ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Αλγεβρικές Δομές Ι

Ενότητα: Χαρακτηρισμοί Πεπερασμένων Κυκλικών Ομάδων

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

4. **Χαρακτηρισμοί Πεπερασμένων Κυκλικών Ομάδων**

Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα (Πρόταση 3.18) ότι αν $(G, \star)$ είναι μια πεπερασμένη ομάδα, τότε η τάξη της $\mathsf{o}(G)$ έχει την ιδιότητα: $x^{\mathsf{o}(G)} = e, \ \ \forall x \in G$.

Η ακόλουθη πρόταση δείχνει ότι μια πεπερασμένη *κυκλική* ομάδα ικανοποιεί κάτι ισχυρότερο:

Πρόταση 4.1. *Έστω $(G, \star)$ μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα. Τότε ο φυσικός αριθμός $\mathsf{o}(G)$ είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός n έτσι ώστε: $x^n = e, \ \ \forall x \in G$.*

Απόδειξη. Έστω g ένας γεννήτορας της G: $G = \langle g \rangle$. Τότε $\mathsf{o}(G) = \mathsf{o}(g) := n$ και όπως γνωρίζουμε n είναι ο μικρότερος φυσικός m έτσι ώστε $g^m = e$. Έστω $x \in G$. Επειδή

$$G = \langle g \rangle = \big\{ e = g^0, g, g^2, \cdots, g^{n-1} \big\}$$

θα έχουμε $x = g^k$ για κάποιο $k \leq n-1$. Τότε $x^{\mathsf{o}(g)} = (g^k)^{\mathsf{o}(g)} = e$. Προφανώς ο φυσικός n είναι ο μικρότερος ο μικρότερος φυσικός m έτσι ώστε $x^m = e$, $\forall x \in G$, διότι αν υπήρχε φυσικός $m < n$ έτσι ώστε $x^m = e$, $\forall x \in G$, τότε θα ίσχυε $g^m = e$, κάτι που είναι άτοπο διότι η $\mathsf{o}(g) = n$. □

Σκοπός της παρούσης ενότητας είναι να αποδείξουμε ότι η παραπάνω ιδιότητα χαρακτηρίζει τις κυκλικές ομάδες στην κλάση των πεπερασμένων αβελιανών ομάδων.

Θεώρημα 4.2. *Έστω $(G, \star)$ μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η G είναι κυκλική.*
(2) *Η τάξη $\mathsf{o}(G) = |G|$ της G είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός n έτσι ώστε: $x^n = e, \ \ \forall x \in G$.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε τις ακόλουθες βοηθητικές προτάσεις οι οποίες παρουσιάζουν ενδιαφέρον από μόνες τους. Στην απόδειξή τους θα χρησιμοποιήσουμε στοιχειώδη αποτελέσματα της Θεωρίας Αριθμών.

Λήμμα 4.3. *Έστω $(G, \star)$ μια αβελιανή ομάδα και $x, y \in G$ στοιχεία της G έτσι ώστε:*

$$\mathsf{o}(x) = m < \infty \qquad \textit{και} \qquad \mathsf{o}(x) = n < \infty \qquad \textit{και} \qquad (m, n) = 1$$

Τότε:

$$\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\} \qquad \textit{και} \qquad \mathsf{o}(xy) = mn$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ και επομένως $z \in \langle x \rangle$ και $z \in \langle y \rangle$. Άρα $z = x^k = y^l$. Τότε

$$z^m = x^{km} = (x^m)^k = e \qquad \text{και} \qquad z^n = y^{ln} = (y^n)^l = e$$

Επομένως:

$$\mathsf{o}(z)/m \qquad \text{και} \qquad \mathsf{o}(z)/n \qquad \stackrel{(m,n)=1}{\Longrightarrow} \qquad \mathsf{o}(z) = 1$$

Άρα $z = e$ και επομένως: $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$.

Έστω $\mathsf{o}(x \star y) = r$. Τότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η G είναι αβελιανή, θα έχουμε:

$$x^r \star y^r = (x \star y)^r = e \quad \Longrightarrow \quad x^r = (y^r)^{-1} = y^{-r} \ \in \ \langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$$

και επομένως:

$$x^r = e \ \ \text{και} \ \ y^{-r} = e \quad \Longrightarrow \quad x^r = e \ \ \text{και} \ \ y^r = e \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{o}(x) = m/r \ \ \text{και} \ \ \mathsf{o}(y) = n/r$$

