Λυμένες ασκήσεις

Λυμένη άσκηση 1

Πάρτε την ακόλουθη λίστα συναρτήσεων και διευθετήστε τις κατά αύξουσα σειρά του ρυθμού αύξησης. Με άλλα λόγια, αν η συνάρτηση $g(n)$ ακολουθεί αμέσως τη συνάρτηση $f(n)$ στη λίστα σας, τότε θα πρέπει να ισχύει ότι η $f(n)$ είναι $O(g(n))$.

$$f_1(n) = 10^n$$
$$f_2(n) = n^{1/3}$$
$$f_3(n) = n^n$$
$$f_4(n) = \log_2 n$$
$$f_5(n) = 2^{\sqrt{\log_2 n}}$$

Λύση Μπορούμε να χειριστούμε πολύ εύκολα τις συναρτήσεις f_1, f_2, και f_4, αφού ανήκουν στις βασικές οικογένειες των εκθετικών, πολυωνυμικών, και λογαριθμικών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, από την (2.8) έχουμε ότι $f_4(n) = O(f_2(n))$· και από την (2.9) έχουμε ότι $f_2(n) = O(f_1(n))$.

Και τη συνάρτηση f_3 δεν είναι τόσο δύσκολο να τη χειριστούμε. Ξεκινά μικρότερη από 10^n, αλλά όταν $n \geq 10$ τότε σαφώς $10^n \leq n^n$. Αυτό ακριβώς είναι που χρειαζόμαστε για τον ορισμό του συμβολισμού $O(\cdot)$: για όλα τα $n \geq 10$ έχουμε $10^n \leq cn^n$, όπου σε αυτή την περίπτωση $c = 1$, οπότε $10^n = O(n^n)$.

Τέλος, ερχόμαστε στη συνάρτηση f_5, που πρέπει να παραδεχθούμε ότι φαίνεται κάπως περίεργη. Ένας χρήσιμος πρακτικός κανόνας σε τέτοιες περιστάσεις είναι να δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε λογαρίθμους για να δούμε αν αυτό κάνει τα πράγματα πιο σαφή. Σε αυτή την περίπτωση $\log_2 f_5(n) = \sqrt{\log_2 n} = (\log_2 n)^{1/2}$. Με τι μοιάζουν οι λογάριθμοι των άλλων συναρτήσεων; $\log_2 f_4(n) = \log_2 \log_2 n$, ενώ $\log f_2(n) = (1/3) \log_2 n$. Όλοι αυτοί οι λογάριθμοι μπορούν να θεωρηθούν συναρτήσεις του $\log_2 n$, οπότε χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $z = \log_2 n$ μπορούμε να γράψουμε

$$\log f_2(n) = (1/3)z$$
$$\log f_4(n) = \log_2 z$$
$$\log f_5(n) = z^{1/2}.$$

Τώρα είναι πιο εύκολο να δούμε τι συμβαίνει. Πρώτον, για $z \geq 16$ έχουμε $\log_2 z \leq z^{1/2}$. Όμως η συνθήκη $z \geq 16$ είναι ίδια με την $n \geq 2^{16} = 65536$· έτσι, όταν $n \geq 2^{16}$ έχουμε ότι $\log f_4(n) \leq \log f_5(n)$, οπότε $f_4(n) \leq f_5(n)$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε $f_4(n) = O(f_5(n))$. Παρομοίως έχουμε $z^{1/2} \leq (1/3)z$ όταν $z \geq 9$ — με άλλα λόγια, όταν $n \geq 2^9 = 512$. Για n μεγαλύτερο από αυτό το όριο έχουμε $\log f_5(n) \leq \log f_2(n)$ και επομένως $f_5(n) \leq f_2(n)$, οπότε μπορούμε να γράψουμε $f_5(n) = O(f_2(n))$. Ουσιαστικά, έχουμε ανακαλύψει ότι η παράσταση $2^{\sqrt{\log_2 n}}$ είναι μία συνάρτηση της οποίας ο ρυθμός αύξησης βρίσκεται κάπου μεταξύ των λογαρίθμων και των πολυωνύμων.

Αφού παρεμβάλαμε την f_5 μεταξύ των f_4 και f_2, αυτό ολοκληρώνει την εργασία της τοποθέτησης των συναρτήσεων στη σειρά.

Λυμένη άσκηση 2

Έστω f και g δύο συναρτήσεις που δέχονται μη αρνητικές τιμές, και υποθέστε ότι $f = O(g)$. Δείξτε ότι $g = \Omega(f)$.

Λύση Αυτή η άσκηση είναι ένας τρόπος για να διατυπώσουμε με τυπικό τρόπο τη διαισθητική αντίληψη ότι οι $O(\cdot)$ και $\Omega(\cdot)$ είναι ουσιαστικά αντίθετες. Πράγματι, δεν είναι δύσκολο να το αποδείξουμε· αρκεί να ξεδιπλώσουμε τους ορισμούς.

Μας δίνεται ότι, για κάποιες σταθερές c και n_0, έχουμε $f(n) \leq cg(n)$ για όλα τα $n \geq n_0$. Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με το c, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $g(n) \geq (1/c) f(n)$ για όλα τα $n \geq n_0$. Όμως ακριβώς αυτό απαιτείται για να δείξουμε ότι $g = \Omega(f)$: έχουμε δείξει ότι η $g(n)$ είναι τουλάχιστον ένα σταθερό πολλαπλάσιο της $f(n)$ (όπου η σταθερά είναι $1/c$), για όλα τα αρκετά μεγάλα n (τουλάχιστον ίσα με n_0).