Λυμένη άσκηση 2

Μπορούμε να σκεφτούμε μία γενίκευση του προβλήματος Ευσταθούς Ταιριάσματος στην οποία ορισμένα ζευγάρια ανδρών-γυναικών είναι ρητώς *απαγορευμένα*. Στην περίπτωση των εργοδοτών και των υποψηφίων, θα μπορούσαμε να φανταστούμε ότι σε ορισμένους υποψήφιους λείπουν απλώς τα απαραίτητα προσόντα ή οι πιστοποιήσεις, οπότε δεν μπορούν να εργαστούν σε συγκεκριμένες εταιρείες, όσο και αν το επιθυμούν. Χρησιμοποιώντας την αναλογία του γάμου μεταξύ ανδρών και γυναικών, έχουμε ένα σύνολο M από n άνδρες, ένα σύνολο W από n γυναίκες, και ένα σύνολο ζευγαριών $F \subseteq M \times W$ που απλώς *δεν επιτρέπεται* να παντρευτούν. Κάθε άνδρας m κατατάσσει όλες τις γυναίκες w για τις οποίες $(m, w) \notin F$, και κάθε γυναίκα w' κατατάσσει όλους τους άνδρες m' για τους οποίους $(m', w') \notin F$.

Σε αυτή την πιο γενική διευθέτηση, λέμε ότι το ταίριασμα S είναι *ευσταθές* αν δεν παρουσιάζει κάποιον από τους ακόλουθους τύπους αστάθειας.

(*i*) Υπάρχουν δύο ζευγάρια (m, w) και (m', w') στο S με την ιδιότητα ότι $(m, w') \notin F$, ο m προτιμά την w' από την w, και η w' προτιμά τον m από τον m'. (*Το συνηθισμένο είδος αστάθειας.*)

(*ii*) Υπάρχει ένα ζευγάρι $(m, w) \in S$ και υπάρχει ένας άνδρας m' έτσι ώστε ο m' να μην ανήκει σε κανένα ζευγάρι του ταιριάσματος, $(m', w) \notin F$, και η w προτιμά τον m' από τον m. (*Ένας ανύπαντρος άνδρας είναι πιο επιθυμητός και δεν είναι απαγορευμένος.*)

(*iii*) Υπάρχει ένα ζευγάρι $(m, w) \in S$ και υπάρχει μία γυναίκα w', έτσι ώστε η w' να μην ανήκει σε κανένα ζευγάρι του ταιριάσματος, $(m, w') \notin F$, και ο m προτιμά την w' από την w. (*Μία ανύπαντρη γυναίκα είναι πιο επιθυμητή και δεν είναι απαγορευμένη.*)

(*iv*) Υπάρχει ένας άνδρας m και μία γυναίκα w που δεν ανήκουν σε κανένα ζευγάρι του ταιριάσματος, και $(m, w) \notin F$. (*Υπάρχουν δύο ανύπαντροι άνθρωποι που τίποτε δεν τους εμποδίζει από το να παντρευτούν μεταξύ τους.*)

Παρατηρήστε ότι με από αυτούς τους πιο γενικούς ορισμούς, το ευσταθές ταίριασμα δεν χρειάζεται να είναι τέλειο ταίριασμα.

Τώρα μπορούμε να ρωτήσουμε: Για κάθε σύνολο από λίστες προτιμήσεων και κάθε σύνολο απαγορευμένων ζευγαριών, υπάρχει πάντοτε ένα ευσταθές ταίριασμα; Απαντήστε σε αυτή την ερώτηση κάνοντας ένα από τα ακόλουθα δύο πράγματα: (α) δώστε έναν αλγόριθμο ο οποίος, για κάθε σύνολο από λίστες προτιμήσεων και απαγορευμένων ζευγαριών, παράγει ένα ευσταθές ταίριασμα· ή (β) δώστε ένα παράδειγμα συνόλου από λίστες προτιμήσεων και απαγορευμένων ζευγαριών για τα οποία δεν υπάρχει ευσταθές ταίριασμα.

Λύση Ο αλγόριθμος Gale-Shapley είναι αξιοσημείωτα ανθεκτικός σε παραλλαγές του προβλήματος Ευσταθούς Ταιριάσματος. Έτσι, αν έρθετε αντιμέτωποι με μια νέα παραλλαγή του προβλήματος και δεν μπορείτε να βρείτε ένα αντιπαράδειγμα σταθερότητας, συχνά είναι καλή ιδέα να ελέγξετε αν μια άμεση προσαρμογή του αλγορίθμου G-S θα δώσει πράγματι ευσταθή ταιριάσματα.

Όπως προκύπτει, αυτό ισχύει και στη συγκεκριμένη περίπτωση. Θα δείξουμε ότι υπάρχει πάντοτε ένα ευσταθές ταίριασμα ακόμα και σε αυτό το πιο γενικό μοντέλο με απαγορευμένα ζευγάρια, και θα το κάνουμε αυτό προσαρμόζοντας τον αλγόριθμο G-S. Για να το επιτύχουμε αυτό, ας εξετάσουμε γιατί δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί απευθείας ο αρχικός αλγόριθμος G-S. Η δυσκολία, φυσικά, είναι το ότι ο αλγόριθμος G-S δεν γνωρίζει τίποτα για απαγορευμένα ζευγάρια, οπότε η συνθήκη στο βρόχο `While`

```
While υπάρχει άνδρας m που είναι ελεύθερος και δεν έχει κάνει πρόταση
      σε κάθε γυναίκα
```

δεν θα δουλέψει: δεν θέλουμε ο m να κάνει πρόταση σε μια γυναίκα w για την οποία το ζευγάρι (m, w) είναι απαγορευμένο.

