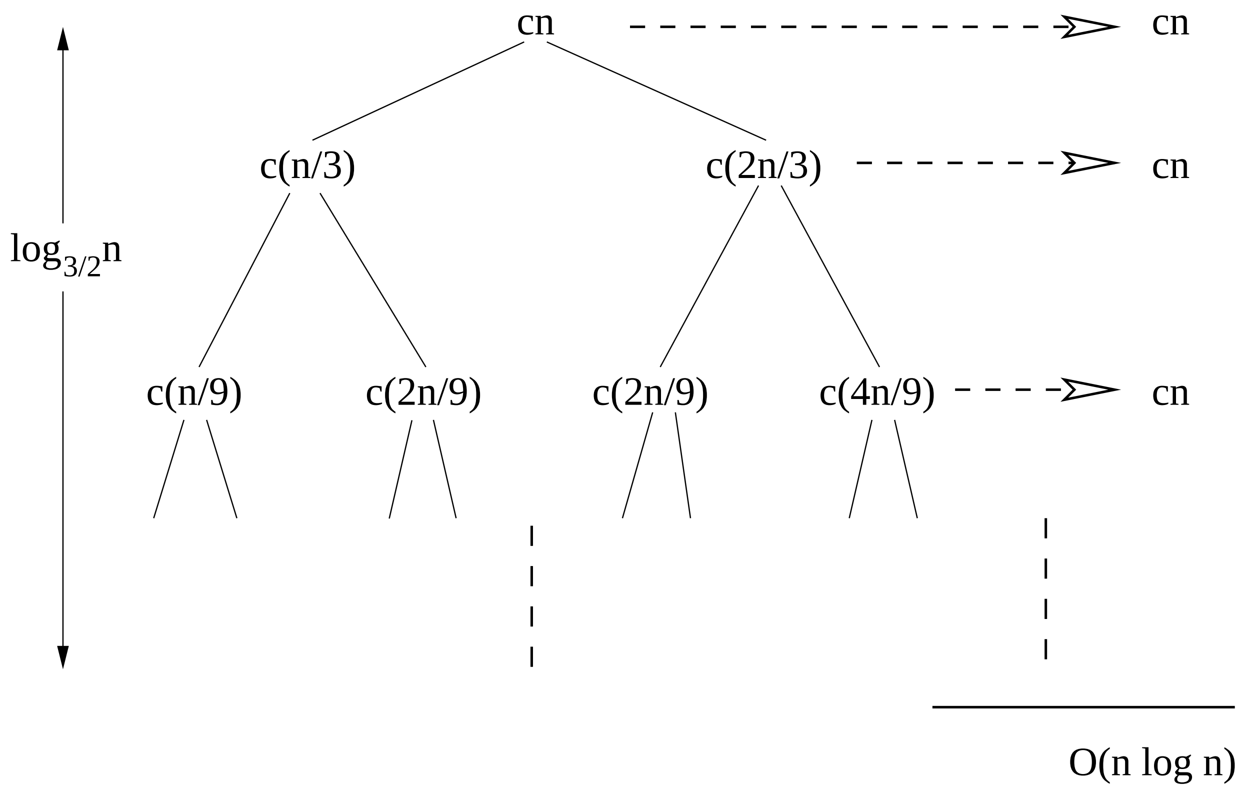
$$\begin{aligned}
T(n) &= O(n^{\log_4 3}) + \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{4}\right)^i n \\
&\leq O(n^{\log_4 3}) + n \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i \\
&\leq O(n^{0.8}) + n \cdot \frac{1}{1 - 3/4} \\
&= O(n^{0.8}) + 4n \\
&= O(n)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της αντικατάστασης, μπορούμε να επαληθεύσουμε αν η παραπάνω πρόβλεψη είναι πραγματικά σωστή. Θέλουμε να δείξουμε ότι $T(n) \leq dn$, για κάποια σταθερά $d > 0$. Έχουμε λοιπόν:

$$T(n) \;=\; 3T(n/4) + n$$



Σχήμα 1: Δένδρο αναδρομών της σχέσης $T(n) = 3T(n/4) + n$.



Σχήμα 2: Δένδρο αναδρομών της σχέσης $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + cn$.

$$
\begin{aligned}
&\leq 3d(n/4) + n \qquad \text{(επαγωγική υπόθεση)}\\
&= n(1 + 3d/4)\\
&\leq dn
\end{aligned}
$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν $1 + 3d/4 \leq d$, δηλ. αν και μόνο αν $d \geq 4$.

