ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Αλγεβρικές Δομές Ι

Ενότητα: Σχέσεις Ισοδυναμίας, Διαμερίσεις, και Πράξεις

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης

Τμήμα: Μαθηματικών

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μέρος 4. Θεωρητικά Θέματα

I. Θεωρία Ομάδων

1. Σχέσεις Ισοδυναμίας, Διαμερίσεις, και Πράξεις

1.1. **Σχέσεις ισοδυναμίας.** Έστω X ένα μη-κενό σύνολο.

Ορισμός 1.1. *Μια* **σχέση ισοδυναμίας** *επί του X είναι ένα υποσύνολο $\mathcal{R}$ του καρτεσιανού γινομένου $X \times X$:*

$$\mathcal{R} \ \subseteq \ X \times X$$

το οποίο ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\forall x \in X$: $(x, x) \in \mathcal{R}$. *(ανακλαστική ιδιόητα)*
2. $\forall x, y \in X$: $(x, y) \in \mathcal{R} \implies (y, x) \in \mathcal{R}$ *(συμμετρική ιδιότητα)*
3. $\forall x, y, z \in X$: $(x, y) \in \mathcal{R}$ & $(y, z) \in \mathcal{R} \implies (x, z) \in \mathcal{R}$ *(μεταβατική ιδιότητα)*

Συμβολισμός: $\forall x, y \in X$, αν $(x, y) \in \mathcal{R}$, τότε θα γράφουμε ισοδύναμα:

$$x \,\mathcal{R}\, y \qquad \text{ή} \qquad x \sim_{\mathcal{R}} y \qquad \text{ή} \qquad x \equiv y(\mathcal{R})$$

Έστω $\mathcal{R}$ μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου X. Αν $x \in X$, η **κλάση ισοδυναμίας** του x ως προς την $\mathcal{R}$ ορίζεται να είναι το ακόλουθο σύνολο:

$$[x]_{\mathcal{R}} = \big\{ y \in X \mid y \sim_{\mathcal{R}} x \big\} \ \subseteq \ X$$

Ένα τυχόν στοιχείο μιας κλάσης ισοδυναμίας, δηλαδή ενός υποσυνόλου του X της μορφής $[x]_{\mathcal{R}}$ καλείται **αντιπρόσωπος** της κλάσης ισοδυναμίας. Επειδή $x \sim_{\mathcal{R}} x$, θα έχουμε προφανώς ότι $x \in [x]_{\mathcal{R}}$ και άρα το x είναι ένας αντιπρόσωπος της κλάσης ισοδυναμίας του. Θα δούμε αργότερα σε συγκεκριμμένα παραδείγματα ότι πολλές φορές υπάρχει φυσική επιλογή αντιπροσώπου μιας κλάσης ισοδυναμίας.

Το σύνολο $X/\mathcal{R}$ όλων των κλάσεων ισοδυναμίας των στοιχείων του X

$$X/\mathcal{R} = \big\{ [x]_{\mathcal{R}} \mid x \in X \big\}$$

ως προς τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$, καλείται **σύνολο-πηλίκο** του X ως προς την $\mathcal{R}$.

Ορίζουμε μια απεικόνιση

$$\pi_{\mathcal{R}} : \ X \ \longrightarrow \ X/\mathcal{R}, \qquad \pi_{\mathcal{R}}(x) = [x]_{\mathcal{R}}$$

η οποία καλείται η **κανονική προβολή** του X στο σύνολο πηλίκο $X/\mathcal{R}$ του X ως προς τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$.

Παρατήρηση 1.2. *Η απεικόνιση κανονικής προβολής* $\pi_{\mathcal{R}} : \ X \ \longrightarrow \ X/\mathcal{R}$ *είναι προφανώς επί.*

Ένα φυσικό ερώτημα το οποίο προκύπτει είναι ποιά είναι η σχέση μεταξύ δύο κλάσεων ισοδυναμίας.

Λήμμα 1.3. *Έστω $\mathcal{R}$ μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου X, και $x, y \in X$.*

1. $x \sim_{\mathcal{R}} y \iff [x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$.
2. *Είτε* $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$ *ή* $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.

Απόδειξη. **1.** "$\Longrightarrow$" Έστω $x \sim_{\mathcal{R}} y$. Έστω $z \in [x]_{\mathcal{R}}$. Τότε $z \sim_{\mathcal{R}} x$ και άρα από την ματαβατική ιδιότητα θα έχουμε $z \sim_{\mathcal{R}} y$. Επομένως $z \in [y]_{\mathcal{R}}$ και επομένως $[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [y]_{\mathcal{R}}$. Αντίστροφα αν $z \in [y]_{\mathcal{R}}$, τότε $z \sim_{\mathcal{R}} y$ και άρα $y \sim_{\mathcal{R}} z$. Από την ματαβατική ιδιότητα θα έχουμε $x \sim_{\mathcal{R}} z$ ή ισοδύναμα $z \sim_{\mathcal{R}} x$. Επομένως $z \in [x]_{\mathcal{R}}$ και άρα $[y]_{\mathcal{R}} \subseteq [x]_{\mathcal{R}}$. Έτσι δείξαμε ότι: $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$.

