ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Αλγεβρικές Δομές Ι

Ενότητα: Ομομορφισμοί Ομάδων

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης

Τμήμα: Μαθηματικών

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

13. **Ομομορφισμοί Ομάδων**

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε απεικονίσεις μεταξύ ομάδων οι οποίες θα μας επιτρέψουν τη σύγκριση και την ταξινόμηση διάφορων κλάσεων ομάδων, ως προς τις δομικές τους ιδιότητες . Σ' αυτό το πλαίσιο, έννοια-κλειδί η οποία υπεισέρχεται είναι η έννοια του ομομορφισμού.

13.1. **Βασικές ιδιότητες και Παραδείγματα.** Αφού ορίσουμε την έννοια του ομομορφισμού ομάδων, θα την αναλύσουμε διαμέσου διάφορων παραδειγμάτων και θα αναπτύξουμε τις βασικές ιδιότητες τις οποίες ικανοποιεί ένας ομομορφισμός ομλαδων.

Ορισμός 13.1. *Έστω G και G' δύο ομάδες. Μια απεικόνιση $f\colon G \longrightarrow G'$ καλείται* **ομομορφισμός ομάδων** *αν:*

$$\forall x, y \in G: \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

Ένας **ενδομορφισμός** *της ομάδας G είναι ένας ομομορφισμός ομάδων $f\colon G \longrightarrow G$.*

Έτσι ένας ομομορφισμός $f\colon G \longrightarrow G'$ στέλνει γινόμενα xy στοιχείων x, y της G σε γινόμενα $f(x)f(y)$ των εικόνων $f(x), f(y)$ των στοιχείων x, y μέσω της f στην G'.

Σημειώνουμε ότι, χάριν ευκολίας του συμβολισμού, συμβολίζουμε με το ίδιο σύμβολο την πράξη στις ομάδες G και G'. Γενικά αν $\star$ είναι η πράξη της G και $\circ$ η πράξη της G', τότε ο Ορισμός 13.1 γράφεται: $f(x \star y) = f(x) \circ f(y)$.

Παράδειγμα 13.2. *Θεωρούμε την προσθετική ομάδα $(\mathbb{R}, +)$ των πραγματικών αριθμών και την πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ των θετικών πραγματικών αριθμών. Η απεικόνιση*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = e^x$$

είναι ένας ομομορφισμός, διότι:

$$f(x + y) = e^{x+y} = e^x e^y = f(x)f(y)$$

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση f είναι 1-1 και επί και η αντίστροφή της

$$f^{-1} := g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(y) = \log_e y$$

είναι επίσης ομομορφισμός, διότι:

$$g(xy) = \log_e(xy) = \log_e x + \log_e y = g(x) + g(y)$$

Πριν περάσουμε σε άλλα παραδείγματα ομομορφισμών ομάδων, θα δούμε πρώτα τις βασικότερες ιδιότητες τι οποίες έχει ένας ομομορφισμός ομάδων.

Πρόταση 13.3. *Έστω $f\colon G \longrightarrow G'$ ένας ομομορφισμός ομάδων.*

(1) $f(e_G) = e_{G'}$.
(2) $\forall x \in G$:
$$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$$
(3) $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in G,\ \forall n \geq 1$:
$$f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$$
(4) $\forall x \in G,\ \forall k \in \mathbb{Z}$:
$$f(x^k) = f(x)^k$$

Απόδειξη. (1) Με χρήση του νόμου διαγραφής θα έχουμε:

$$e_{G'}f(e_G) = f(e_G) = f(e_G e_G) = f(e_G)f(e_G) \quad \Longrightarrow \quad f(e_G) = e_{G'}$$

(2) Έστω $x \in G$. Τότε θα έχουμε:

$$f(x^{-1})f(x) = f(x^{-1}x) = f(e_G) = e_{G'} \qquad \text{και} \qquad f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(e_G) = e_{G'}$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι το στοιχείο $f(x^{-1})$ είναι το αντίστροφο στην G' του στοιχείου $f(x)$:

$$f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$$

(3) Προκύπτει άμεσα από το ορισμό ομομορφισμού με χρήση επαγωγής.