Ας δούμε τώρα ένα διαφορετικό παράδειγμα, το οποίο τονίζει ιδιαίτερα τη χρησιμότητα της μεθόδου. Έστω ότι θέλουμε να επιλύσουμε την αναδρομή

$$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + cn$$

όπου c είναι μια σταθερά. Η ανάπτυξη του δένδρου αναδρομών της παραπάνω αναδρομικής σχέσης φαίνεται στο Σχήμα 2.

Το κόστος κάθε επιπέδου είναι cn. Παρατηρείστε ότι κάθε υποπρόβλημα αναλύεται σε δύο υποπροβλήματα διαφορετικού μεγέθους. Επομένως, το βάθος του δένδρου θα προσδιοριστεί από τον αριθμό των μειώσεων στο μέγεθος του μεγαλύτερου υποπροβλήματος κάθε φορά. Το μεγαλύτερο υποπρόβλημα στο επίπεδο i έχει μέγεθος $(2/3)^i n$ και θα γίνει ίσο με 1 όταν $i = \log_{3/2} n$. Διαισθητικά λοιπόν περιμένουμε ότι η λύση της αναδρομής θα είναι της μορφής $O(cn \log_{3/2} n) = O(n \log n)$.

Υπάρχει ένα σημείο εδώ που χρειάζεται προσοχή και αφορά το κόστος των φύλλων. Ο μέγιστος αριθμός φύλλων (στην περίπτωση δηλαδή που είχαμε ένα πλήρες δυαδικό δένδρο βάθους $\log_{3/2} n$) είναι $2^{\log_{3/2} n} = n^{\log_{3/2} 2}$. Αφού κάθε φύλλο έχει σταθερό κόστος, το συνολικό κόστος των φύλλων θα ήταν $\Theta(n^{\log_{3/2} 2}) = \Theta(n^{1.71}) = \omega(n \log n)$. Λόγω της ασυμμετρίας όμως του μεγέθους των υποπροβλημάτων στην ανάπτυξη της αναδρομής, το δένδρο αναδρομών δεν είναι ένα πλήρες δυαδικό δένδρο και έτσι έχει λιγότερα από $n^{\log_{3/2} 2}$ φύλλα. Επιπλέον, όσο προχωράμε από τη ρίζα προς τα φύλλα, τόσο και περισσότερες κορυφές απουσιάζουν, με αποτέλεσμα το κόστος κάθε επιπέδου να είναι μικρότερο από cn. Επειδή η εύρεση της ακριβούς τιμής του κόστους κάθε επιπέδου μπορεί να μην είναι εύκολη και επειδή κυρίως ενδιαφερόμαστε για μια (χοντρική) πρόβλεψη της λύσης, ας παραμείνουμε στην αρχική μας πρόβλεψη ($O(n \log n)$) και ας προσπαθήσουμε να επαληθεύσουμε ότι είναι σωστή.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $T(n) \leq an \log n$, για κάποια σταθερά $a > 0$. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n/3) + T(2n/3) + cn \\
&\leq a(n/3)\log(n/3) + a(2n/3)\log(2n/3) + cn \quad \text{(επαγωγική υπόθεση)} \\
&= a(n/3)(\log n - \log 3) + a(2n/3)(\log n - \log(3/2)) + cn \\
&= an\log n - a[(n/3)\log 3 + (2n/3)\log(3/2)] + cn \\
&= an\log n - a[(n/3)\log 3 + (2n/3)\log 3 - (2n/3)\log 2] + cn \\
&= an\log n - an(\log 3 - 2/3) + cn \\
&\leq an\log n
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν $a(\log 3 - 2/3) \geq c$, δηλ. αν και μόνο αν $a \geq c/(\log 3 - 2/3)$.

6 Γενική Μέθοδος Επίλυσης Αναδρομικών Σχέσεων

Η *γενική μέθοδος* συνίσταται στην παρουσίαση δύο γενικών θεωρημάτων επίλυσης αναδρομικών σχέσεων τα οποία καλύπτουν την πλειοψηφία των περιπτώσεων και παρέχουν *έτοιμη λύση* των αναδρομών της μορφής $T(n) = aT(n/b) + g(n)$.

