

641 Εισαγωγή στη Θεωρία και Ανάλυση Αλγορίθμων

2^ο Σετ Ασκήσεων - 26/04/2013

Ημερομηνία Παράδοσης: Τρίτη 14/05/2013, ώρα 18:00

Τρόπος Παράδοσης: Χειρόγραφα στο γραφείο 207δ ή ηλεκτρονικά (μέσω email ή ecourse)

Σημειώστε τα ονοματεπώνυμα και τους Α.Μ. κάθε φοιτητή της ομάδας (έως 2 φοιτητές)

Απορίες: στο γραφείο ή ηλεκτρονικά μέσω email ή ecourse.

Παρουσιάσεις: Παρασκευή 17/05 (δηλώνετε μέσω του ecourse την χρονική περίοδο - θα ανακοινωθεί)

Ερώτημα 1. Σε μια βιοτεχνία υπάρχουν m εργαζόμενοι E_1, E_2, \dots, E_m που παράγουν ένα προϊόν Π με ταχύτητα $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ (αριθμός προϊόντων την ημέρα) ο καθένας. Όταν εμφανίζεται μια παραγγελία για το προϊόν Π που περιγράφεται από ένα ή περισσότερα τεμάχια του προϊόντος, πρέπει να ανατεθεί σε κάποιον εργαζόμενο. Θέλουμε να αναθέσουμε K παραγγελίες στους εργαζόμενους με τέτοιο τρόπο K_1, K_2, \dots, K_m έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί ο συνολικός χρόνος παραγωγής όλων των παραγγελιών (δηλαδή, θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τον συνολικό χρόνο στον οποίο θα έχουν τελειώσει τις παραγγελίες όλοι οι εργαζόμενοι).

- a) Υποθέστε ότι όλες οι παραγγελίες της ακολουθίας παραγγελιών είναι για ένα τεμάχιο του προϊόντος Π . Αποδείξτε ότι ο άπληστος αλγόριθμος που εξετάζει με τη σειρά εμφάνισης τις παραγγελίες και αναθέτει κάθε παραγγελία σε εκείνον τον εργαζόμενο που θα τελειώσει τις παραγγελίες που έχουν ανατεθεί μέχρι στιγμής σε αυτόν – μαζί με τη νέα – νωρίτερα (δηλ. ταξινομημένα ως προς τα σ_j), είναι βέλτιστος.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το επιχείρημα ανταλλαγής.

- b) Τι συμβαίνει στην περίπτωση που η ακολουθία παραγγελιών περιέχει παραγγελίες για ένα ή δύο τεμάχια του προϊόντος Π και κάθε παραγγελία πρέπει να ανατεθεί σε έναν εργαζόμενο; Αποδείξτε ότι ο αλγόριθμος που αναφέρθηκε παραπάνω δεν είναι βέλτιστος (δίνοντας ένα αντισταθμιστικό).

[Απάντηση: έως 1 σελίδα]

Ερώτημα 2. Διοργανώνεται ένας ποδηλατικός αγώνας που ξεκινά από τα Ιωάννινα και τερματίζει στην Αθήνα. Οι ποδηλάτες αναμένεται να καλύπτουν περίπου 20 χιλιόμετρα ημερησίως. Οι διοργανωτές έχουν κλείσει ξενοδοχεία σε διάφορες πόλεις στην διαδρομή. Έστω $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ οι χιλιομετρικές αποστάσεις των διαφόρων ξενοδοχείων από τα Ιωάννινα. Οι ποδηλάτες θα μείνουν σίγουρα στο ξενοδοχείο στο α_n που είναι η Αθήνα. Στην διαδρομή όμως μπορούν να επιλέξουν αυτοί σε ποια πόλη θα σταματούν κάθε φορά. Λόγω των διαφορετικών αποστάσεων των ξενοδοχείων μπορεί να μην είναι δυνατόν να καλύπτουν ακριβώς 20 χιλιόμετρα ημερησίως. Τα ξενοδοχεία δεν απέχουν σε καμιά περίπτωση πάνω από 50 χιλιόμετρα που είναι και το ανώτατο όριο που μπορεί να καλύψει ένας ποδηλάτης ημερησίως. Αν καλύψουν x χιλιόμετρα ημερησίως παίρνουν $(20 - x)^2$ βαθμούς ποινής. Νικητής είναι αυτός που θα φθάσει στην Αθήνα με τους λιγότερους βαθμούς ποινής.

Διατυπώστε αλγόριθμο με πολυπλοκότητα χρόνου $O(n^2)$ που θα υπολογίζει την ελάχιστη δυνατή συνολική ποινή για τους παίκτες.

Υπόδειξη: Ορίστε $P(i)$ την ελάχιστη συνολική ποινή μέχρι το χιλιόμετρο α_i ενός ποδηλάτη που διαμένει στο ξενοδοχείο α_i και χρησιμοποιείστε Δυναμικό Προγραμματισμό για να υπολογίσετε το $P(n)$.

[Απάντηση: έως 1 σελίδα]

Ερώτημα 3. Υποθέστε ότι ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G=(V,E)$ με n κορυφές περιέχει δύο κορυφές s και t τέτοιες ώστε η απόσταση μεταξύ των s και t να είναι αυστηρά μεγαλύτερη του $n/2$.