"$\Longleftarrow$" Έστω $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$. Τότε $x \in [x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$ και επομένως $x \sim_{\mathcal{R}} y$.

2. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$, τότε $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$. Έστω $z \in [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}}$. Τότε $z \in [x]_{\mathcal{R}}$ και $z \in [y]_{\mathcal{R}}$. Αυτό σημαίνει ότι: $z \sim_{\mathcal{R}} x$ και $z \sim_{\mathcal{R}} y$. Ισοδύναμα, επειδή η σχέση $\sim_{\mathcal{R}}$ είναι σχέση ισοδυναμίας, $x \sim_{\mathcal{R}} z$ και $z \sim_{\mathcal{R}} y$. Από την μεταβατική ιδιότητα τότε θα έχουμε $x \sim_{\mathcal{R}} y$ και άρα από το **1.** θα έχουμε $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$. $\square$

Πόρισμα 1.4. *Έστω $\mathcal{R}$ μια σχέση ισοδυναμίας επί του μη-κενού συνόλου X.*

1. $\forall x \in X$: $[x]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.
2. *Είτε* $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$ *ή* $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.
3. $X = \bigcup_{x \in X} [x]_{\mathcal{R}}$.

Απόδειξη. **1.** Έστω $x \in X$. Επειδή $x \in [x]_{\mathcal{R}}$ έπεται ότι $[x]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$.

2. Το ζητούμενο προκύπτει από το **2**. του Λήμματος 1.3.

3. Επειδή $\forall x \in X$, έχουμε $x \in [x]_{\mathcal{R}}$, έπεται ότι $X = \cup_{x \in X}\{x\} \subseteq \cup_{x \in X}[x]_{\mathcal{R}}$ και άρα θα έχουμε $X = \cup_{x \in X}[x]_{\mathcal{R}}$. $\square$

Από το παραπάνω Πόρισμα 1.4 βλέπουμε ότι το σύνολο-πηλίκο $X/\mathcal{R}$ είναι ένα σύνολο υποσυνόλων του X, των κλάσεων ισοδυναμίας των στοιχείων του X ως προς τη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$, το οποίο ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα: κάθε στοιχείο του συνόλου X ανήκει σε μία και μόνο μία κλάση ισοδυναμίας. Αυτή η ιδιότητα μας οδηγεί στην έννοια της διαμέρισης ενός συνόλου.

1.2. **Διαμερίσεις.** Έστω X ένα μη-κενό σύνολο.

Ορισμός 1.5. *Μια* **διαμέριση** *του X είναι μια συλλογή υποσυνόλων $\Delta = \big\{A_i \,|\, A_i \subseteq X\big\}_{i \in I}$, όπου I είναι ένα σύνολο δεικτών, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:*

(1) $\forall i \in I$: $A_i \neq \emptyset$.
(2) $\forall i, j \in I$: $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$.
(3) $X = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Με άλλα λόγια μια διαμέριση του μη-κενού συνόλου X είναι μια συλλογή Δ μη-κενών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα κάθε στοιχείο του συνόλου X ανήκει σε ένα και μόνο ένα σύνολο της συλλογής Δ.

Υπενθυμίζουμε ότι αν X είναι ένα σύνολο, τότε

$$|X| \qquad \text{ή} \qquad \#(X)$$

συμβολίζει το πλήθος των στοιχείων του X.

Παρατήρηση 1.6. *Έστω X ένα πεπερασμένο σύνολο και $\Delta = \big\{A_i \,|\, A_i \subseteq X\big\}_{i \in I}$ μια διαμέριση του συνόλου X. Τότε προφανώς το σύνολο δεικτών I και κάθε υπσύνολο A_i της διαμέρισης είναι πεπερασμένα σύνολα και επομένως επειδή το X είναι ξένη ένωση των A_i:*

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i, \qquad \textit{και} \qquad A_i \bigcap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$$

θα έχουμε:

$$|X| = \sum_{i \in I} |A_i|$$

Η επόμενη Πρόταση μας εξασφαλίζει ότι κάθε διαμέριση Δ του συνόλου X ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ επί του X έτσι ώστε οι κλάσεις ισοδυναμίας των στοιχείων του X ως προς την $\mathcal{R}$ να συμπίπτουν με τα υποσύνολα της διαμέρισης Δ.

Πρόταση 1.7. *Έστω $\Delta = \big\{A_i \mid A_i \subseteq X\big\}_{i\in I}$ μια διαμέριση του μη-κενού συνόλου X. Τότε ορίζοντας*

$$\mathcal{R}_\Delta := \big\{(x,y) \in X \times X \mid \exists\, i \in I : \ x, y \in A_i\big\}$$

αποκτούμε μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_\Delta$ επί του X. Επιπλέον:

1. *$\forall x \in X$: $[x]_{\mathcal{R}_\Delta} = A_i$, για κάποιο $i \in I$ (το i είναι ο μοναδικός δείκτης $i \in I$ έτσι ώστε $x \in A_i$).*
2. *$X/\mathcal{R}_\Delta = \Delta$ ως συλλογές υποσυνόλων του X.*

Απόδειξη. • Έστω $x \in X$. Επειδή η συλλογή υποσυνόλων Δ είναι μια διαμέριση του X, έπεται ότι $x \in X = \cup_{i\in I} A_i$ και άρα υπάρχει δείκτης $i \in I$ έτσι ώστε: $x \in A_i$. Τότε προφανώς $(x,x) \in \mathcal{R}_\Delta$, δηλαδή $x \sim_{\mathcal{R}_\Delta} x$ και άρα ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα.