Τότε $[m, n]/r$ και επειδή όπως γνωρίζουμε από την Θεωρία Αριθμών, $[m, n](m, n) = mn$, η υπόθεση $(m, n) = 1$, συνεπάγεται ότι: mn/r. Από τη άλλη πλευρά:

$$(xy)^{mn} = x^{mn} \star y^{mn} = (x^m)^n \star (y^n)^m = e \star e = e \qquad \Longrightarrow \qquad r/mn$$

Συμπεραίνουμε ότι $mn = r$, δηλαδή:

$$\mathsf{o}(xy) = \mathsf{o}(x)\mathsf{o}(y)$$ □

Η παρακάτω Άσκηση γενικεύει το Λήμμα 4.3:

Άσκηση 279. *Έστω G μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα. Τότε:*

$$\forall x, y \in G: \quad \mathsf{o}(xy) = [\mathsf{o}(x), \mathsf{o}(y)]$$

Λήμμα 4.4. *Έστω $(G, \star)$ μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα. Τότε η G περιέχει ένα στοιχείο g του οποίου η τάξη είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των τάξεων όλων των στοιχείων της G:*

$$\exists g \in G: \ \ \mathsf{o}(g) = [\mathsf{o}(g_1), \mathsf{o}(g_2), \cdots, \mathsf{o}(g_n)]$$

Απόδειξη. • Δείχνουμε πρώτα ότι:

αν $x, y \in G$ και $\mathsf{o}(x) = m, \ \mathsf{o}(y) = n,$ τότε υπάρχει ένα στοιχείο $z \in G$ έτσι ώστε : $\mathsf{o}(z) = [m, n]$

Για τους θετικούς ακεραίους m, n από την Θεωρία Αριθμών, μπορούμε να γράψουμε:

$$m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k} \qquad \text{και} \qquad n = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_k^{f_k}$$

όπου οι $p_1, p_2, \cdots, p_k$ είναι διακεκριμμένοι πρώτοι αριθμοί, και $e_i, f_i \geq 0, \ 1 \leq i \leq k$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, (εν ανάγκη αναδιατάσσοντας τους πρώτους αριθμούς $p_1, p_2, \cdots, p_k$), μπορούμε να υποθέσουμε ότι:

$$e_1 \leq f_i, \ \cdots, \ e_j \leq f_j \quad \text{ και } \quad e_{j+1} \geq f_{j+1}, \ \cdots, \ e_k \geq f_k, \quad \text{ για κάποιο } \quad 1 \leq j \leq k$$

Θέτοντας

$$r = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_j^{e_j} \qquad \text{και} \qquad s = p_{j+1}^{f_{j+1}} p_{j+2}^{f_{j+2}} \cdots p_k^{f_k}$$

βλέπουμε εύκολα ότι:

$$[m, n] = \frac{n}{s} \frac{m}{r} = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \cdots p_j^{f_j} p_1^{e_{j+1}} p_2^{e_{j+2}} \cdots p_k^{e_k} \qquad \text{και} \qquad (\frac{m}{r}, \frac{n}{s}) = 1$$

Επιπλέον:

$$\mathsf{o}(x^r) = \frac{m}{r} \qquad \text{και} \qquad \mathsf{o}(y^s) = \frac{n}{s}$$

και επομένως από το Λήμμα 4.3 θα έχουμε ότι:

$$\text{το στοιχείο} \quad z = x^r \star z^s \quad \text{έχει τάξη} \quad \mathsf{o}(z) = [m, n] = \frac{n}{s} \frac{m}{r}$$

• Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\forall m, n, t \in \mathbb{Z}^+ : \qquad [[m, n], t] = [m, n, t]$$

και επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία θα έχουμε ότι:

αν $x, y, z \in G$ και $\mathsf{o}(x) = m, \ \mathsf{o}(y) = n, \ \mathsf{o}(z) = t,$ τότε υπάρχει ένα στοιχείο $w \in G$ έτσι ώστε :

$$\mathsf{o}(w) = [m, n, t]$$

• Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία, και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η αβελιανή ομάδα είναι πεπερασμένη, μπορούμε επαγωγικά να κατασκευάσουμε ένα στοιχείο g με την επιθυμητή ιδιότητα η τάξη του να είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των τάξεων των στοιχείων της G. □

Μπορούμε τώρα να δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.

Απόδειξη. (του Θεωρήματος 4.2): (1) $\Longrightarrow$ (2) Αποδείχθηκε στην Πρόταση 4.1.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Από το Λήμμα 4.4 έπεται ότι υπάρχει ένα στοιχείο $g \in G$ έτσι ώστε:

$$\mathsf{o}(g) = [\mathsf{o}(g_1), \mathsf{o}(g_2), \cdots, \mathsf{o}(g_n)]$$

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης «Αλγεβρικές Δομές Ι». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1248.