Έτσι, ας εξετάσουμε μία παραλλαγή του αλγορίθμου G-S στην οποία θα κάνουμε μία μόνο αλλαγή: θα τροποποιήσουμε το βρόχο While σε

```
While υπάρχει άνδρας m που είναι ελεύθερος και δεν έχει κάνει πρόταση
      σε όλες τις γυναίκες w για τις οποίες (m, w) ∉ F.
```

Ακολουθεί ο πλήρης αλγόριθμος.

```
Αρχικά όλοι οι m ∈ M και w ∈ W είναι ελεύθεροι
While υπάρχει άνδρας m που είναι ελεύθερος και δεν έχει κάνει πρόταση
      σε όλες τις γυναίκες w για τις οποίες (m, w) ∉ F
   Διάλεξε έναν τέτοιον άνδρα m
   Έστω w η γυναίκα με την υψηλότερη κατάταξη στην λίστα προτιμήσεων του m
        στην οποία ο m δεν έχει κάνει ακόμη πρόταση
```

```
    If η w είναι ελεύθερη then
       οι (m, w) δεσμεύονται
    Else η w είναι για την ώρα δεσμευμένη με τον m'
       If η w προτιμά τον m' από τον m then
          ο m παραμένει ελεύθερος
       Else η w προτιμά τον m από τον m'
          οι (m, w) δεσμεύονται
          ο m' γίνεται ελεύθερος
       Endif
    Endif
Endwhile
Return το σύνολο S των δεσμευμένων ζευγαριών
```

Θα αποδείξουμε τώρα ότι αυτός ο αλγόριθμος παράγει ένα ευσταθές ταίριασμα, με βάση το νέο μας ορισμό σταθερότητας.

Για να ξεκινήσουμε, οι προτάσεις (1.1), (1.2), και (1.3) του αρχικού αλγορίθμου παραμένουν αληθείς (συγκεκριμένα, ο αλγόριθμος θα τερματίσει το πολύ σε n^2 επαναλήψεις). Επίσης, δεν χρειάζεται να ανησυχούμε για να δείξουμε ότι το ταίριασμα S που προκύπτει είναι τέλειο (πράγματι, μπορεί να μην είναι). Παρατηρούμε επίσης κάποια ακόμα πράγματα. Αν m είναι ένας άνδρας που δεν ανήκει σε ζευγάρι του S, τότε ο m πρέπει να έχει κάνει πρόταση σε κάθε μη απαγορευμένη γυναίκα· και αν w είναι μια γυναίκα η οποία δεν ανήκει σε ζευγάρι του S, τότε κανείς άνδρας δεν έχει κάνει πρόταση στην w.

Τελικά, πρέπει να δείξουμε μόνο ότι

(1.9) *Δεν υπάρχει αστάθεια ως προς το ταίριασμα S που επιστρέφεται.*

Απόδειξη. Ο γενικός μας ορισμός για την αστάθεια έχει τέσσερα μέρη: Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι κανένα από τα τέσσερα "κακά" δεν συμβαίνει.

Πρώτον, υποθέστε ότι υπάρχει μια αστάθεια του τύπου (i), που αποτελείται από τα ζευγάρια (m, w) και (m', w') του S με την ιδιότητα $(m, w') \notin F$, ο m προτιμά την w' από την w, και η w' προτιμά τον m από τον m'. Άρα ο m πρέπει να έχει κάνει πρόταση στην w'· έτσι η w' απέρριψε τον m, επομένως προτιμά τον τελικό της σύντροφο από τον m — άτοπο.

Υποθέστε τώρα ότι υπάρχει μια αστάθεια του τύπου (ii), που αποτελείται από ένα ζευγάρι $(m, w) \in S$ και έναν άνδρα m', έτσι ώστε ο m' να μην ανήκει σε κανένα ζευγάρι της ταιριάσματος, $(m', w) \notin F$, και η w να προτιμά τον m' από τον m. Τότε ο m' πρέπει να έχει κάνει πρόταση στην w και να έχει απορριφθεί· και πάλι, το συμπέρασμα είναι ότι η w προτιμά τον τελικό της σύντροφο από τον m' — άτοπο.

Τρίτον, υποθέστε ότι υπάρχει μια αστάθεια του τύπου (iii), που αποτελείται από ένα ζευγάρι $(m, w) \in S$ και μία γυναίκα w', έτσι ώστε η w' να μην ανήκει σε κανένα ζευγάρι του ταιριάσματος, $(m, w') \notin F$, και ο m να προτιμά την w' από την w. Τότε κανείς άνδρας δεν έχει κάνει πρόταση στην w'· συγκεκριμένα, ο m ποτέ δεν έχει κάνει πρόταση στην w', και έτσι πρέπει να προτιμά την w από την w' — άτοπο.

Τέλος, υποθέστε ότι υπάρχει μια αστάθεια του τύπου (iv), που αποτελείται από έναν άνδρα m και μία γυναίκα w όπου ούτε ο ένας ούτε ο άλλος ανήκουν σε κάποιο ζευγάρι του ταιριάσματος και $(m, w) \notin F$. Για να είναι όμως ανύπαντρος ο m, πρέπει να έχει κάνει πρόταση σε κάθε μη απαγορευμένη γυναίκα· συγκεκριμένα, πρέπει να έχει κάνει πρόταση στην w, κάτι που σημαίνει ότι αυτή πλέον δεν θα είναι ανύπαντρη — άτοπο. ■