• Έστω $x, y \in X$ και υποθέτουμε ότι $(x,y) \in \mathcal{R}_\Delta$, δηλαδή $x \sim_{\mathcal{R}_\Delta} y$. Τότε εξ' ορισμού υπάρχει δείκτης $i \in I$ έτσι ώστε $x, y \in A_i$ και προφανώς τότε $y, x \in A_i$. Άρα $(y,x) \in \mathcal{R}_\Delta$ δηλαδή $y \sim_{\mathcal{R}_\Delta} x$ και έτσι η σχέση $\mathcal{R}_\Delta$ είναι συμμετρική.

• Έστω $(x,y) \in \mathcal{R}_\Delta$ και $(y,z) \in \mathcal{R}_\Delta$, δηλαδή $x \sim_{\mathcal{R}_\Delta} y$ και $y \sim_{\mathcal{R}_\Delta} z$. Τότε υπάρχουν δείκτες $i, j \in I$ έτσι ώστε: $x, y \in A_i$ και $y, z \in A_j$. Τότε όμως $y \in A_i \cap A_j$. Επειδή όμως $A_i \cap A_j = \emptyset$ αν $i \neq j$, έπεται ότι αναγκαστικά θα έχουμε $i = j$ και άρα $A_i = A_j$. Επομένως $x, y, z \in A_i$ το οποίο σημαίνει ότι $(x,z) \in \mathcal{R}_\Delta$, δηλαδή $x \sim_{\mathcal{R}} z$ και έτσι η σχέση $\mathcal{R}_\Delta$ είναι μεταβατική.

1. Έστω $x \in X$. Τότε υπάρχει μοναδικός δείκτης $i \in I$ έτσι ώστε: $x \in A_i$. Θα έχουμε:

$$[x]_{\mathcal{R}_\Delta} = \big\{y \in X \mid y \sim_{\mathcal{R}_\Delta} x\big\} = \big\{y \in X \mid \exists j \in I : \ x, y \in A_j\big\}$$

Επειδή $x \in A_i$ και $A_i \cap A_j = \emptyset$ αν $i \neq j$, θα έχουμε αναγκαστικά $i = j$ και άρα:

$$[x]_{\mathcal{R}_\Delta} = \big\{y \in X \mid \exists j \in I : \ x, y \in A_j\big\} = \big\{y \in X \mid y \in A_i\big\} = A_i$$

2. Επειδή $X/\mathcal{R}_\Delta = \big\{[x]_{\mathcal{R}_\Delta} \mid x \in X\big\}$ και $[x]_{\mathcal{R}_\Delta} = A_i$, όπου $i \in I$ είναι ο μοναδικός δείκτης για τον οποίο ισχύει $x \in A_i$, θα έχουμε ότι:

$$X/\mathcal{R}_\Delta = \big\{[x]_{\mathcal{R}_\Delta} \mid x \in X\big\} = \big\{A_i \mid i \in I\big\} = \Delta \qquad \square$$

1.3. **Διαμερίσεις και Σχέσεις Ισοδυναμίας.** Συνδυάζοντας το Πόρισμα 1.4 και την Πρόταση 1.7, έχουμε το ακόλουθο βασικό Θεώρημα:

Θεώρημα 1.8. *Έστω X ένα μη-κενό σύνολο. Τότε οι απεικονίσεις*

$$\Phi : \ \mathcal{D} := \big\{\textit{Διαμερίσεις } \Delta \textit{ του } X\big\} \ \longrightarrow \ \mathcal{S} := \big\{\textit{Σχέσεις ισοδυναμίας } \mathcal{R} \textit{ επί του } X\big\}, \qquad \Phi(\Delta) = \mathcal{R}_\Delta$$

$$\Psi : \ \mathcal{S} := \big\{\textit{Σχέσεις ισοδυναμίας } \mathcal{R} \textit{ επί του } X\big\} \ \longrightarrow \ \mathcal{D} := \big\{\textit{Διαμερίσεις } \Delta \textit{ του } X\big\}, \qquad \Psi(\mathcal{R}) = X/\mathcal{R}$$

ορίζουν μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου $\mathcal{D}$ των διαμερίσων του X και του συνόλου $\mathcal{S}$ των κλασεων ισοδυναμίας επί του X.

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 1.4 και την Πρόταση 1.7 έπεται ότι οι αντιστοιχίες Φ και Ψ ορίζουν απεικονίσεις $\Phi\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{S}$, $\Phi(\Delta) = \mathcal{R}_\Delta$ και $\Psi\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{D}$, $\Psi(\mathcal{R}) = \Delta_{\mathcal{R}} := X/\mathcal{R}$.