(4) Αν $k \geq 1$, τότε ο ισχυρισμός προκύπτει από το (3). Αν $k = 0$, τότε ο ισχυρισμός προκύπτει από το (1). Αν $k < 0$, τότε επειδή $f(x^k) = f(x^{-(-k)}) = f((x^{-k})^{-1}$ από το (2), επειδή $-k > 0$, θα έχουμε:

$$f(x^k) = f(x^{-(-k)}) = f((x^{-k})^{-1}) = f(x^{-k})^{-1} = (f(x)^{-k})^{-1} = f(x)^{-(-k)} = f(x)^k \qquad \square$$

Πρόταση 13.4. (1) *Σύνθεση ομομορφισμών ομάδων είναι ομομορφισμός ομάδων.*

(2) *Αν μια 1-1 και επί απεικόνιση $f\colon G \longrightarrow G'$ είναι ομομορφισμός, τότε η αντίστροφή της f^{-1} είναι ομομορφισμός.*

Απόδειξη. (1) Έστω f και g ομομορφισμοί μεταξύ των ομάδων G_1, G_2 και G_3:

$$G_1 \xrightarrow{f} G_2 \xrightarrow{g} G_3$$

Τότε θα έχουμε, $\forall x, y \in G_1$:

$$(g \circ f)(xy) = g(f(xy)) = g(f(x)f(y)) = g(f(x))g(f(y)) = (g \circ f)(x)(g \circ f)(y)$$

και άρα ή σύνθεση $g \circ f$ είναι ομομορφισμός ομάδων.

(2) Θα δείξουμε ότι, $\forall z, w \in G'$:

$$f^{-1}(zw) = f^{-1}(z)f^{-1}(w)$$

Έστω $f^{-1}(z) = x$, $f^{-1}(w) = y$, και $f^{-1}(zw) = t$. Τότε $f(x) = z$, $f(y) = w$, και $f(t) = zw$. Επειδή η f είναι ομομορφισμός και 1-1, θα έχουμε:

$$f(xy) = f(x)f(y) = zw = f(t) \implies xy = t \implies f^{-1}(z)f^{-1}(w) = f^{-1}(zw)$$

Επομένως η f^{-1} είναι ομομορφισμός. $\square$

Παράδειγμα 13.5. (1) *Για κάθε ομάδα G, η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{Id}_G\colon G \longrightarrow G$, $\mathrm{Id}_G(x) = x$, είναι ένας ενδομορφιμός της G, ο οποίος καλείται ο ταυτοτικός ενδομορφισμός της G.*

(2) *Αν G, G' είναι ομάδες, τότε η απεικόνιση $f\colon G \longrightarrow G'$, $f(x) = e_{G'}$, $\forall x \in G$, είναι προφανώς ένας ομομορφισμός, ο οποίος καλείται ο τετριμμένος ομομορφισμός (από την G στην G').*

(3) *Θεωρούμε την πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathsf{GL}_n(\mathbb{K})$ των αντιστρεψίμων $n \times n$ πινάκων υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ (= $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), και έστω $\mathbb{K}^*$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των μη-μηδενικών στοιχείων του $\mathbb{K}$. Ορίζουμε απεικόνιση*

$$\det : \ \mathsf{GL}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^*, \quad A \longmapsto \det(A)$$

Από γνωστή ιδιότητα των οριζουσών, θα έχουμε: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ και άρα η απεικόνιση ορίζουσας $\det$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων.

(4) *Θεωρούμε την συμμετρική ομάδα S_n και την ομάδα $\mathbb{Z}_2$ των ακεραίων modulo 2. Ορίζουμε την απιεκόνιση πρόσημο μετάθεσης sign_n ως εξής:*

$$\mathrm{sign}_n : \ S_n \longrightarrow \mathbb{Z}_2, \quad \mathrm{sign}_n(\sigma) = \begin{cases} [0], & \text{αν η } \sigma \text{ είναι άρτια} \\ [1], & \text{αν η } \sigma \text{ είναι περιττή.} \end{cases}$$

Έστω σ και τ δύο μεταθέσεις.

