**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ**
**ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ**

ανοικτάμαθήματα
opencourses

**Τίτλος Μαθήματος:** Αλγεβρικές Δομές Ι

**Ενότητα:** Κανονικές (Ορθόθετες) Υποομάδες

**Διδάσκων:** Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης

**Τμήμα:** Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

## 10. **Κανονικές (Ορθόθετες) Υποομάδες**

Έστω $G$ μια ομάδα και $H$ μια υποομάδα της $G$. Τότε όπως είδαμε στην υπο-ενότητα 2.3, ορίζοντας

$$\forall x, y \in G: \quad x \sim_{\mathcal{R}_H} y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^{-1}y \ \in \ H$$

αποκτούμε μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_H$ επί του συνόλου $G$.

*Βασικός σκοπός μας στην παρούσα ενότητα είναι*: να εξετάσουμε πότε η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_H$ είναι συμβιβαστή με την πράξη της ομάδας $G$, και $(\beta)$ να αναλύσουμε τη δομή των υποομάδων $H$ για τις οποίες η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_H$ είναι συμβιβαστή με την πράξη της ομάδας $G$. Αργότερα θα αναλύσουμε την δομή του συνόλου πηλίκο $G/\mathcal{R}_H$ το οποίο θα συμβολίζουμε με $G/H$.

### 10.1. **Κανονικές Υποομάδες.**

Υπενθυμίζουμε, βλέπε Ορισμό 1.14, ότι: η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_H$ είναι συμβιβαστή με την πράξη της ομάδας $G$, αν και μονον αν ισχύει:

$$\forall x, y, z, w \in G: \qquad x \sim_{\mathcal{R}_H} z \quad \text{και} \quad y \sim_{\mathcal{R}_H} w \qquad \Longrightarrow \qquad xy \ \sim_{\mathcal{R}_H} \ zw \tag{10.1}$$

Με άλλα λόγια αν και μόνον αν:

$$\forall x, y, z, w \in G: \quad x^{-1}z \ \in \ H \quad \text{και} \quad y^{-1}w \ \in \ H \qquad \Longrightarrow \qquad (xy)^{-1}zw = y^{-1}x^{-1}zw \ \in \ H \tag{10.2}$$

Ισοδύναμα:

$$\forall x, y, z, w \in G: \qquad z \ \in \ xH \quad \text{και} \quad w \ \in \ yH \qquad \Longrightarrow \qquad zw \ \in \ (xy)H \tag{10.3}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν, ότι η κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου $x$ ως προς τη σχέση $\mathcal{R}_H$ συμπίπτει με το αριστερό σύμπλοκο (ή την αριστερή πλευρική κλάση) του $x$ στην $H$:

$$[x]_H = xH = \big\{ xh \in G \mid h \in H \big\}$$

η σχέση (10.2) γράφετραι ισοδύναμα:

$$\forall x, y, z, w \in G: \qquad z \ \in \ [x]_H \quad \text{και} \quad w \ \in \ [y]_H \qquad \Longrightarrow \qquad zw \ \in \ [xy]_H \tag{10.4}$$

Υπενθυμίζουμε επίσης, βλέπε Πρόταση 1.15, ότι επειδή η σχέση $\mathcal{R}_H$ είναι συμβιβαστή με την πράξη της ομάδας $G$, το σύνολο-πηλίκο

$$G/H = G/\mathcal{R}_H = \big\{ [x]_H \subseteq G \mid x \in G \big\} = \big\{ xH \subseteq G \mid x \in G \big\}$$

είναι εφοδιασμένο με την επαγόμενη πράξη

$$\cdot \ : \ G/H \times G/H \longrightarrow G/H, \qquad ([x]_H, [y]_H) := [x]_H \cdot [y]_H = [xy]_H$$

δηλαδή

$$\cdot \ : \ G/H \times G/H \longrightarrow G/H, \qquad xH \cdot yH := (xy)H$$

**Πρόταση 10.1.** *Έστω $G$ μια ομάδα και $H$ μια υποομάδα της $G$ με την ιδιότητα οτι η επαγόμενη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_H$ είναι συμβιβαστή με την πράξη της $G$. Τότε:*

(1) *Το σύνολο-πηλίκο $G/H$ αποτελεί ομάδα με πράξη: $xH \cdot yH := (xy)H$. Το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας $G/H$ είναι το σύμπλοκο $eH = H$ και το αντίστροφο του στοιχείου $xH$ είναι το σύμπλοκο $x^{-1}H$:*

$$e_{G/H} = e_G H = H \qquad \text{και} \qquad (xH)^{-1} = x^{-1}H$$

(2) *Αν η ομάδα $G$ είναι αβελιανή, τότε και η ομάδα $G/H$ είναι αβελιανή.*

(3) *Αν η ομάδα $G$ είναι πεπερασμένη, τότε και η ομάδα $G/H$ είναι πεπερασμένη και μάλιστα η τάξη της είναι:*

$$\mathsf{o}(G/H) = \frac{\mathsf{o}(G)}{\mathsf{o}(H)} = [G : H]$$

*Απόδειξη.* Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τις παραπάνω παρατηρήσεις σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.15. □