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης, αρκεί να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις Φ και Ψ είναι η μία αντίστροφη της άλλης. Με άλλα λόγια αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\forall \Delta \in \mathcal{D} : \ \ \Psi\Phi(\Delta) = \Delta \qquad \text{και} \qquad \forall \mathcal{R} \in \mathcal{S} : \ \ \Phi\Psi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$$

ή ισοδύναμα:

$$\forall \Delta \in \mathcal{D} : \ \ \Delta_{\mathcal{R}_\Delta} = \Delta \qquad \text{και} \qquad \forall \mathcal{R} \in \mathcal{S} : \ \ \mathcal{R}_{\Delta_{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$$

Από την Πρόταση 1.7, έπεται ότι για κάθε διαμέρσιη Δ του X, έχουμε $X/\mathcal{R}_\Delta = \Delta$ ως υποσύνολα του X. Έτσι

$$\Psi\Phi(\Delta) = \Psi(\mathcal{R}_\Delta) = X/\mathcal{R}_\Delta = \Delta$$

Για να δείξουμε τώρα ότι $\forall \mathcal{R} \in \mathcal{S}: \quad \Phi\Psi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{R}_{\Delta_{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$. Υπενθυμίζουμε ότι η διαμέριση $\Delta_{\mathcal{R}}$, την οποία ορίζει η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$, αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας $[x]_{\mathcal{R}}$ των στοιχείων του X. Έτσι εξ' ορισμού για την επαγόμενη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_{\Delta_{\mathcal{R}}}$ την οποία ορίζει η $\Delta_{\mathcal{R}}$ θα έχουμε: $\forall x, y \in X$: $(x, y) \in \mathcal{R}_{\Delta_{\mathcal{R}}}$ αν και μόνον αν τα στοιχεία x και y ανήκουν στο ίδιο σύνολο της διαμέρισης $\Delta_{\mathcal{R}}$, δηλαδή αν και μόνον αν υπάρχει $z \in X$ έτσι ώστε $x, y \in [z]_{\mathcal{R}}$. Αυτό όμως συμβαίνει αν και μόνον αν $z \sim_{\mathcal{R}} x$ και $z \sim_{\mathcal{R}} y$ και επομένως αν και μόνον αν $x \sim_{\mathcal{R}} y$ αν και μόνον αν $(x, y) \in \mathcal{R}$. Συνοψίζοντας δείξαμε ότι:

$$\forall x, y \in X: \quad (x, y) \in \mathcal{R}_{\Delta_{\mathcal{R}}} \quad \Longleftrightarrow \quad (x, y) \in \mathcal{R}$$

Επομένως $\mathcal{R}_{\Delta_{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$ και άρα $\forall \mathcal{R} \in \mathcal{S}: \quad \Phi\Psi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$. Έτσι δείξαμε ότι οι απεικονίσεις Φ και Ψ είναι 1-1 και επί και επιπλέον: $\Psi = \Phi^{-1}$. $\square$

1.4. **Απεικονίσεις και Σχέσεις Ισοδυναμίας.** Έστω $f: X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση μεταξύ των μη-κενών συνόλων X, Y. Ορίζουμε μια σχέση επί του συνόλου X ως εξής:

$$\mathcal{R}_f = \big\{(x, y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\big\}$$

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι η σχέση $\mathcal{R}_f$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του X.

Πρόταση 1.9. *Η σχέση $\mathcal{R}_f$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του X. Επιπλέον, $\forall x \in X$:*

$$[x]_{\mathcal{R}_f} = f^{-1}\big\{f(x)\big\} = \big\{x' \in X \mid f(x) = f(x')\big\}$$

και η απεικόνιση f επάγει μια 1-1 και επί απεικόνιση

$$\overline{f}: \ X/\mathcal{R}_f \longrightarrow \mathsf{Im}(f), \quad \overline{f}([x]_{\mathcal{R}_f}) = f(x)$$

Επιπλέον αν $g: X \longrightarrow Z$ είναι μια απεικόνιση έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη:

$$\forall x, y \in X: \quad f(x) = f(y) \quad \Longrightarrow \quad g(x) = g(y) \tag{$\dagger$}$$

τότε υπάρχει μοναδική απεικόνιση

$$\overline{g}: \ X/\mathcal{R}_f \longrightarrow Z, \qquad \text{έτσι ώστε:} \ \ \overline{g} \circ \pi_f = g$$

όπου $\pi_f: X \longrightarrow X/\mathcal{R}_f$ είναι η απεικόνιση κανονικής προβολής.

Απόδειξη. • Έστω $x \in X$. Τότε $x \sim_{\mathcal{R}_f} x$ διότι $f(x) = f(x)$. Άρα η σχέση $\mathcal{R}_f$ είναι ανακλαστική.

• Έστω $x, y \in X$ και υποθέτουμε ότι $x \sim_{\mathcal{R}_f} y$. Τότε $f(x) = f(y)$. Άρα $f(y) = f(x)$ και επομένως $y \sim_{\mathcal{R}_f} x$, δηλαδή η σχέση $\mathcal{R}_f$ είναι συμμετρική.