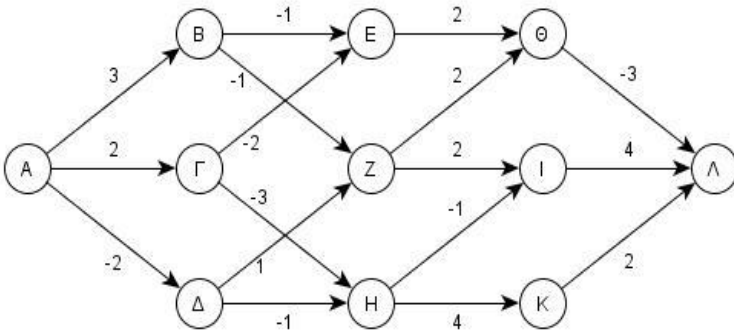
- Δείξτε ότι πρέπει να υπάρχει κάποια κορυφή v τέτοια ώστε η διαγραφή της v από το G να καταστρέφει όλες τις διαδρομές από το s στο t (δηλαδή, στο γράφημα που λαμβάνουμε μετά τη διαγραφή της v δεν περιέχει διαδρομή από s προς t).
- Δώστε αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $O(n+m)$ για την εύρεση μιας τέτοιας κορυφής v .

[Απάντηση: έως 1 σελίδα]

Ερώτημα 4. Θεωρούμε ότι ένα γράφημα $G=(V,E)$ είναι σχεδόν-δένδρο αν είναι συνεκτικό και έχει το πολύ $n + 8$ ακμές. Δώστε αλγόριθμο με χρόνο εκτέλεσης $O(n)$ ο οποίος θα παίρνει ως είσοδο ένα σχεδόν-δένδρο G με κόστη στις ακμές του και θα επιστρέφει ένα ελάχιστο σκελετικό δένδρο. Μπορείτε να υποθέσετε ότι όλα τα κόστη των ακμών είναι διαφορετικά.

[Απάντηση: έως 1 σελίδα]

Ερώτημα 5. Θέλουμε να βρούμε την συντομότερη διαδρομή στο γράφημα μεταξύ της κορυφής A και Λ εκτελώντας τον αλγόριθμο του Dijkstra. Θυμηθείτε ότι ο αλγόριθμος του Dijkstra εκτελείται μόνο όταν το γράφημα έχει θετικά βάρη. Βρείτε έναν τρόπο για να εξαλείψετε αρνητικές τιμές από το γράφημα έτσι ώστε να εφαρμόσετε στη συνέχεια τον αλγόριθμο του Dijkstra. Θα πρέπει να τεκμηριώσετε την ορθότητα της μετατροπής (**δεν χρειάζεται** να παρουσιάσετε την εκτέλεση του Dijkstra).



το γράφημα έχει θετικά βάρη. Βρείτε έναν τρόπο για να εξαλείψετε αρνητικές τιμές από το γράφημα έτσι ώστε να εφαρμόσετε στη συνέχεια τον αλγόριθμο του Dijkstra. Θα πρέπει να τεκμηριώσετε την ορθότητα της μετατροπής (**δεν χρειάζεται** να παρουσιάσετε την εκτέλεση του Dijkstra).

[Απάντηση: έως 1 σελίδα]

Ερώτημα 6. Ορισμένοι ερευνητές θέλουν να μελετήσουν τους λόγους μακροζωίας που παρουσιάζουν οι κάτοικοι της Ικαρίας. Έχουν συλλέξει ορισμένες πληροφορίες για ένα σύνολο n ανθρώπων που έζησαν στην Ικαρία πριν 300 χρόνια. Συμβολίζουμε τους n ανθρώπους ως P_1, P_2, \dots, P_n . Οι πληροφορίες που έχουν συλλέξει παρουσιάζουν τις ακόλουθες δυο μορφές:

- Για κάποια i και j , το άτομο P_i πέθανε πριν γεννηθεί το άτομο P_j
- Για κάποια i και j , οι διάρκειες ζωής των P_i και P_j επικαλύπτονται τουλάχιστον εν μέρει.

Δυστυχώς για τις πληροφορίες που έχουν δεν είναι σίγουροι ότι έχουν σωστά στοιχεία καθώς οι μνήμες δεν είναι τόσο καλές. Θέλουν από εσάς να προσδιορίσετε αν τα δεδομένα που έχουν συλλέξει είναι εσωτερικώς συνεπή με την έννοια αν μπορεί να υπάρξει τέτοιο σύνολο ατόμων για το οποίο να ισχύουν ταυτόχρονα όλα τα στοιχεία που έμαθαν. Δώστε έναν γραμμικό (ως προς το μέγεθος του συνόλου των ατόμων και το μέγεθος του συνόλου της πληροφορίας) αλγόριθμο που είτε παράγει τις προτεινόμενες ημερομηνίες γέννησης και θανάτου για κάθε άτομο, είτε αποφασίζει ότι δεν μπορεί να υπάρχουν τέτοιες ημερομηνίες (δηλαδή, παρουσιάζουν εσωτερική ασυνέπεια).

Υπόδειξη: Μοντελοποιήστε το πρόβλημα με μια «αγαπημένη» σας δομή και παρατηρήστε πότε μπορείτε να έχετε ασυνέπειες στα δεδομένα.

[Απάντηση: έως 1 σελίδα]