Αν $S, T$ είναι μη-κενά υποσύνολα της $G$, τότε ορίζουμε ένα νέο υποσύνολο $S \cdot T \subseteq G$ ως εξής:

$$S \cdot T = \big\{ s \cdot t \ \in G \mid s \in S, \ t \in T \big\}$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

$$S^2 := S \cdot S = \big\{ s_1 s_2 \in G \mid s_1, s_2 \in S \big\} \qquad \text{και} \qquad S^{-1} = \big\{ s^{-1} \in G \mid s \in S \big\}$$

Για παράδειγμα αν $H$ είναι μια υποομάδα της $G$ και $g \in G$, τότε:

$$gH = \{g\} \cdot H$$

Η επόμενη εύκολη Άσκηση συνοψίζει τις βασικές ιδιότητες της παραπάνω πράξης επί μη-κενών υποσυνόλων της $G$:

**Άσκηση 283.** *Αν $S, T, R$ είναι μη-κενά υποσύνολα της $G$, τότε:*

(1) $S \cdot (T \cdot R) = (S \cdot T) \cdot R$.
(2) $\{e\} \cdot S = S = S \cdot \{e\}$.
(3) *Το υποσύνολο $H$ της $G$ είναι μια υποομάδα αν και μόνον αν:*
 (α') $H^2 \subseteq H$.
 (β') $e \in H$.
 (γ') $H^{-1} \subseteq H$.
 *Αν το υποσύνολο $H$ της $G$ είναι μια υποομάδα, τότε: $H^2 = H$.*

Στα επόμενα ενδιαφερόμαστε για υποσύνολα της μορφής

$$S^{-1} \cdot H \cdot S, \qquad \text{όπου} \qquad S = \{g\}, \quad g \in G$$

Δηλαδή για κάθε στοιχείο $g \in G$ και για κάθε υποσύνολο $H \subseteq G$ ενδιαφερόμεστε για το σύνολο:

$$g^{-1}Hg = \big\{ g^{-1}hg \in G \mid h \in H \big\}$$

**Άσκηση 284.** *Έστω $H$ μια υποομάδα μιας ομάδας $G$ και έστω $g \in G$. Τότε το σύνολο $g^{-1}Hg$ είναι μια υπομάδα της $G$ (η υποομάδα $g^{-1}Hg$ καλείται η $g$-**συζυγής υποομάδα της** $H$).*

**Πρόταση 10.2.** *Έστω $G$ μια ομάδα και $H$ μια υποομάδα της $G$. Τότε τα ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(1) *Η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_H$ είναι συμβιβαστή με την πράξη της ομάδας $G$.*
(2) *Η υποομάδα $H$ ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:*

$$\forall g \in G, \, \forall h \in H : \qquad g^{-1}hg \ \in \ H \tag{$\mathsf{N}_1$}$$

(3) *Η υποομάδα $H$ ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:*

$$\forall g \in G : \qquad g^{-1}Hg \ \subseteq \ H \tag{$\mathsf{N}_2$}$$

(4) *Η υποομάδα $H$ ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:*

$$\forall g \in G : \quad g^{-1}Hg \ = \ H \tag{$\mathsf{N}_3$}$$

(5) *Η υποομάδα $H$ ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:*

$$\forall g \in G : \quad Hg \ = \ gH \tag{$\mathsf{N}_4$}$$

*Απόδειξη.* Αρχικά θα αποδείξουμε ότι οι συνθήκες $(\mathsf{N}_1), (\mathsf{N}_2), (\mathsf{N}_3)$ και $(\mathsf{N}_5)$ είναι ισοδύναμες:

• (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4) $\Longrightarrow$ (5) $\Longrightarrow$ (2) Αν ισχύει η συνθήκη (2), τότε εξ' ορισμού ισχύει και η συνθήκη (3). Έστω ότι ισχύει η συνθήκη (3), δηλαδή $\forall g \in G : \ g^{-1}Hg \ \subseteq \ H$. Έστω $h \in H$. Θα δείξουμε ότι το στοιχείο $h$ ανήκει στο σύνολο $g^{-1}Hg$, $\forall g \in G$. Πραγματικά για κάθε $g \in G$, το στοιχείο $ghg^{-1} = (g^{-1})^{-1}hg^{-1}$ ανήκει στο σύνολο $(g^{-1})^{-1}Hg^{-1}$, και άρα από την υπόθεση (3), θα έχουμε ότι $(g^{-1})^{-1}Hg^{-1} \subseteq H$, και άρα το στοιχείο $ghg^{-1}$ ανήκει στο σύνολο $H$: $\ ghg^{-1} = h' \in H$. Τότε όμως: $h = g^{-1}h'g \in g^{-1}Hg$. Έτσι δείξαμε ότι $H \subseteq g^{-1}Hg$ και επομένως: $g^{-1}Hg = H$, $\forall g \in G$. Τέλος είναι προφανές ότι η συνθήκη (4) είναι ισοδύναμη με την (5) και συνεπάγεται την συνθήκη (2).