Θεώρημα 1 *Έστω $a, b \in \mathbb{R}^+$, $b > 1$, $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ μια συνάρτηση, και*

$$T(x) = \begin{cases} g(1) & \text{αν } x = 1 \\ aT(x/b) + g(x) & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Τότε,

$$T(n) = \sum_{i=0}^{k} a^i g(n/b^i)$$

για $n = b^k$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή στο n. Για τη βάση $n = 1 = b^0$, το θεώρημα ισχύει, αφού $T(n) = g(1) = \sum_{i=0}^{0} a^i g(n/b^i)$. Έστω ότι το θεώρημα ισχύει για οποιαδήποτε τιμή μικρότερη του n (επαγωγική υπόθεση) και άρα για την τιμή $n/b = b^{k-1}$ ισχύει ότι

$$T(n/b) = \sum_{i=0}^{k-1} a^i g\left(\frac{n/b}{b^i}\right)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
T(n) &= aT(n/b) + g(n) \\
&= a\sum_{i=0}^{k-1} a^i g\left(\frac{n/b}{b^i}\right) + g(n) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} a^{i+1} g\left(\frac{n}{b^{i+1}}\right) + g(n) \\
&= \sum_{i=1}^{k} a^i g\left(\frac{n}{b^i}\right) + a^0 g(n/b^0) \\
&= \sum_{i=0}^{k} a^i g\left(\frac{n}{b^i}\right)
\end{aligned}$$

∎

Θεώρημα 2 (Βασικό Θεώρημα) *Έστω* $a, b \in I\!R^+$, $b > 1$, $\gamma, \delta \in I\!R_0^+$, $g : I\!R^+ \to I\!R^+$, *με* $g(x) = O(x^\gamma \log_b^\delta x)$, *και*

$$T(x) = \begin{cases} g(1) & \text{αν } x = 1 \\ aT(x/b) + g(x) & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Τότε,

$$T(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a} \log_b^\delta n) & \text{αν } a > b^\gamma \\ O(n^\gamma \log_b^{\delta+1} n) & \text{αν } a = b^\gamma \\ O(n^\gamma \log_b^\delta n) & \text{αν } a < b^\gamma\text{, και } \gamma > 0 \text{ ή } \delta \geq 1 \\ O(\log_b n) & \text{αν } a < 1\text{, και } \gamma = 0 \text{ και } \delta < 1 \end{cases}$$

για $n = b^k$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
T(n) &= \sum_{i=0}^{k} a^i g\left(\frac{n}{b^i}\right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{k} c\left(1 + a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^\gamma \log_b^\delta\left(\frac{n}{b^i}\right)\right) \quad [\text{όπου } c \in I\!R \text{ μια κατάλληλα επιλεγμένη σταθερά}] \\
&= c\left(k + 1 + \sum_{i=0}^{k} a^i \left(\frac{n}{b^i}\right)^\gamma \log_b^\delta\left(\frac{n}{b^i}\right)\right) \\
&= c\left(k + 1 + n^\gamma \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{a^i}{b^{i\gamma}}\right) \log_b^\delta\left(\frac{n}{b^i}\right)\right) \\
&\leq c\left(k + 1 + n^\gamma \log_b^\delta n \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{a}{b^\gamma}\right)^i\right)
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $\log_b(n/b^i) \leq \log_b n$, $\forall i$, αφού $(n/b^i) \leq n$.

Τώρα, για να βρούμε κλειστό τύπο για την $T(n)$ αρκεί να βρούμε το όριο του παραπάνω αθροίσματος. Αυτό μπορεί να γίνει με τη διάκριση περιπτώσεων ανάλογα με την τιμή του a/b^γ. Παρατηρήστε επίσης ότι αφού $b^k = n$, έχουμε ότι $k = \log_b n$, $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$, και $b^{\gamma k} = n^\gamma$.