• Έστω $x, y, z \in X$ και υποθέτουμε ότι $x \sim_{\mathcal{R}_f} y$ και $y \sim_{\mathcal{R}_f} z$. Τότε $f(x) = f(y)$ και $f(y) = f(z)$. Προφανώς τότε $f(x) = f(z)$ και επομένως $x \sim_{\mathcal{R}_f} z$, δηλαδή η σχέση $\mathcal{R}_f$ είναι μεταβατική.

Έτσι η σχέση $\mathcal{R}_f$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του X. Έστω $x \in X$. Τότε:

$$[x]_{\mathcal{R}_f} = \big\{y \in X \mid y \sim_{\mathcal{R}_f} x\big\} = \big\{y \in X \mid f(y) = f(x)\big\} = \big\{y \in X \mid y \in f^{-1}(\{f(x)\})\big\} = f^{-1}(\{f(x)\})$$

Ορίζουμε τώρα μια απεικόνιση

$$\overline{f}: \ X/\mathcal{R}_f \longrightarrow \mathsf{Im}(f), \quad \overline{f}([x]_{\mathcal{R}_f}) = f(x)$$

• Η $\overline{f}$ <u>είναι καλά ορισμένη</u>: Έστω $[x]_{\mathcal{R}_f} = [y]_{\mathcal{R}_f}$. Τότε όπως γνωρίζουμε θα ισχύει $x \sim_{\mathcal{R}_f} y$ και από τον ορισμό της $\mathcal{R}_f$: $f(x) = f(y)$. Έτσι $\overline{f}([x]_{\mathcal{R}_f}) = f(x) = f(y) = \overline{f}([y]_{\mathcal{R}_f})$ και η $\overline{f}([x]_{\mathcal{R}_f})$ είναι καλά ορισμένη.

• Η $\overline{f}$ <u>είναι 1-1 και επί</u>: Προφανώς η $\overline{f}$ είναι επί, διότι αν $y \in \mathsf{Im}(f)$, τότε $y = f(x)$ για κάποιο $x \in X$, και επομένως $\overline{f}([x]_{\mathcal{R}_f}) = f(x) = y$. Έστω τώρα ότι $\overline{f}([x]_{\mathcal{R}_f}) = \overline{f}([y]_{\mathcal{R}_f})$ και επομένως $f(x) = f(y)$. Εξ' ορισμού θα έχουμε τότε $x \sim_{\mathcal{R}_f} y$ και από το Λήμμα 1.3 έπεται ότι $[x]_{\mathcal{R}_f} = [y]_{\mathcal{R}_f}$. Αυτό δείχνει ότι η $\overline{f}$ είναι 1-1.

Τέλος έστω $g\colon X \longrightarrow Z$ μια απεικόνιση για την οποία ισχύει η σχέση (†). Ορίζουμε τότε απεικόνιση

$$\overline{g}: X/\mathcal{R}_f \longrightarrow Z, \quad \overline{g}([x]_{\mathcal{R}_f}) = g(x)$$

Η $\overline{g}$ είναι καλά ορισμένη διότι αν $[x]_{\mathcal{R}_f} = [y]_{\mathcal{R}_f}$, τότε όπως γνωρίζουμε θα ισχύει $x \sim_{\mathcal{R}_f} y$ και από τον ορισμό της $\mathcal{R}_f$: $f(x) = f(y)$. Λόγω της συνθήκης (†) θα έχουμε τότε και $g(x) = g(y)$, δηλαδή $\overline{g}([x]_{\mathcal{R}_f}) = g(x) = g(y) = \overline{g}([y]_{\mathcal{R}_f})$ και η $\overline{g}$ είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον

$$(\overline{g} \circ \pi_f)(x) = \overline{g}(\pi_f(x)) = \overline{g}([x]_{\mathcal{R}_f}) = g(x), \ \ \forall x \in X \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{g} \circ \pi_f = g$$

Αν $h\colon X/R_f \longrightarrow Z$ είναι μια άλλη απεικόνιση έτσι ώστε $h \circ \pi_f = g$, τότε, $\forall x \in X$:

$$h([x]_{\mathcal{R}_f}) = h(\pi_f(x)) = (h \circ \pi_f)(x) = g(x) = (\overline{g} \circ \pi_f)(x) = \overline{g}(\pi_f(x)) = \overline{g}([x]_{\mathcal{R}_f}) \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{g} = h$$

και άρα η $\overline{g}$ είναι η μοναδική απεικόνιση : $X/\mathcal{R}_f \longrightarrow Z$ η οποία ικανοποιεί την ιδιότητα $\overline{g} \circ \pi_f = g$. □

Ορισμός 1.10. *Η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_f$ η οποία ορίζεται στο σύνολο X μέσω μιας απεικόνισης $f\colon X \longrightarrow Y$ καλείται η* **επαγόμενη από την f σχέση ισοδυναμίας** *στο σύνολο X.*

Παράδειγμα 1.11. *Έστω $\mathcal{R}$ μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου X. Τότε η απεικόνιση κανονικής προβολής*

$$\pi_{\mathcal{R}}: X \longrightarrow X/\mathcal{R}, \quad \pi_{\mathcal{R}}(x) = [x]_{\mathcal{R}}$$