(α΄) *Αν σ και τ είναι άρτιες τότε και η $\sigma\tau$ είναι άρτια:*

$$\mathrm{sign}_n(\sigma) = [0], \quad \mathrm{sign}_n(\tau) = [0], \quad \mathrm{sign}_n(\sigma\tau) = [0]$$

Άρα:

$$\mathrm{sign}_n(\sigma\tau) = [0] = [0] + [0] = \mathrm{sign}_n(\sigma) + \mathrm{sign}_n(\tau)$$

(β΄) *Αν σ και τ είναι περιττές τότε η $\sigma\tau$ είναι άρτια:*

$$\mathrm{sign}_n(\sigma) = [1], \quad \mathrm{sign}_n(\tau) = [1], \quad \mathrm{sign}_n(\sigma\tau) = [0]$$

Άρα:

$$\mathrm{sign}_n(\sigma\tau) = [0] = [1] + [1] = \mathrm{sign}_n(\sigma) + \mathrm{sign}_n(\tau)$$

(γ΄) *Αν η σ είναι άρτια και τ είναι περιττή τότε η $\sigma\tau$ είναι περιττή:*

$$\mathrm{sign}_n(\sigma) = [0], \quad \mathrm{sign}_n(\tau) = [1], \quad \mathrm{sign}_n(\sigma\tau) = [1]$$

Άρα:

$$\mathrm{sign}_n(\sigma\tau) = [1] = [1] + [0] = \mathrm{sign}_n(\sigma) + \mathrm{sign}_n(\tau)$$

(δ΄) *Αν η σ είναι περιττή και η τ είναι άρτια, τότε η $\sigma\tau$ είναι περιττή:*

$$\mathrm{sign}_n(\sigma) = [0], \quad \mathrm{sign}_n(\tau) = [1], \quad \mathrm{sign}_n(\sigma\tau) = [1]$$

Άρα:

$$\mathrm{sign}_n(\sigma\tau) = [1] = [0] + [1] = \mathrm{sign}_n(\sigma) + \mathrm{sign}_n(\tau)$$

Άρα σε κάθε π[ερίπτωση βλέπουμε ότι, $\forall \sigma, \tau \in S_n$: $\mathrm{sign}_n(\sigma\tau) = \mathrm{sign}_n(\sigma) + \mathrm{sign}_n(\tau)$. Άρα η απεικόνιση sign_n είναι ένας ομομορφισμός ομάδων.

(5) *Έστω $n \geq 1$, και έστω οι ομάδες $(\mathbb{Z}_n, +)$ και $(\mathbb{Z}, +)$. Ορίζουμε την απεικόνιση φυσικής προβολής*

$$\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \quad \pi(m) = [r]_n, \quad \text{όπου} \quad r = \text{ υπόλοιπο διαίρεσης του } m \text{ με το } n$$

Τότε η απεικόνιση π είναι ομομορφισμός. Πράγματικά, έστω $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Τότε από την Ευκλείδεια διαίρεση, θα έχουμε:

$$m_1 = nq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < n, \quad m_2 = nq_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < n, \quad m_1 + m_2 = nq_3 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < n,$$

Έτσι

$$\pi(m_1) = r_1, \quad \pi(m_2) = r_2, \quad \pi(m_1 + m_2) = r_3$$

Όμως

$$(nq_1 + r_1) + (nq_2 + r_2) = m_1 + m_2 = nq_3 + r_3 \implies \big(n(q_1 + q_2) + (r_1 + r_2)\big) = nq_3 + r_3 \implies$$

$$r_3 - (r_1 + r_2) = n(q_1 + q_2 - q_3) \implies n \mid r_3 - (r_1 + r_2) \implies [r_3]_n = [r_1 + r_2]_n = [r_1]_n + [r_2]_n$$

Η τελευταία σχέση όμως γράφεται

$$\pi(m_1 + m_2) = \pi(m_1) + \pi(m_2)$$

και άρα η π είναι ένας ομομορφισμός ομάδων.

