

Λυμένες ασκήσεις

Λυμένη άσκηση 1

Θεωρήστε μια πόλη με n άνδρες και n γυναίκες που θέλουν να παντρευτούν μεταξύ τους. Κάθε άνδρας έχει μια λίστα προτιμήσεων που κατατάσσει όλες τις γυναίκες, και κάθε γυναίκα έχει μια λίστα προτιμήσεων που κατατάσσει όλους τους άνδρες. Το σύνολο όλων των $2n$ ανθρώπων χωρίζεται σε δύο κατηγορίες: τους καλούς ανθρώπους και τους κακούς ανθρώπους. Υποθέστε ότι για κάποιον αριθμό k , με $1 \leq k \leq n - 1$, υπάρχουν k καλοί άνδρες και k καλές γυναίκες· άρα υπάρχουν $n - k$ κακοί άνδρες και $n - k$ κακές γυναίκες.

Όλοι θα ήθελαν να παντρευτούν κάποιον καλό αντί για κάποιον κακό. Τυπικά, η κάθε λίστα προτιμήσεων έχει την ιδιότητα ότι κατατάσσει κάθε καλό άτομο του αντίθετου φύλου υψηλότερα από κάθε κακό άτομο του αντίθετου φύλου: οι πρώτες k καταχωρίσεις είναι καλά άτομα (του αντίθετου φύλου) με κάποια σειρά, και οι επόμενες $n - k$ είναι τα κακά άτομα (του αντίθετου φύλου) με κάποια σειρά.

Δείξτε ότι σε κάθε ευσταθές ταίριασμα, κάθε καλός άνδρας παντρεύεται μια καλή γυναίκα.

Λύση Ένας φυσικός τρόπος αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος είναι να υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός είναι ψευδής και να εργαστούμε προς την κατεύθυνση κατάληξης σε άτοπο. Τι σημαίνει ότι ο ισχυρισμός είναι ψευδής; Ότι υπάρχει κάποιο ευσταθές ταίριασμα M στο οποίο ένας καλός άνδρας m θα ήταν παντρεμένος με μια κακή γυναίκα w .

Ας εξετάσουμε τώρα τι μορφή θα έχουν τα άλλα ζευγάρια στο ταίριασμα M . Υπάρχουν k καλοί άνδρες και k καλές γυναίκες. Θα μπορούσε να ισχύει ότι κάθε καλή γυναίκα είναι παντρεμένη με έναν καλό άνδρα σε αυτό το ταίριασμα M ; Όχι: ένας από τους καλούς άνδρες (δηλαδή ο m) είναι ήδη παντρεμένος με μία κακή γυναίκα, και αυτό μας αφήνει μόνο $k - 1$ καλούς άνδρες. Επομένως, ακόμα και αν ήταν όλοι παντρεμένοι με καλές γυναίκες, θα εξακολουθούσε να υπάρχει μία καλή γυναίκα που θα είναι παντρεμένη με έναν κακό άνδρα.

Έστω ότι w' είναι αυτή η καλή γυναίκα που είναι παντρεμένη με έναν κακό άνδρα. Τώρα είναι εύκολο να αναγνωρίσουμε μια αστάθεια στο ταίριασμα M : θεωρήστε το ζευγάρι (m, w') . Και οι δύο είναι καλοί, όμως είναι παντρεμένοι με κακό σύντροφο. Έτσι και ο m και η w' προτιμούν ο ένας τον άλλο από τον τρέχοντα σύντροφό τους, επομένως το ζευγάρι (m, w') αποτελεί μια αστάθεια. Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεσή μας ότι το M είναι ευσταθές, και επομένως ολοκληρώνει την απόδειξη.