• (1) $\Longrightarrow$ (2) Επειδή η σχέση $\mathcal{R}_H$ είναι συμβιβαστή με την πράξη της $G$, έπεται ότι θα ισχύει η σχέση (7.2). Έστω $g \in G$ και $h \in H$. Τότε

$$g^{-1}hg = g^{-1}ehg = g^{-1}e^{-1}hg = (eg)^{-1}hg$$

Έτσι θέτοντας $x = e$, $y = g$, $z = h$ και $w = g$, στην σχέση (7.2), θα έχουμε:

$$x^{-1}z = e^{-1}h = h \in H \quad \text{και} \quad y^{-1}w = g^{-1}g = e \in H \quad \Longrightarrow \quad y^{-1}x^{-1}zw = g^{-1}e^{-1}hg = g^{-1}hg \ \in \ H$$

Επομένως δείξαμε ότι: $\ g^{-1}hg \ \in \ H, \ \ \forall g \in G, \ \ \forall h \in H.$

• (2) $\Longrightarrow$ (1) Υποθέτουμε ότι ισχύει η (2), και επομένως και η (5). Σύμφωνα με την ανάλυση που προηγείται της Πρότασης, για να δείξουμε ότι η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_H$ είναι συμβιβαστή με την πράξη της $G$, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η σχέση (10.3), δηλαδή:

$$\forall x, y, z, w \in G : \quad z \ \in \ xH \quad \text{και} \quad w \ \in \ yH \quad \Longrightarrow \quad zw \ \in \ (xy)H$$

Έστω $z \ \in \ xH$ και $w \ \in \ yH$. Τότε από την (5) θα έχουμε $xH = Hx$ και άρα υπάρχουν $h_1, h_2 \in H$ έτσι ώστε:

$$z = h_1x \quad \text{και} \quad w = yh_2 \quad \Longrightarrow \quad zw = h_1xyh_2 \ \in \ (h_1xy)H \quad \overset{(5)}{\Longrightarrow} \quad zw \in H(h_1xy)$$

Επειδή προφανώς

$$H(h_1xy) = (Hh_1)(xy) \quad \text{και} \quad Hh_1 = H \quad \text{διότι} \quad h_1 \in H$$

θα έχουμε:

$$zw \in H(h_1xy) = H(xy) \quad \overset{(5)}{\Longrightarrow} \quad zw \ \in \ (xy)H$$

Επομένως δείξαμε ότι ισχύει η συνεπαγωγή στην σχέση (10.3) και άρα η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_H$ είναι συμβιβαστή με την πράξη της $G$. $\square$

Η Πρόταση 10.4 οδηγεί άμεσα στον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός 10.3.** *Έστω $G$ μια ομάδα. Μια υποομάδα $H$ της $G$ καλείται* **κανονική υποομάδα** *ή* **ορθόθετη υποομάδα** *αν ικανοποιούνται οι ισοδύναμες συνθήκες της Πρότασης 10.1, δηλαδή αν:*

$$\forall g \in G, \ \forall h \in H : \quad g^{-1}hg \ \in \ H$$

*Αν η $H$ είναι κανονική υποομάδα της $G$ θα γράφουμε: $H \trianglelefteq G$.*

Δηλαδή μια υποομάδα $H$ της $G$ είναι κανονική αν και μόνον αν η $H$ συμπίπτει με την $g$-συζυγή της $g^{-1}Hg$, $\forall g \in G$.

10.2. **Κανονικές Υποομάδες και Σχέσεις Ισοδυναμίας.** Είδαμε ότι αν $H \trianglelefteq G$ είναι μια κανονική υποομάδα της $G$, τότε η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}_H$ επί του συνόλου $G$ είναι συμβιβαστή με την πράξη της $G$.

Απο την άλλη πλευρά αν $\mathcal{R}$ είναι τυχούσα σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου $G$ η οποία είναι συμβιβαστή με την πράξη της $G$, τότε το επόμενο βασικό Θεώρημα δείχνει ότι, αντίστροφα, το υποσύνολο

$$[e]_{\mathcal{R}} = \big\{x \in G \,|x \sim_{\mathcal{R}} e\big\}$$

είναι μια κανονική υποομάδα $H = [e]_{\mathcal{R}}$ η οποία επάγει την αρχική σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ στην $G$, δηλαδή: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_H$.

Ιδιαίτερα το επόμενο Θεώρημα δείχνει ότι υπάρχουν τόσες κανονικές υποομάδες σε μια ομάδα, όσες και οι σχέσεις ισοδυναμίας οι οποίες είναι συμβιβαστές με την πράξη της ομάδας.

**Θεώρημα 10.4.** *Έστω $G$ μια ομάδα, και έστω τα ακόλουθα σύνολα:*

$$\mathbf{R} = \big\{\mathcal{R} \subseteq G \times G \ \mid \ \textit{η } \mathcal{R} \textit{ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του } G \textit{ συμβιβαστή με την πράξη της } G\big\}$$

$$\mathbf{K} = \big\{H \subseteq G \mid \ \textit{η } H \textit{ είναι κανονική υποομάδα της } G\big\}$$

*Τότε οι απεικονίσεις*

$$\Psi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{K}, \qquad \Psi(\mathcal{R}) = [e]_{\mathcal{R}}$$
$$\Phi : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{R}, \qquad \Phi(H) = \mathcal{R}_H$$

*είναι 1-1 και επί και επιπλέον:* $\Psi = \Phi^{-1}$.

