641 Εισαγωγή στη Θεωρία και Ανάλυση Αλγορίθμων

$1^{ο}$ Σετ Ασκήσεων - 15/03/2013

Ημερομηνία Παράδοσης: Παρασκευή 29/03/2013, ώρα 22:00

Τρόπος Παράδοσης: Χειρόγραφα στο γραφείο 207δ (σε περίπτωση απουσίας αφήστε τα κάτω από την πόρτα, μέσα σε φάκελο/διαφάνεια , για να μην φθαρούν) ή ηλεκτρονικά (μέσω email ή ecourse)

Σημειώστε τα ονοματεπώνυμα και τους Α.Μ. κάθε φοιτητή της ομάδας (έως 2 φοιτητές)

Αντίτυπα Εκφωνήσεων του σετ ασκήσεων υπάρχουν στο γραφείο 207δ

Απορίες: στο γραφείο 207δ (καλύτερα στείλτε πρώτα ένα email για επιβεβαίωση της ώρας) ή ηλεκτρονικά μέσω email ή ecourse.

Ερώτημα 1. Για κάθε μια από τις ακόλουθες σχέσεις δείξτε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας:

a) $4^n = o(2^n)$
b) $2^{2n} = O(2^n)$
c) $c^{(\log_2 n)^2} = O((\log_2 n)^2),\ c > 1\ (\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha})$
d) $2^{n^2} = O((2^n)^2)$
e) $\Theta\left(2^{2+5n} + 1000 \cdot 3^{2(1+n)}\right) = \Theta(32^n)$

[Απάντηση: έως 1 σελίδα]

Ερώτημα 2. Να ταξινομηθούν σε αύξουσα σειρά τάξης μεγέθους οι ακόλουθες συναρτήσεις:

$$n^n, n\log_2 n, \log_2(2n), \frac{n^2}{\log_2 n}, \sqrt{n}, n2^n, 2^{1/n}, 3^{\log_2 n}, 2^{(\log_2 n)^2}, 3^{n^2}$$

[Απάντηση: έως 1 ½ σελίδα]

Ερώτημα 3. Υποθέτουμε ότι για την επίλυση ενός υπολογιστικού προβλήματος Π έχουμε να επιλέξουμε μεταξύ των ακόλουθων αλγορίθμων:

1. Ο αλγόριθμος A_1 λύνει προβλήματα μεγέθους n με το να επιλύει 16 υποπροβλήματα μεγέθους n/8 και συνδυάζει τις λύσεις τους σε χρόνο $n^{2/3}$.
2. Ο αλγόριθμος A_2 λύνει προβλήματα μεγέθους n με το να επιλύει 4 υποπροβλήματα μεγέθους n/3 και συνδυάζει τις λύσεις τους σε χρόνο n/3.
3. Ο αλγόριθμος A_3 λύνει προβλήματα μεγέθους n με το να επιλύει 9 υποπροβλήματα μεγέθους n/27 και συνδυάζει τις λύσεις τους σε χρόνο $3n^{2/3}$.
4. Ο αλγόριθμος A_4 λύνει προβλήματα μεγέθους n με το να επιλύει 2 υποπροβλήματα μεγέθους n/2 και συνδυάζει τις λύσεις τους σε χρόνο $\log_2 n$.
5. Ο αλγόριθμος A_5 λύνει προβλήματα μεγέθους n με το να επιλύει 1 υποπρόβλημα μεγέθους n/3, άλλο 1 υποπρόβλημα μεγέθους n/4 και άλλο 1 υποπρόβλημα μεγέθους n/5 και συνδυάζει τις λύσεις τους σε χρόνο n.

i. Βρείτε τις αναδρομικές σχέσεις για τους χρόνους εκτέλεσης των παραπάνω αλγορίθμων και στη συνέχεια βρείτε τους αντίστοιχους ασυμπτωτικούς χρόνους εκτέλεσης.

ii. Ποιον αλγόριθμο θα επιλέγατε για το πρόβλημα Π με βάση την ταχύτητά τους και γιατί;

[Απάντηση: έως 1 ½ σελίδα]

Ερώτημα 4. Θεωρούμε το πρόβλημα της εύρεσης του αριθμού αντιστροφών. Η κλασική περίπτωση ορίζει ως αντιστροφή ένα ζεύγος a_i, a_j με $i < j$ για το οποίο ισχύει $a_i > a_j$. Θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει ότι ένα τέτοιο μέτρο είναι αρκετά ευαίσθητο. Ας ονομάσουμε *σημαντική αντιστροφή* την περίπτωση $i < j$ και $a_i > 2\, a_j$.