(6) *Έστω G_1 και G_2 δύο ομάδες και θεωρούμε την ομάδα ευθύ γινόμενο $G_1 \times G_2$. Ορίζουμε τις απεικονίσεις προβολές π_1 και π_2 ως εξής:*

$$G_1 \xleftarrow{\pi_1} G_1 \times G_2 \xrightarrow{\pi_2} G_2, \quad \text{όπου} \quad \pi_1(g_1, g_2) = g_1 \quad \text{και} \quad \pi_2(g_1, g_2) = g_2$$

Τότε:

$$\pi_1\big((g_1, g_2)(h_1, h_2)\big) = \pi_1(g_1h_1, g_2h_2) = g_1h_1 = \pi_1(g_1, g_2)\pi(g_2, h_2)$$

Άρα η π_1 είναι ομομορφισμός και παρόμοια η π_2 είναι ομομορφισμός.

(7) *Έστω $G = \langle a \rangle$ μια άπειρη κυκλική ομάδα. Τότε από το Θεώρημα 5.20 η απεικόνιση*

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow G, \quad f(n) = a^n$$

είναι ένας ομομορφισμός ομάδων.

(8) *Έστω $G = \langle a \rangle$ μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα τάξης n. Τότε από το Θεώρημα 5.20 η απεικόνιση*

$$f : \mathbb{Z}_n \longrightarrow G, \quad f([k]_n) = a^k$$

είναι ένας ομομορφισμός ομάδων.

13.2. **Ομομορφισμοί και Υποομάδες.** Στην παρούσα υπο-ενότητα θα δούμε ότι οι ομομορφισμοί ομάδων συμπεριφέρονται ομαλά βως προς τις υποομάδες.

Πρόταση 13.6. *Έστω $f : G \longrightarrow G'$ ένας ομομορφισμός ομάδων.*

(1) *Για κάθε υποομάδα H της G, το σύνολο $f(H)$ είναι υποομάδα της G':*

$$H \leq G \implies f(H) \leq G'$$

(2) *Για κάθε υποομάδα K της G', το σύνολο $f^{-1}(K)$ είναι υποομάδα της G:*

$$K \leq G' \implies f^{-1}(K) \leq G$$

Απόδειξη. (1) Επειδή $H \leq G$, θα έχουμε ότι $e_G \in H$ και άρα από την Πρόταση 13.3 θα έχουμε $e_{G'} = f(e_G) \in f(H)$. Έστω $z, w \in f(H)$. Τότε $z = f(x)$ και $w = f(y)$, όπου $x, y \in H$. Επειδή $H \leq G$, θα έχουμε: $xy^{-1} \in H$, και άρα χρησιμοποιώντας την Πρόταση 13.3 θα έχουμε:

$$xy^{-1} \in H \implies f(xy^{-1}) \in f(H) \implies f(x)f(y^{-1}) \in f(H) \implies f(x)f(y)^{-1} \in f(H) \implies zw^{-1} \in H$$

Επομένως το υποσύνολο $f(H)$ είναι υποομάδα της G'.

(2) Επειδή $K \leq G'$, έπεται ότι $e_{G'} \in K$ και άρα επειδή $e_{G'} = f(e_G)$, θα έχουμε ότι $e_G \in f^{-1}(K)$. Έστω $z, w \in f^{-1}(K)$. Τότε $f(z) \in K$ και $f(w) \in K$. Επειδή $K \leq G'$, θα έχουμε $f(z)f(w)^{-1} \in K$. Όμως από την Πρόταση 13.3, θα έχουμε:

$$K \ni f(z)f(w)^{-1} = f(z)f(w^{-1}) = f(zw^{-1}) \implies zw^{-1} \in f^{-1}(K)$$

Επομένως το υποσύνολο $f^{-1}(K)$ είναι υποομάδα της G. □

Επειδή κάθε ομάδα H έχει τουλάχιστον δύο υποομάδες: την τετριμμένη $\{e_H\}$ και την ίδια την ομάδα H, κάθε ομομορφισμός ομάδων $f : G \longrightarrow G'$ ορίζει δύο υποομάδες: την $f^{-1}(\{e_{G'}\}) \leq G$ και την $f(G) \leq G'$. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 13.7. *Έστω $f : G \longrightarrow G'$ ένας ομομορφισμός ομάδων.*

(1) *Ο **πυρήνας του** f είναι το υποσύνολο του συνόλου G το οποίο ορίζεται ως:*

$$\mathsf{Ker}(f) = \big\{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\big\}$$