*Απόδειξη.* • Έχουμε ήδη αποδείξει ότι αν $H$ είναι μια κανονική υποομάδα της $G$, τότε η σχέση $\mathcal{R}_H$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου $G$. Δηλαδή έχουμε δείξει ότι $\forall H \in \mathbf{K}$: $\Phi(H) = \mathcal{R}_H \in \mathbf{R}$. Επιπλέον θα δείξουμε ότι:

$$H = \Psi\Phi(H) \qquad \text{δηλαδή} \qquad H = [e]_{\mathcal{R}_H} = \big\{g \in G \mid g \sim_{\mathcal{R}_H} e\big\}$$

Πράγματι:

$$[e]_{\mathcal{R}_H} = \big\{g \in G \mid g \sim_{\mathcal{R}_H} e\big\} = \big\{g \in G \mid e \sim_{\mathcal{R}_H} g\big\} = \big\{g \in G \mid e^{-1}g \in H\big\} = \big\{g \in G \mid eg \in H\big\} =$$
$$\big\{g \in G \mid g \in H\big\} = H$$

• Έστω $\mathcal{R} \in \mathbf{R}$, μια σχέση ισοδυναμίας επί του $G$ η οποία είναι συμβιβαστή με την πράξη της $G$. Θα δείξουμε ότι:

$$\Psi(\mathcal{R}) = [e]_{\mathcal{R}} \ \in \ \mathbf{K} \qquad \text{και} \qquad \Phi\Psi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$$

Δηλαδή θα δείξουμε ότι:

$$[e]_{\mathcal{R}} = \big\{g \in G \mid g \sim_{\mathcal{R}} e\big\} \ \trianglelefteq \ G \qquad \text{και} \qquad \mathcal{R} = \mathcal{R}_{[e]_{\mathcal{R}}}$$

– Δείχνουμε πρώτα ότι το υποσύνολο $[e]_{\mathcal{R}}$ είναι υποομάδα της $G$. Προφανώς $[e]_{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ διότι $e \in [e]_{\mathcal{R}}$ (επειδή η σχέση $\mathcal{R}$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου $G$ θα έχουμε $e \sim_{\mathcal{R}} e$). Έστω $g, g_1, g_2 \in [e]_{\mathcal{R}}$. Τότε χρησιμοποιώντας ότι η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ είναιο συμβιβαστή με την πράξη της $G$, θα έχουμε:

$$g_1 \sim_{\mathcal{R}} e \ \text{ και } \ g_2 \sim_{\mathcal{R}} e \quad \Longrightarrow \quad g_1g_2 \sim_{\mathcal{R}} ee = e \quad \Longrightarrow \quad g_1g_2 \in [e]_{\mathcal{R}}$$
$$g \sim_{\mathcal{R}} e \ \text{ και } \ g^{-1} \sim_{\mathcal{R}} g^{-1} \quad \Longrightarrow \quad gg^{-1} \sim_{\mathcal{R}} eg^{-1} = g^{-1} \quad \Longrightarrow \quad e \sim_{\mathcal{R}} g^{-1} \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad g^{-1} \sim_{\mathcal{R}} e \quad \Longrightarrow \quad g^{-1} \in [e]_{\mathcal{R}}$$

Οι τελευταίες σχέσεις δείχνουν ότι το υποσύνολο $[e]_{\mathcal{R}}$ είναι μια υποομάδα της $G$.

– Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η υποομάδα $[e]_{\mathcal{R}}$ είναιο κανονική: έστω $g \in G$ και $h \in [e]_{\mathcal{R}}$, δηλαδή $h \sim_{\mathcal{R}} e$. Επειδή η $\mathcal{R}$ είναι συμβιβαστή με την πράξη της ομάδας $G$, Θα έχουμε:

$$g^{-1} \sim_{\mathcal{R}} g^{-1} \ \text{ και } \ h \sim_{\mathcal{R}} e \quad \Longrightarrow \quad g^{-1}h \sim_{\mathcal{R}} g^{-1}e \quad \Longrightarrow \quad g^{-1}h \sim_{\mathcal{R}} g^{-1}$$

παρόμοια

$$g^{-1}h \sim_{\mathcal{R}} g^{-1} \text{ και } g \sim_{\mathcal{R}} g \quad \Longrightarrow \quad g^{-1}hg \sim_{\mathcal{R}} g^{-1}g \quad \Longrightarrow \quad g^{-1}hg \sim_{\mathcal{R}} e \quad \Longrightarrow \quad g^{-1}hg \in [e]_{\mathcal{R}}$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι η υποομάδα $[e]_{\mathcal{R}}$ της $G$ είναι κανονική.