(i) $a > b^\gamma$**:**
$$\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{a}{b^\gamma}\right)^i = \frac{(a/b^\gamma)^{k+1} - 1}{(a/b^\gamma) - 1} = O\left((a/b^\gamma)^k\right) = O\left(\frac{n^{\log_b a}}{n^\gamma}\right)$$
και επομένως,
$$T(n) \leq c\left(k + 1 + (n^\gamma \log_b^\delta n) O\left(\frac{n^{\log_b a}}{n^\gamma}\right)\right) = O(n^{\log_b a} \log_b^\delta n)$$

(ii) $a = b^\gamma$**:**
$$\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{a}{b^\gamma}\right)^i = k + 1$$
από το οποίο συνεπάγεται ότι
$$T(n) \leq c\left(k + 1 + (n^\gamma \log_b^\delta n)(k+1)\right) = O(n^\gamma \log_b^\delta n \log_b n) = O(n^\gamma \log_b^\delta n)$$

(iii) $a < b^\gamma$**:**
$$\sum_{i=0}^{k} \left(\frac{a}{b^\gamma}\right)^i \leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b^\gamma}\right)^i = \frac{1}{1 - (a/b^\gamma)} = O(1)$$
και άρα
$$T(n) \leq c(k + 1 + (n^\gamma \log_b^\delta n) O(1)) = O(k + n^\gamma \log_b^\delta n)$$

Επομένως, αν $\gamma > 0$ ή $\delta \geq 1 \Rightarrow T(n) = O(n^\gamma \log_b^\delta n)$. Αλλιώς ($\gamma = 0$ και $\delta < 1$), έχουμε ότι $T(n) = O(k) = O(\log_b n)$. ∎

7 Παραδείγματα Εφαρμογής του Βασικού Θεωρήματος

Ας εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2 στα προηγούμενα και σε κάποια επιπλέον παραδείγματα.

1. $T(n) = 2T(n/2) + n$.
   Έχουμε ότι $a = b = 2$, $g(n) = n = n^1 \log_2^0 n \Rightarrow \gamma = 1, \delta = 0$. Επίσης $a/b^\gamma = 2/2^1 = 1$, άρα είμαστε στη δεύτερη περίπτωση και επομένως $T(n) = O(n^1 \log_2^{0+1} n) = O(n \log n)$.

2. $T(n) = 2T(n/2) + 1$.
   Έχουμε ότι $a = b = 2$, $g(n) = 1 = n^0 \log_2^0 n \Rightarrow \gamma = 0, \delta = 0$. Επίσης $a/b^\gamma = 2/2^0 = 2 > 1$, άρα είμαστε στην πρώτη περίπτωση και επομένως $T(n) = O(n^{\log_2 2} \log_2^0 n) = O(n)$.

3. $T(n) = 2T(n/2) + n^2$.
Έχουμε ότι $a = b = 2$, $g(n) = n^2 = n^2 \log_2^0 n \Rightarrow \gamma = 2, \delta = 0$. Επίσης $a/b^\gamma = 2/2^2 = 1/2 < 1$, άρα είμαστε στην τρίτη περίπτωση και επομένως $T(n) = O(n^2 \log_2^0 n) = O(n^2)$.

4. $T(n) = 3T(n/4) + n$.
Έχουμε ότι $a = 3, b = 4$, $g(n) = n = n^1 \log_4^0 n \Rightarrow \gamma = 1, \delta = 0$. Επίσης $a/b^\gamma = 3/4^1 < 1$, άρα είμαστε στην τρίτη περίπτωση και επομένως $T(n) = O(n^1 \log_4^0 n) = O(n)$.

5. $T(n) = T(2n/3) + 1$.
Έχουμε ότι $a = 1, b = 3/2$, $g(n) = 1 = n^0 \log_{3/2}^0 n \Rightarrow \gamma = 0, \delta = 0$. Επίσης $a/b^\gamma = 1/(3/2)^0 = 1$, άρα είμαστε στη δεύτερη περίπτωση και επομένως $T(n) = O(n^0 \log_{3/2}^{0+1} n) = O(\log n)$.

6. $T(n) = \frac{1}{2}T(4n/5) + \sqrt{\log n}$.
Έχουμε ότι $a = 1/2 < 1, b = 5/4$, $g(n) = \sqrt{\log n} = n^0 \log_2^{1/2} n = O(n^0 \log_{5/4}^{1/2} n) \Rightarrow \gamma = 0, \delta = 1/2$, άρα είμαστε στην τέταρτη περίπτωση και επομένως $T(n) = O(\log_{5/4} n) = O(\log n)$.