(2) *Η **εικόνα του** f είναι το υποσύνολο του συνόλου G' το οποίο ορίζεται ως:*

$$\mathsf{Im}(f) = \big\{f(x) \in G' \mid x \in G\big\}$$

Πόρισμα 13.8. *Έστω $f : G \longrightarrow G'$ ένας ομομορφισμός ομάδων.*

(1) *Ο πυρήνας $\mathsf{Ker}(f)$ του f είναι μια υποομάδα της G.*

(2) *Η εικόνα $\mathsf{Im}(f)$ του f είναι μια υποομάδα της G.*

Απόδειξη. Επειδή

$$\mathsf{Ker}(f) = \big\{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\big\} = f^{-1}(\{e_{G'}\})$$
$$\mathsf{Im}(f) = \big\{f(x) \in G' \mid x \in G\big\} = f(G)$$

και επειδή $\{e_{G'}\} \leq G'$ και $G \leq G$, οι ισχυρισμοί έπονται άμεσα από την προηγούμενη Πρόταση. □

Ορισμός 13.9. *Έστω $f\colon G \longrightarrow G'$ ένας ομομορφισμός ομάδων.*

(1) *Ο ομομορφισμός f καλείται* **μονομορφισμός** *αν η απεικόνιση f είναι 1-1.*

$$f\ :\ G_1 \rightarrowtail G_2$$

(2) *Ο ομομορφισμός f καλείται* **επιμορφισμός** *αν η απεικόνιση f είναι επί, και τότε συνήθως θα γράφουμε:*

$$f\ :\ G_1 \twoheadrightarrow G_2$$

(3) *Ο ομομορφισμός f καλείται* **ισομορφισμός** *αν η απεικόνιση f είναι 1-1 και επι, και τότε συνήθως θα γράφουμε:*

$$f\ :\ G_1 \xrightarrow{\cong} G_2$$

Ένας **αυτομορφισμός** *της G είναι ένας ισομορφισμός $f\ :\ G \xrightarrow{\cong} G$*

Παράδειγμα 13.10. *Θεωρούμε την πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathsf{U}(\mathbb{Z}_{12})$ των αντιστρεψίμων στοιχείων του $\mathbb{Z}_{12}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός*

$$f\ :\ \mathsf{U}(\mathbb{Z}_{12}) \xrightarrow{\cong} V_4$$

όπου $V_4 = \{e, a, b, ab\}$ είναι η (πολλαπλαστική) ομάδα του Klein. Πραγματικά: γνωρίζουμε ότι η τάξη της $\mathsf{U}(\mathbb{Z}_{12})$ είναι $\varphi(12) = 4$ και μάλιστα:

$$\mathsf{U}(\mathbb{Z}_{12}) = \big\{[k] \in \mathbb{Z}_{12}\ \mid\ 1 \leq k \leq 12\ \ \&\ \ (k, 12) = 1\big\} = \big\{[1]_{12},\ [5]_{12},\ [7]_{11},\ [11]_{12}\big\}$$

Τότε ορίζοντας

$$f([1]_{12}) = e, \qquad f([5]_{12}) = a, \qquad f([7]_{12}) = b, \qquad f([11]_{12}) = ab$$

βλέπουμε εύκολα ότι η f είναιο ομομορφισμός, ο οποίος προφανώς είναι 1-1 και επί, άρα είναι ισομορφισμός ομάδων.

Θα κατασκευάσουμε έναν ισομορφισμό:

$$g\ :\ V_4 \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

Πράγματικά ορίζοντας:

$$g(e) = ([0]_2, [0]_2), \qquad g(a) = ([1]_2, [0]_2), \qquad g(b) = ([0]_2, [1]_2), \qquad g(ab) = ([1]_2, [1]_2)$$

βλέπουμε άμεσα ότι η απεικόνιση g είναι ισομορφισμός ομάδων.