– Τέλος δείχνουμε ότι $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{[e]_{\mathcal{R}}}$. Θα έχουμε $\forall g_1, g_2 \in G$:

$$g_1 \sim_{\mathcal{R}_{[e]_{\mathcal{R}}}} g_2 \iff g^{-1}g_2 \in [e]_{\mathcal{R}} \iff g^{-1}g_2 \sim_{\mathcal{R}} e$$

Επομένως αν ισχύει η τελευταία σχέση, επειδή η $\mathcal{R}$ είναι συμβιβαστή με την πράξη της ομάδας, θα έχουμε:

$$g_1 \sim_{\mathcal{R}} g_1 \text{ και } g^{-1}g_2 \sim_{\mathcal{R}} e \quad \Longrightarrow \quad g_1g^{-1}g_2 \sim_{\mathcal{R}} g_1e \quad \Longrightarrow \quad eg_2 \sim_{\mathcal{R}} g_1 \quad \Longrightarrow \quad g_2 \sim_{\mathcal{R}} g_1 \quad \Longrightarrow \quad g_1 \sim_{\mathcal{R}} g_2$$

Δηλαδή:

$$\forall g_1, g_2 \in G: \quad g_1 \sim_{\mathcal{R}_{[e]_{\mathcal{R}}}} g_2 \quad \Longrightarrow \quad g_1 \sim_{\mathcal{R}} g_2 \qquad \text{και επομένως :} \qquad \mathcal{R}_{[e]_{\mathcal{R}}} \subseteq \mathcal{R} \qquad (*)$$

Αντίστροφα αν $g_1 \sim_{\mathcal{R}} g_2$, τότε χρησιμοποιώντας ότι η $\mathcal{R}$ είναι συμβιβαστή με την πράξη της $G$ θα έχουμε:

$$g_1^{-1} \sim_{\mathcal{R}} g_1^{-1} \quad \text{και} \quad g_1 \sim_{\mathcal{R}} g_2 \quad \Longrightarrow \quad g_1^{-1}g_1 \sim_{\mathcal{R}} g_1^{-1}g_2 \quad \Longrightarrow \quad e \sim_{\mathcal{R}} g^{-1}g_2 \quad \Longrightarrow$$

$$g^{-1}g_2 \sim_{\mathcal{R}} e \quad \Longrightarrow \quad g^{-1}g_2 \in [e]_{\mathcal{R}}$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι:

$$g_1 \sim_{\mathcal{R}_{[e]_{\mathcal{R}}}} g_2$$

Επομένως

$$\forall g_1, g_2 \in G: \quad g_1 \sim_{\mathcal{R}} g_2 \quad \Longrightarrow \quad g_1 \sim_{\mathcal{R}_{[e]_{\mathcal{R}}}} g_2 \qquad \text{και επομένως :} \qquad \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_{[e]_{\mathcal{R}}} \qquad (**)$$

Από τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$ θα έχουμε ότι $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}_{[e]_{\mathcal{R}}}$ δηλαδή: $\Phi\Psi(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$. □

10.3. **Παραδείγματα Κανονικών Υποομάδων.** Θα δούμε τωρα κάποια γενικά παραδείγματα κανονικών υποομάδων.

Προφανώς κάθε ομάδα $G$ περιέχει τουλάχιστον δύο κανονικές υπομάδες: τον εαυτό της $G$ και την τετριμμένη υποομάδα $\{e\}$.

Υπενθυμίζουμε ότι το **κέντρο** $\mathsf{Z}(G)$ μιας ομάδας $G$ ορίζεται ως

$$\mathsf{Z}(G) = \big\{x \in G \mid xg = gx, \quad \forall g \in G\big\}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το κέντρο $\mathsf{Z}(G)$ αποτελεί μια υποομάδα της $G$.

**Πρόταση 10.5.** *Έστω $G$ μια ομάδα.*

(1) *Αν $H$ είναι μια υποομάδα της $G$ με την ιδιότητα $H \subseteq \mathsf{Z}(G)$, τότε η $H$ είναι κανονική.*
*Ιδιαίτερα:*
  (α΄) *Αν η $G$ είναι αβελιανή, τότε κάθε υποομάδα της είναι κανονική.*
  (β΄) *Το κέντρο $\mathsf{Z}(G)$ της $G$ είναι μια κανονική υποομάδα της $G$.*

(2) *Αν $H$ είναι μια υποομάδα της $G$ με δείκτη $[G : H] = 2$, τότε η $H$ είναι κανονική.*

(3) *Αν $H$ είναι μια υποομάδα της πεπερασμένης ομάδας $G$ και η $H$ είναι η μοναδική υποομάδα της $G$ με τάξη $\mathsf{o}(H)$, τότε η $H$ είναι κανονική.*

*Απόδειξη.* (1) Έστω $H$ μια υποομάδα της $G$ και υποθέτουμε ότι: $H \subseteq \mathsf{Z}(G)$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\forall h \in H: \quad hg = gh, \quad \forall g \in G$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση θα έχουμε, $\forall g \in G$:

$$Hg \;=\; \big\{hg \in G \mid h \in H\big\} \;=\; \big\{gh \in G \mid h \in H\big\} = gH$$

και άρα από την Πρόταση 7.4 θα έχουμε ότι η υποομάδα $H$ είναι κανονική.