επάγει στο X την ίδια σχέση ισοδυναμίας: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\pi_{\mathcal{R}}}$. Πράγματικά:

$$x \sim_{\mathcal{R}_{\pi_{\mathcal{R}}}} y \iff \pi_{\mathcal{R}}(x) = \pi_{\mathcal{R}}(y) \iff [x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}} \iff x \sim_{\mathcal{R}} y$$

Από την Πρόταση 1.9 έπεται ότι κάθε απεικόνιση $f\colon X \longrightarrow Y$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση

$$f = \mathsf{i} \circ \overline{f} \circ \pi_{\mathcal{R}_f}$$

(1) μιας απεικόνισης «Επι»

$$\pi_{\mathcal{R}_f}: X \longrightarrow X/\mathcal{R}_f, \quad \pi_{\mathcal{R}_f}(x) = [x]_{\mathcal{R}_f}$$

(2) μιας απεικόνισης «1-1 και Επι»

$$\overline{f}: X/\mathcal{R}_f \longrightarrow \mathsf{Im}(f), \quad \overline{f}([x]_{\mathcal{R}_f}) = f(x)$$

(3) μιας απεικόνισης «1-1»

$$\mathsf{i}: \mathsf{Im}(f) \longrightarrow Y, \quad \mathsf{i}(y) = y$$

Σχηματικά:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{R}_f}"'] & Y \\
X/\mathcal{R}_f \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathsf{Im}(f) \arrow[u, "\mathsf{i}"']
\end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι αν η f είναι απεικόνιση επί, τότε η επαγόμενη απεικόνιση $\overline{f}\colon X/\mathcal{R}_f \longrightarrow Y$ είναι 1-1 και επί. Συμπερασματικά:

1. Κάθε σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ σε ένα σύνολο X ορίζει μια απεικόνιση επί, την $\pi_{\mathcal{R}}\colon X \longrightarrow X/\mathcal{R}$, της οποίας η επαγόμενη σχέση ισοδυναμίας επί του X συμπίπτει με την $\mathcal{R}$.
2. Κάθε απεικόνιση επί $f\colon X \longrightarrow Y$ ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας επί του X, την $\mathcal{R}_f$, η οποία επάγει μια απεικόνιση επί $\pi_{\mathcal{R}_f}\colon X \longrightarrow X/\mathcal{R}_f$ και υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση $\overline{f}\colon X/\mathcal{R}_f \longrightarrow Y$.

1.5. **Πράξεις.** Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε σύντομα την έννοια της πράξης επί ενός συνόλου καθώς και την έννοια της πράξης η οποία είναι συμβατή με μια σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός 1.12. *Μια (διμελής)* **πράξη** *επί ενός συνόλου X είναι μια απεικόνιση*

$$\mu : X \times X \longrightarrow X, \quad (x, y) \longmapsto \mu(x, y)$$

Συνήθως μια πράξης μ επι ενός συνόλου X παρίσταται με ένα εκ των συμβόλων:

$$\mu = *, \quad \circ, \quad \bullet, \quad \#, \quad \star, \quad +, \quad -, \quad \cdot, \quad ...$$

Αντίστοιχα, το αποτέλεσμα της πράξης στο ζεύγος στοιχείων (x, y) του X, συμβολίζεται ως εξής:

$$\mu(x, y) = x * y, \quad x \circ y, \quad x \bullet y, \quad x\#y, \quad x \star y, \quad x + y, \quad x - y, \quad x \cdot y, \quad ...$$

Ορισμός 1.13. *Έστω X ένα μη-κενό σύνολο, και*

$$\star : X \times X \longrightarrow X, \quad \star(x, y) = x \star y$$

μια πράξη επί του X.

1. *Η πράξη $\star$ καλείται* **προσεταιριστική** *αν ισχύει:*
$$\forall x, y, z \in X : \qquad x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$$
2. *Η πράξη $\star$ καλείται* **μεταθετική** *αν ισχύει:*
$$\forall x, y \in X : \qquad x \star y = y \star x$$
3. *Υποθέτουμε ότι η πράξη $\star$ επί του X είναι προσεταιριστική.*
   α. *Ένα στοιχείο $e \in X$ καλείται* **ουδέτερο στοιχείο** *του X ως προς την πράξη $\star$, αν ισχύει:*
$$\forall x \in X : \qquad x \star e = x = e \star x$$
   Υπενθυμίζουμε αν υπάρχει ουδέτερο στοιχείο για την πράξη $\star$ στο σύνολο X, τότε αυτό είναι μοναδικό.
   β. *Αν $e \in X$ είναι ένα ουδέτερο στοιχείο της πράξης $\star$, και $x \in X$, τότε ένα στοιχείο $x' \in X$ καλείται* **αντίθετο** *του x, αν ισχύει:*
$$x \star x' = e = x' \star x$$
   Υπενθυμίζουμε ότι επειδή η πράξη $\star$ επί του X είναι προσεταιριστική, αν e είναι το ουδέτερο στοιχείο της $\star$, τότε αν υπάρχει το αντίθετο στοιχείο x' του $x \in X$, τότε αυτό είναι μοναδικό.