Επειδή η σύνθεση ισομορφισμών είναι προφανώς ισομορφισμός, θέτοντας $h := g \circ f$, θα έχουμε έναν ισομορφισμό

$$f\ :\ \mathsf{U}(\mathbb{Z}_{12}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

Παράδειγμα 13.11. *Έστω G μια ομάδα. Για κάθε $x \in G$, ορίζουμε μια απεικόνιση:*

$$f_x\ :\ G \longrightarrow G, \qquad f_x(a) = x^{-1}ax$$

Τότε η απεικόνιση f_x είναι ένας αυτομορφισμός της G. Πραγματικά θα έχουμε:

(1) *Η f_x είναι ομομορφισμός, διότι:*

$$f_x(ab) = x^{-1}abx = x^{-1}aebx = x^{-1}ax^{-1}xbx = (x^{-1}ax)(x^{-1}bx) = f_x(a)f_x(b)$$

(2) *Η f_x είναι 1-1, διότι:*

$$f_x(a) = f_x(b) \implies x^{-1}ax = x^{-1}bx \implies ax = bx \implies a = b$$

και η f_x είναι επί, διότι:

$$\forall b \in G: \quad f_x(xbx^{-1}) = x^{-1}(xbx^{-1})x = x^{-1}xbx^{-1}x = ebe = b$$

Ο αυτομορφισμός f_x, $\forall x \in G$, καλείται ο **εσωτερικός αυτομορφισμός** *τον οποίον ορίζει το στοιχείο x. Ένας αυτομορφισμός f καλείται εσωτερικός αν και μόνον αν $f = f_x$ για κάποιο $x \in G$.*

Άσκηση 288. *Έστω G μια ομάδα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Η G είναι αβελιανή.*
(2) *Η απεικόνιση $f\colon G \longrightarrow G$, $f(x) = x^{-1}$ είναι ομομορφισμός.*
(3) *Η απεικόνιση $g\colon G \longrightarrow G$, $f(x) = x^2$ είναι ομομορφισμός.*
(4) *Η απεικόνιση $h\colon G \times G \longrightarrow G$, $h(x, y) = xy$ είναι ομομορφισμός.*

Πρόταση 13.12. *Έστω $f\colon G \longrightarrow G'$ ένας ομομορφισμός ομάδων.*

(1) *Ο f είναι μονομορφισμός αν και μόνον αν $\mathsf{Ker}(f) = \{e_G\}$.*
(2) *Ο f είναι επιμορφισμός αν και μόνον αν $\mathsf{Im}(f) = G'$.*
(3) *Ο f είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν υπάρχει ομομορφισμός $g\colon G' \longrightarrow G$ έτσι ώστε:*

$$f \circ g = \mathrm{Id}_{G'} \qquad \textit{και} \qquad g \circ f = \mathrm{Id}_G$$

και τότε: $g = f^{-1}$ και η f^{-1} είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. (1) Έστω ότι η f είναι μονομορφισμός, δηλαδή 1-1, και έστω $x \in \mathsf{Ker}(f)$. Τότε $f(x) = e_{G'}$. Από την Πρόταση 13.3 γνωρίζουμε ότι $f(e_G) = e_{G'}$. Επειδή $f(x) = e_{G'} = f(e_G)$ και η f είναι 1-1, έπεται ότι $x = e_G$. Επομένως $\mathsf{Ker}(f) \subseteq \{e_G\}$, και άρα $\mathsf{Ker}(f) = \{e_G\}$ καθώς πάντα έχουμε $e_G \in \mathsf{Ker}(f)$ διότι η $\mathsf{Ker}(f) \leq G$.

Αντίστροφα έστω $\mathsf{Ker}(f) = \{e_G\}$ και έστω $f(x) = f(y)$. Τότε

$$f(x) = f(y) \implies f(x)f(y)^{-1} = e_{G'} \implies f(x)f(y^{-1}) = e_{G'} \implies f(xy^{-1}) = e_{G'} \implies$$
$$xy^{-1} \in \mathsf{Ker}(f) = \{e_G\} \implies xy^{-1} = e_G \implies x = y$$

και επομένως η f είναι 1-1.

(2) Προφανώς θα έχουμε από τον ορισμό ότι η f είναι επιμορφισμός αν και μονον αν η f είναι επί αν και μόνον αν $f(G) = \mathsf{Im}(f) = G'$.

(3) Έστω ότι ο ομομορφισμός f είναι ισομορφισμός, και άρα η f είναι 1-1 και επί. Τότε από την Πρόταση 13.4(2), έπεται ότι η f^{-1} είναι ομομορφισμός και θέτοντας $g = f^{-1}$ βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι ζητούμενες σχέσεις.