Επειδή προφανώς: $G = \mathsf{Z}(G)$ αν και μόνον αν η $G$ είναι αβελιανή, το $(a')$ έπεται άμεσα από τα παραπάνω. Επίσης το (β') έπεται από τα παραπάνω θέτοντας $H = \mathsf{Z}(G)$.

(2) Έστω $H$ μια υποομάδα της $G$ με δείκτη $[G : H] = 2$. Τότε για κάθε $x \in G \setminus H$, τα αριστερά σύμπλοκα $H, xH$ είναι διαφορετικά (διότι $H = xH$ αν-ν $x \in H$). Άρα το σύνολο υποσυνόλων $\{H, xH\}$ του $G$ είναι μια διαμέριση του συνόλου $G$, και επομένως θα έχουμε $G = H \cup xH$ και $H \cap xH = \emptyset$. Προφανώς τότε θα έχουμε $xH = G \setminus H$. Παρόμοια $Hx = G \setminus H$. Άρα ικανοποιείται η συνθήκη (5) της Πρότασης 7.4: $gH = Hg$, $\forall g \in G$, διότι: αν $g \in H$, τότε προφανώς $gH = Hg$, και αν $g \notin H$, τότε όπως παραπάνω $gH = G \setminus H = Hg$. Επομένως η $H$ είναι κανονική.

(3) Για κάθε $g \in G$, θεωρούμε το σύνολο:

$$g^{-1}Hg = \big\{g^{-1}hg \in G \mid h \in H\big\}$$

Από τη Άσκηση 10.3 έχουμε ότι το σύνολο $g^{-1}Hg$ είναι μια υποομάδα της $G$. Η απεικόνιση

$$\phi : H \longrightarrow g^{-1}Hg, \quad \phi(h) = g^{-1}hg$$

είναι 1-1 και επί. Πραγματικά:

- $\phi(h_1) = \phi(h_2) \implies g^{-1}h_1g = g^{-1}h_2g \implies gg^{-1}h_1g = gg^{-1}h_2g \implies h_1g = h_2g \implies$
$$h_1gg^{-1} = h_2gg^{-1} \implies h_1 = h_2 \quad \text{και επομένως η} \quad \phi \quad \text{είναι} \quad 1-1$$
- $\forall g^{-1}hg \in g^{-1}Hg : \ \phi(h) = g^{-1}hg$ και επομένως η $\phi$ είναι επί

Επειδή η $\phi$ είναι 1-1 και επί, έπεται ότι $\mathsf{o}(H) = \mathsf{o}(g^{-1}Hg)$, $\forall g \in G$. Από την υπόθεση όμως η $H$ είναι η μοναδική υποομάδα της $G$ με τάξη $\mathsf{o}(H)$. Επομένως

$$\forall g \in G : \quad H = g^{-1}Hg$$

και άρα η $H$ είναι κανονική. □

**Παράδειγμα 10.6.** *Θεωρούμε την συμμετρική ομάδα $S_n$, όπου $n \geq 1$. Η εναλλάσσουσα ομάδα $A_n$ είναι μια υποομάδα της $S_n$ με δείκτη:*

$$[S_n : A_n] = 2$$

*Επομένως η $A_n$ είναι κανονική υποομάδα της $S_n$.*

**Παράδειγμα 10.7.** *Από την Πρόταση 10.7 έπεται ότι κάθε υποομάδα $H$ μιας ομάδας $G$ η οποία περιέχεται στο κέντρο $\mathsf{Z}(G)$ της $G$ είναι κανονική. Το αντίστροφο δεν ισχύει:*

*Έστω $G = S_3$ και $H = \langle(231)\rangle = \{(1),\ (231),\ (312)\}$. Τότε από την Πρόταση 10.7(2) έπεται ότι η $H$ είναι κανονική υποομάδα της $G$, διότι $[S_3 : H] = 2$. Όμως η $H$ δεν περιέχεται στο κέντρο της $S_3$, διότι, όπως μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα: $\mathsf{Z}(S_3) = \{(1)\}$.*

**Πρόταση 10.8.** *Έστω $G$ μια ομάδα.*

(1) *Αν $\emptyset \neq S \subseteq G$ είναι ένα τυχόν υποσύνολο της $G$, τότε το σύνολο*

$$\mathsf{N}(S) = \big\{g \in G \mid g^{-1}Sg = S\big\}$$

*είναι μια υποομάδα της $G$ η οποία καλείται ο* **κανονικοποιητής** *του $S$ στην $G$.*

(2) *Αν $H$ είναι μια υποομάδα της $G$, τότε ο κανονικοποιητής $\mathsf{N}(H)$ της $H$ στην $G$ είναι η μεγαλύτερη υποομάδα της $G$ η οποία περιέχει την $H$ ως κανονική υποομάδα.*

(3) *Η υποομάδα $H$ είναι κανονική υποομάδα της $G$ αν και μόνον αν $G = \mathsf{N}(H)$.*