Δώστε αλγόριθμο χρόνου O(n log n) που μετρά τον αριθμό των σημαντικών αντιστροφών μεταξύ δυο διατάξεων.

Σημείωση: Όταν ζητάμε να σχεδιάσετε αλγόριθμο θα πρέπει να είστε σε θέση να περιγράψετε ορισμένα σημαντικά στοιχεία του αλγορίθμου σας (π.χ. πρώτα σκεφτείτε την είσοδο και έξοδο) όπως:

- Περιγράψτε τα βήματα του αλγόριθμου (με ψευδοκώδικα ή συνοπτική περιγραφή).
- Εξηγείστε γιατί είναι σωστός ο αλγόριθμος που σχεδιάσατε (ορθότητα).
- Δικαιολογήστε τον χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου.

Επιπλέον για λόγους παρουσίασης του αλγορίθμου που προτείνετε, μπορείτε να εκτελέσετε ένα μικρό (n<10) παράδειγμα που θα φτιάξετε (δεν είναι απαραίτητο, απλά βοηθάει στην παρουσίαση).

[Απάντηση: έως 1 ½ σελίδα]

Ερώτημα 5. Μας ενδιαφέρει μια παραλλαγή για το πρόβλημα Ευσταθούς Ταιριάσματος. Υποθέτουμε ότι κάθε άνδρας και κάθε γυναίκα κατατάσσει τα μέλη του αντίθετου φύλου, αλλά τώρα επιτρέπουμε ισοβαθμίες στην κατάταξη. Για παράδειγμα (για n=4) μια γυναίκα κατατάσσει στην πρώτη θέση τον m_1, στη δεύτερη θέση ισοβαθμούν οι m_2 και m_3 (δεν έχει κάποια προτίμηση ανάμεσά τους) και ο m_4 είναι στην τελευταία θέση. Θα λέμε ότι η γυναίκα w (αντίστοιχα και για τον άντρα m) *προτιμά* τον m από τον m' αν ο m κατατάσσεται ψηλότερα από τον m' (δηλαδή δεν ισοβαθμούν) στη λίστα προτιμήσεων της γυναίκας w.

Με τις ισοβαθμίες στην κατάταξη μας ενδιαφέρουν δύο είδη σταθερότητας για την ύπαρξη ευσταθούς ταιριάσματος.

a) Μια *ισχυρή αστάθεια* σε ένα τέλειο ταίριασμα S αποτελείται από έναν άνδρα m και μα γυναίκα w τέτοιους ώστε και ο m και η w να προτιμούν τον άλλον από τους συντρόφους που τους ανατέθηκαν στο S.
   Δώστε ένα παράδειγμα συνόλου ανδρών και γυναικών όπου κάθε τέλειο ταίριασμα έχει μια ισχυρή αστάθεια **ή** δώστε έναν αλγόριθμο ο οποίος εγγυάται την εύρεση ενός τέλειου ταιριάσματος χωρίς ισχυρή αστάθεια.
b) Μια *ασθενής αστάθεια* σε ένα τέλειο ταίριασμα S αποτελείται από έναν άνδρα m και μα γυναίκα w για τους οποίους οι σύντροφοί τους στο S είναι οι w' και m' και ισχύει **ένα** από τα εξής:
   - O m προτιμά την w από την w' και η w είτε προτιμά τον m από τον m' ή είναι αδιάφορη μεταξύ των δύο αυτών επιλογών (δηλαδή ο m και ο m' ισοβαθμούν στην λίστα της) ή
   - Η w προτιμά τον m από τον m' και ο m είτε προτιμά την w από την w' ή είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο αυτών επιλογών (δηλαδή η w και η w' ισοβαθμούν στην λίστα του).

   Δώστε ένα παράδειγμα συνόλου ανδρών και γυναικών για τους οποίους κάθε τέλειο ταίριασμα έχει ασθενή αστάθεια **ή** δώστε έναν αλγόριθμο που εγγυάται την εύρεση ενός τέλειου ταιριάσματος χωρίς ασθενή αστάθεια.

[Απάντηση: έως 1 σελίδα]