1.6. **Πράξεις συμβιβαστές με σχέσεις ισοδυναμίας.** Υποθέτουμε τώρα ότι $\star \colon X \times X \longrightarrow X$ είναι μια πράξη επί του συνόλου X. Έστω $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου X.

Στα επόμενα εδάφια σημαντικό ρόλο θα παίξουν πράξεις επί συνόλων οι οποίες είναι συμβιβαστές με μια δοσμένη σχέση ισοδυναμίας με την έννοια του ακόλουθου ορισμού.

Ορισμός 1.14. *Η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$* **είναι συμβιβαστή με την πράξη** *$\star$ αν ισχύει:*

$$\forall x, y, z, w \in X : \quad x \sim_{\mathcal{R}} z \quad \text{και} \quad y \sim_{\mathcal{R}} w \quad \Longrightarrow \quad x \star y \sim_{\mathcal{R}} z \star w$$

Πρόταση 1.15. *Έστω $\star \colon X \times X \longrightarrow X$ μια πράξη επί του συνόλου X, και έστω $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου X η οποία είναι συμβιβαστή με την πράξη $\star$.*

1. *Ορίζοντας*
$$\widetilde{\star} : X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R} \longrightarrow X/\mathcal{R}, \qquad \widetilde{\star}([x]_{\mathcal{R}}, [y]_{\mathcal{R}}) := [x]_{\mathcal{R}} \widetilde{\star} [y]_{\mathcal{R}} = [x \star y]_{\mathcal{R}}$$
   αποκτούμε μια πράξη επί του συνόλου-πηλίκο $X/\mathcal{R}$.
2. *Αν η πράξη $\star$ επί του X είναι προσεταιριστική ή μεταθετική, τότε η πράξη $\widetilde{\star}$ επί του $X/\mathcal{R}$ είναι προσεταιριστική ή μεταθετική αντίστοιχα.*

3. *Έστω $e \in X$ ένα ουδέτερο στοιχείο για την πράξη $\star$ επί του X. Τότε το $[e]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R}$ είναι ουδέτερο στοιχείο για την πράξη $\widetilde{\star}$ επί του $X/\mathcal{R}$.*
4. *Υποθέτουμε ότι η πράξη $\star$ έχει ένα ουδέτερο στοιχείο $e \in X$, και έστω x ένα στοιχείο του X για το οποίο υπάρχει ένα αντίθετο στοιχείο $x' \in X$. Τότε το στοιχείο $[x']_{\mathcal{R}}$ είναι ένα αντίθετο στοιχείο του $[x]_{\mathcal{R}}$ για την πράξη $\widetilde{\star}$ επί του $X/\mathcal{R}$.*

Απόδειξη. **1.** Αρκεί ο ορισμός $[x]_{\mathcal{R}} \widetilde{\star} [y]_{\mathcal{R}} = [x \star y]_{\mathcal{R}}$ να είναι ανεξάρτητος της επιλογής αντιπροσώπων των κλάσεων ισοδυναμίας. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\forall x, y, z, w \in X: \quad [x]_{\mathcal{R}} = [z]_{\mathcal{R}} \quad \text{και} \quad [y]_{\mathcal{R}} = [w]_{\mathcal{R}} \quad \Longrightarrow \quad [x \star y]_{\mathcal{R}} = [z \star w]_{\mathcal{R}}$$

Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x, y, z, w \in X: \quad x \sim_{\mathcal{R}} z \quad \text{και} \quad y \sim_{\mathcal{R}} w \quad \Longrightarrow \quad x \star y \ \sim_{\mathcal{R}} \ z \star w$$

Η τελευταία συνεπαγωγή όμως ισχύει ακριβώς διότι η σχέση $\mathcal{R}$ είναι συμβιβαστή με την πράξη $\star$. Τα υπόλοιπα μέρη της Πρότασης προκύπτουν άμεσα από τους ορισμούς και αφήνονται ως άσκηση. □

Η επαγόμενη πράξη $\widetilde{\star}$ στο σύνολο-πηλίκο $X/\mathcal{R}$ μιας συμβιβαστής με την πράξη $\star$ σχέσης ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ επί του X σχηματικά περιγράφεται με το ακόλουθο "μεταθετικό" διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "\star"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{R}} \times \pi_{\mathcal{R}}"'] & X \arrow[d, "\pi_{\mathcal{R}}"'] \\ X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R} \arrow[r, "\widetilde{\star}"] & X/\mathcal{R} \end{tikzcd}$$

δηλαδή: $\widetilde{\star} \circ (\pi_{\mathcal{R}} \times \pi_{\mathcal{R}}) = \pi_{\mathcal{R}} \circ \star$, όπου η απεικόνιση $\pi_{\mathcal{R}} \times \pi_{\mathcal{R}}$ ορίζεται ως $(\pi_{\mathcal{R}} \times \pi_{\mathcal{R}})(x, y) = ([x]_{\mathcal{R}}, [y]_{\mathcal{R}})$.