*Απόδειξη.* (1) Κατ' αρχήν $e \in \mathsf{N}(S)$, διότι:

$$e^{-1}Se = eSe = \{ese \in G \mid s \in S\} = \{s \in G \mid s \in S\} = S$$

Έστω $g_1, g_2 \in \mathsf{N}(S)$. Τότε $g_1^{-1}Sg_1 = S$ και $g_2^{-1}Sg_2 = S$. Η τελευταία σχέση δίνει:

$$g_2(g_2^{-1}Sg_2) = g_2S \implies (g_2g_2^{-1})Sg_2 = g_2S \implies eSg_2 = g_2S \implies Sg_2 = g_2S \implies Sg_2g_2^{-1} = g_2Sg_2^{-1}$$
$$\implies S = g_2Sg_2^{-1}$$

Επομένως, με χρήση της τελευταίας σχέσης, θα έχουμε:

$$(g_1g_2^{-1})^{-1}S(g_1g_2^{-1}) = ((g_2^{-1})^{-1}g_1^{-1})S(g_1g_2^{-1}) = g_2(g_1^{-1}Sg_1)g_2^{-1} = g_2Sg_2^{-1} = S$$

Άρα $g_1g_2^{-1} \in \mathsf{N}(S)$, $\forall g_1, g_2 \in \mathsf{N}(S)$, και επομένως το υποσύνολο $\mathsf{N}(S)$ είναι υποομάδα της $G$.

(2) Έστω $H$ μια υποομάδα της $G$. Θα δείξουμε ότι: $H \trianglelefteq \mathsf{N}(H)$ και αν $K$ είναι μια υποομάδα της $G$ με την ιδιότητα $H \trianglelefteq K$, τότε $K \subseteq \mathsf{N}(H)$.

Κατ' αρχήν από το (1), το υποσύνολο $\mathsf{N}(H)$ είναι υποομάδα της $G$. Επιπλέον:

$$\forall h \in H: \ \text{προφανώς} \ h^{-1}Hh \subseteq H \ \text{ και } \ H \subseteq h^{-1}Hh \ \text{ διότι } \ \forall h' \in H: \ h' = h^{-1}(hh'h^{-1})h \in h^{-1}Hh$$

Άρα $\forall h \in H$: $h^{-1}Hh = H$ και επομένως $H \subseteq \mathsf{N}(H)$. Έστω τώρα $g \in \mathsf{N}(H)$. Τότε εξ' ορισμού $g^{-1}Hg = H$ και επομένως η $H$ είναι κανονική υποομάδα της $\mathsf{N}(H)$. Τέλος έστω $K$ μια υποομάδα της $G$ η οποία περιέχει την $H$ ως κανονική υποομάδα. Τότε:

$$\forall k \in K : k^{-1}Hk = H \implies k \in \mathsf{N}(H)$$

και επομένως $K \subseteq \mathsf{N}(H)$.

(3) Αν $G = \mathsf{N}(H)$, τότε η $H$ είναι κανονική υποομάδα της $G$ από το (2). Αντίστροφα, αν η $H$ είναι κανονική υποομάδα της $G$, τότε από την Πρόταση 10.4 θα έχουμε $g^{-1}Hg = H$, $\forall g \in G$, και άρα $G \subseteq \mathsf{N}(H)$, δηλαδή $G = \mathsf{N}(H)$. □

**Πρόταση 10.9.** *Έστω $G$ μια ομάδα. Τότε:*

(1) *Αν $\{H_i\}_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια κανονικών υποομάδων της $G$, τότε η τομή*

$$\bigcap_{i \in I} H_i$$

*είναι μια κανονική υποομάδα της $G$.*

(2) *Έστω $H$ και $K$ δύο κανονικές υποομάδες της $G$.*
   - (α') *Το σύνολο $HK = KH$ είναι μια κανονική υποομάδα της $G$.*
   - (β') *Η υποομάδα $H \cap K$ είναι κανονική υποομάδα της $H$ και της $K$.*
   - (γ') *Αν οι υποομάδες $H$ και $K$ είναι πεπερασμένες, τότε:*

$$\mathsf{o}(HK) = \frac{\mathsf{o}(H)\,\mathsf{o}(K)}{\mathsf{o}(H \cap K)}$$

*Απόδειξη.* (1) Έστω $g \in G$ και $h \in \cap_{i \in I} H_i$. Θα δείξουμε ότι $g^{-1}hg \in \cap_{i \in I} H_i$. Επειδή $h \in H_i$, $\forall i \in I$, και επειδή κάθε υποομάδα $H_i$ είναι κανονική, θα έχουμε:

$$\forall i \in I: \ g^{-1}hg \in H_i \implies g^{-1}hg \in \cap_{i \in I} H_i$$

Επομένως η τομή υποομάδων $\cap_{i \in I} H_i$ είναι μια κανονική υποομάδα της $G$.

(2) Έστω $H$ και $K$ δύο κανονικές υποομάδες της $G$.