7. $T(n) = 4T(n/16) + \sqrt{n}$.
Έχουμε ότι $a = 4, b = 16$, $g(n) = \sqrt{n} = n^{1/2} \log_{16}^0 n \Rightarrow \gamma = 1/2, \delta = 0$. Επίσης $a/b^\gamma = 4/16^{1/2} = 1$, άρα είμαστε στη δεύτερη περίπτωση και επομένως $T(n) = O(n^{1/2} \log_{16}^{0+1} n) = O(\sqrt{n} \log n)$.

8. $T(n) = 16T(n/8) + n^{2/3}$.
Έχουμε ότι $a = 16, b = 8$, $g(n) = n^{2/3} = n^{2/3} \log_8^0 n \Rightarrow \gamma = 2/3, \delta = 0$. Επίσης $a/b^\gamma = 16/8^{2/3} > 1$, άρα είμαστε στην πρώτη περίπτωση και επομένως $T(n) = O(n^{\log_8 16} \log_8^0 n) = O(n^{\log 16/\log 8}) = O(n^{4/3})$.

8 Άλλα Παραδείγματα

Υπάρχουν περιπτώσεις για τις οποίες δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε απευθείας το Θεώρημα 2, επειδή η αναδρομική σχέση δεν έχει την επιθυμητή μορφή. Μπορούμε όμως να μετασχηματίσουμε την αναδρομή σε μια ισοδύναμη (συνήθως με την μέθοδο αλλαγής μεταβλητών), η οποία να είναι στην μορφή που απαιτεί το Θεώρημα 2.

1. $T(n) = \frac{4}{3}T(n^{3/4}) + \log n$.
Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο αλλαγής μεταβλητών για να φέρουμε την αναδρομή αυτή στην μορφή που θέλουμε. Θέτουμε $n = 2^m$, άρα $n^{3/4} = 2^{3m/4}$ και $\log n = m$. Η παραπάνω αναδρομή μετασχηματίζεται στην ισοδύναμη αναδρομική σχέση $T(2^m) = \frac{4}{3}T(2^{3m/4}) + m$. Θέτοντας $S(m) = T(2^n)$, έχουμε ότι $S(m) = \frac{4}{3}S(3m/4) + m$. Η τελευταία αυτή σχέση είναι στη μορφή που απαιτεί το Θεώρημα 2. Έχουμε ότι $a = 4/3, b = 4/3$, $g(m) = m = m^1 \log_{4/3}^0 m \Rightarrow \gamma = 1, \delta = 0$. Επίσης $a/b^\gamma = 1$, άρα είμαστε στη δεύτερη περίπτωση και έχουμε ότι $S(m) = O(m^1 \log_{4/3}^{0+1} m) = O(m \log m)$. Επομένως, $T(n) = T(2^m) = S(m) = O(m \log m) = O(\log n \log \log n)$.

2. $T(n^2) = 3T(n^2/3) + n$.
   Θα εργαστούμε όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα. Θέτουμε $n^2 = m$, άρα $n = \sqrt{m}$, και παίρνουμε την ισοδύναμη σχέση $T(m) = 3T(m/3) + \sqrt{m}$. Η τελευταία αυτή σχέση είναι στη μορφή που απαιτεί το Θεώρημα 2. Έχουμε ότι $a = 3, b = 3$, $g(m) = \sqrt{m} = m^{1/2}\log_3^0 m \Rightarrow \gamma = 1/2, \delta = 0$. Επίσης $a/b^\gamma = 3/3^{1/2} > 1$, άρα είμαστε στην πρώτη περίπτωση και έχουμε ότι $T(m) = O(m^{\log_3 3}\log_3^0 m) = O(m)$. Επομένως, $T(n^2) = T(m) = O(m) = O(n^2)$.

3. $T(\sqrt{n}) = 2T(\frac{\sqrt{n}}{2}) + n$.
   Θέτουμε $n = m^2$, άρα $\sqrt{n} = m$, και παίρνουμε την ισοδύναμη σχέση $T(m) = 2T(m/2) + m^2$, η οποία είναι στην μορφή που απαιτεί το Θεώρημα 2. Έχουμε ότι $a = 2, b = 2$, $g(m) = m^2 = m^2\log^0 m \Rightarrow \gamma = 2, \delta = 0$. Επίσης $a/b^\gamma = 2/2^2 < 1$, άρα είμαστε στην τρίτη περίπτωση και έχουμε ότι $T(m) = O(m^2\log^0 m) = O(m^2)$. Επομένως, $T(\sqrt{n}) = T(m) = O(m^2) = O(n)$.