Φυσικά δεν είναι όλες οι πράξεις σε ένα σύνολο συμβιβαστές με μια δοσμένη σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου. Ας δούμε ένα παράδειγμα μιας σχέσης ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ που ορίζεται επί ενός συνόλου X, η οποία δεν είναι συμβιβαστή με μία από τις πράξεις του συνόλου:

Παράδειγμα 1.16. *Επί του συνόλου των ακεραίων αριθμών θεωρούμε τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού:*

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (z_1, z_2) \longmapsto z_1 + z_2$$
$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (z_1, z_2) \longmapsto z_1 \cdot z_2.$$

Επιπλέον, θεωρούμε την ακόλουθη διαμέριση του $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = A \cup B, \ \textit{όπου} \quad A = \{0, \pm 1\}, \quad B = \{\pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}.$$

Η προηγούμενη διαμέριση, χορηγεί τη σχέση ισοδυναμίας

$$\mathcal{R} = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in A\} \cup \{(\gamma, \delta) \mid \gamma, \delta \in B\}.$$

*Η πράξη της πρόσθεσης **δεν είναι συμβιβαστή με τη σχέση** $\mathcal{R}$, αφού $[0]_{\mathcal{R}} = [1]_{\mathcal{R}}$, ενώ $[0]_{\mathcal{R}} = [0+0]_{\mathcal{R}} \neq [2]_{\mathcal{R}} = [1+1]_{\mathcal{R}}$.*

*Αλλά η πράξη του πολλαπλασιασμού **είναι συμβιβαστή με τη σχέση** $\mathcal{R}$, αφού $[0]_{\mathcal{R}} = [1]_{\mathcal{R}} = [-1]_R$, όπως επίσης $[\pm 2]_{\mathcal{R}} = [\pm 3]_{\mathcal{R}} = [\pm 4]_R = \dots$ και όλα τα δυνατά γινόμενα $\alpha \cdot \beta$, όπου $\alpha, \beta \in A$ ή B αντιστοίχως δίνουν και πάλι στοιχείο από το A ή το B αντιστοίχως.*

Ίσως το πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα πράξης η οποία είναι συμβιβαστή με μια σχέση ισοδυναμίας είναι το ακόλουθο:

Παράδειγμα 1.17. *Έστω $n \geq 1$. Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ θεωρούμε τη σχέση $\mathcal{R}_n$ η οποία ορίζεται ως εξής:*

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}: \ a \sim_{\mathcal{R}_n} b \iff n \mid a - b$$

Τότε η $\mathcal{R}_n$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathbb{Z}$, και είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η $\mathcal{R}_n$ είναι συμβιβαστή με την πράξη της πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού ακεραίων.

Παρατήρηση 1.18. *Έστω $\star : X \times X \longrightarrow X$ μια πράξη επί του συνόλου X, και έστω $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου X η οποία είναι συμβιβαστή με την πράξη $\star$. Τότε η πράξη*

$$[x]_{\mathcal{R}} \widetilde{\star} [y]_{\mathcal{R}} := [x \star y]_{\mathcal{R}}$$

επί του $X/\mathcal{R}$ είναι η μοναδική πράξη επί του $X/\mathcal{R}$ η οποία ικανοποιεί την παραπάνω σχέση. Δηλαδή αν

$$\circ : \ X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R} \longrightarrow X/\mathcal{R}, \quad \circ([x]_{\mathcal{R}}, [y]_{\mathcal{R}}) := [x]_{\mathcal{R}} \circ [y]_{\mathcal{R}}$$

είναι μια πράξη επί του $X/\mathcal{R}$ για την οποία ισχύει: $[x]_{\mathcal{R}} \circ [y]_{\mathcal{R}} = [x \star y]_{\mathcal{R}}$, $\forall [x]_{\mathcal{R}}, [y]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R}$, τότε:

$$\circ = \widetilde{\star} : \ X/\mathcal{R} \times X/\mathcal{R} \longrightarrow X/\mathcal{R}, \quad \textit{δηλαδή:} \quad [x]_{\mathcal{R}} \circ [y]_{\mathcal{R}} = [x]_{\mathcal{R}} \,\widetilde{\star}\, [y]_{\mathcal{R}}$$

$\forall [x]_{\mathcal{R}}, [y]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R}$.

Το παρακάτω πρόβλημα θα αναλυθεί διεξοδικά αργότερα - στην θεωρία (κανονικών) υποομάδων μιας ομάδας:

Πρόβλημα 1.19. *Έστω $\star : G \times G \longrightarrow G$ μια πράξη επί του μη κενού συνόλου G. Έστω $H \subseteq G$ ένα μη-κενό υποσύνολο του G. Αν το ζεύγος $(G, \star)$ είναι ομάδα, και $\mathcal{R}_H$ είναι η σχέση*

$$\forall x, y \in G : \ x \sim_{\mathcal{R}_H} y \quad \Longleftrightarrow \quad x^{-1} \star y \in H$$

τότε:

(1) *Πότε η σχέση $\mathcal{R}_H$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου G;*
(2) *Αν η σχέση $\mathcal{R}_H$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου G, πότε η $\mathcal{R}_H$ είναι συμβιβαστή με την πράξη $\star$ της G;*

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης «Αλγεβρικές Δομές Ι». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1248.