(α') Παρατηρούμε ότι επειδή η $H$ είναι κανονική υποομάδα της $G$, θα έχουμε $gH = Hg$, $\forall g \in G$. Ιδιαίτερα:

$$\forall k \in K: \ kH = Hk \implies KH = HK$$

Προφανώς $e \in HK$ διότι $e \in H \cap K$. Έστω $h_1k_1, h_2k_2 \in HK$. Τότε

$$(h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} \in h_1Kh_2^{-1} \subseteq h_1KH = h_1HK = HK$$

Επομένως η $HK$ είναι κανονική υποομάδα της $G$. Επιπλέον, επειδή $\forall g \in G$: $\;g^{-1}Hg = H\;$ και $g^{-1}Kg = K$, θα έχουμε:

$$g^{-1}HKg = g^{-1}(HK)g = g^{-1}(HeK)g = g^{-1}(Hgg^{-1}K)g = (g^{-1}Hg)(g^{-1}Kg) = HK$$

και επομένως η $HK$ είναι κανονική υποομάδα της $G$.

(β') Έστω $h \in H$. Τότε για κάθε $g \in H \cap K$, το στοιχείο $h^{-1}gh$ ανήκει στην $H$ διότι $g \in H$, και επίσης ανήκει και στην $K$ διότι η $K$ είναι κανονική υποομάδα της $G$ και $g \in K$. Άρα $\forall h \in H$: $h^{-1}(H \cap K(h \in H \cap K$ και άρα η $H \cap K$ είναι κανονική υποομάδα της $H$. Παρόμοια δείχνουμε ότι η $H \cap K$ είναι κανονική υποομάδα της $K$.

(γ') Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 2.22. □

**Πόρισμα 10.10.** *Έστω $H$ και $K$ δύο κανονικές υποομάδες μιας ομάδας $G$. Αν $H \cap K = \{e\}$, τότε*

$$\forall h \in H, \;\; \forall k \in K : \quad hk = kh$$

*και η κανονική υποομάδα $HK$ της $G$ είναι «ισόμορφη» με την ομάδα ευθύ γινόμενο $H \times K$.*

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 10.9 γνωρίζουμε ότι το σύνολο $HK = KH$ είναι μια (κανονική) υποομάδα της $G$. Έστω $h \in H$ και $k \in K$. Τότε επειδή η $H$ και η $K$ είναι κανονικές υποομάδες της $G$, θα έχουμε: $gH = Hg$ και $gK = Kg$, $\forall g \in G$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις θα έχουμε:

$$hk \in hK = Kh \implies hk = k_1h, \text{ για κάποιο } k_1 \in K \text{ και}$$

$$hk \in Hk = kH \implies hk = kh_1, \text{ για κάποιο } h_1 \in H$$

Επομένως

$$hk = k_1h = kh_1 \implies k^{-1}k_1 = h_1h^{-1} \in H \cap K = \{e\} \implies h_1 = h \text{ και } k_1 = k \implies hk = kh$$

Στην Πρόταση 2.22 κατασκευάσαμε μια απεικόνιση

$$f : H \times K \longrightarrow HK, \quad f(h,k) = hk$$

η οποία προφανώς είναι επί. Αν $H \cap K = \{e\}$, τότε η $f$ είναι 1-1 διότι αν $f(h_1k_1) = f(h_2k_2)$, τότε $h_1k_1 = h_2k_2$ και άρα $h_2^{-1}h_1 = k_2k_1^{-1} \in H \cap K = \{e\}$ και άρα:

$$h_2^{-1}h_1 = k_2k_1^{-1} = e \implies h_1 = h_2 \text{ και } k_1 = k_2$$

Επομένως η $f$ είναι 1-1 και επί. Τέλος παρατηρούμε ότι:

$$f\big((h_1,k_1)(h_2,k_2)\big) = f(h_1h_2, k_1k_2) = h_1h_2k_1k_2$$

$$f(h_1k_1)f(h_2,k_2) = h_1k_1h_2k_2$$

Επειδή όπως δείξαμε παραπάνω, $k_1h_2 = h_2k_1$, οι παραπάνω σχέσεις δίνουν:

$$f\big((h_1,k_1)(h_2,k_2)\big) = f(h_1,k_1)f(h_2,k_2)$$

Η τελευταία σχέση σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η $f$ είναι 1-1 και επί δείχνει ότι η $f$ είναι ενας ισομορφισμός. □

Τέλος αναφέρουμε χωρίς απόδειξη τα ακόλουθα ενδιαφέροντα αποτέλεσματα περί ύπαρξης κανονικών υποομάδων σε μια πεπερασμένη ομάδα.

**Θεώρημα 10.11.** *Έστω $G$ μια πεπερασμένη ομάδα και $p$ ο μικρότερος πρώτος αριθμός ο οποίος διαιρεί την τάξη της ομάδας. Τότε κάθε υποομάδα $H$ της $G$ με δείκτη $[G : H] = p$ είναι κανονική στην $G$.*

**Θεώρημα 10.12.** *Έστω $G$ μια πεπερασμένη ομάδα τάξης $\mathsf{o}(G) = 2^k m$, όπου $m$ είναι περιττός. Αν η $G$ περιέχει ένα στοιχείο τάξης $2^k$, τότε η $G$ περιέχει μια κανονική υποομάδα τάξης $m$.*

**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα**

**Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**

**Τέλος Ενότητας**

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ


# Σημειώματα

**Σημείωμα Αναφοράς**