Αντίστροφα αν υπάρχει ομομορφισμός $g\colon G' \longrightarrow G$ έτσι ώστε $g \circ f = \mathrm{Id}_G$ και $f \circ g = \mathrm{Id}_{G'}$, τότε θα έχουμε:

(α) Η f είναι 1-1, διότι αν $f(x) = e_G$, τότε

$$g(f(x)) = g(e_G) \implies (g \circ f)(x) = e_{G'} \implies \mathrm{Id}_G(x) = e_G \implies x = e_G \implies \mathsf{Ker}(f) = \{e_G\}$$

και από το (1) έπεται ότι η f είναι 1-1.

(β) Η f είναι επί, διότι αν $y \in G'$, τότε επειδή $f \circ g = \mathrm{Id}_G$, θα έχουμε:

$$y = (f \circ g)(y) \implies y = f(g(y)), \quad \text{όπου} \quad x := g(y) \in G \quad \text{και} \quad f(x) = y$$

και επομένως η f είναι επί.

Από τα (α) και (β) έπεται ότι η f είναι 1-1 και επί, και άρα η f είναι ισομορφισμός. □

Άσκηση 289. *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$f : \mathbb{Z}_{16} \longrightarrow \mathsf{U}(\mathbb{Z}_{17}), \qquad f([k]_{16}) = [3^k]_{17}$$

είναι ένας ισομορφισμός.

Άσκηση 290. *Πόσοι ομομορφισμοι* $\mathbb{Z}_6 \longrightarrow S_3$ *υπάρχουν;*

Κλείνουμε την παρούσα υπο-ενότητα με τη ακόλουθη σημαντική γενίκευση της Πρότασης 13.6 και η οποία, δοθέντος ενός ομομορφισμού ομάδων $f : G_1 \longrightarrow G_2$, μας δίνει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των υποομάδων της G_1 οι οποίες περιέχουν τον πυρήνα της f, και των υποομάδων της G_2 οι οποίες περιέχονται στην εικόνα του f:

Θεώρημα 13.13. *Έστω $f : G_1 \longrightarrow G_2$ ένας ομομορφισμός ομάδων. Τότε η απεικόνιση*

$$\Phi : \big\{\text{Υποομάδες } H \text{ της } G_1 \text{ έτσι ώστε: } \mathsf{Ker}(f) \leq H\big\} \longrightarrow \big\{\text{Υποομάδες } K \text{ της } G_2 \text{ έτσι ώστε: } K \leq \mathsf{Im}(f)\big\}$$

$$H \longmapsto \Phi(H) = f(H)$$

είναι 1-1 και επί, με αντίστροφη την απεικόνιση:

$$\Psi : \big\{\text{Υποομάδες } K \text{ της } G_2 \text{ έτσι ώστε: } K \leq \mathsf{Im}(f)\big\} \longrightarrow \big\{\text{Υποομάδες } H \text{ της } G_1 \text{ έτσι ώστε: } \mathsf{Ker}(f) \leq H\big\}$$

$$K \longmapsto \Phi(K) = f^{-1}(K)$$

Απόδειξη. Αν $H \leq G_1$, τότε προφανώς $f(H) \subseteq f(G) = \mathsf{Im}(f)$, και αν $K \leq \mathsf{Im}(f) = f(G)$, τότε $\{e_{G_2}\} \subseteq K$ και άρα $\mathsf{Ker}(f)f^{-1}(\{e_{G_2}\}) \subseteq f^{-1}(K) \subseteq G$. Επομένως από την Πρόταση 13.6 ότι οι απεικονίσεις Φ και Ψ είναι καλά ορισμένες μεταξύ των παραπάνω αναφερομένων συνόλων υποομάδων.

Μένει να δείξουμε ότι:

$$\mathsf{Ker}(f) \leq H \leq G \implies \Psi\Phi(H) = H \quad \text{και} \quad K \leq \mathsf{Im}(f) \implies \Phi\Psi(K) = K$$

Με άλλα λόγια αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\mathsf{Ker}(f) \leq H \leq G \implies f^{-1}(f(H)) = H \quad \text{και} \quad K \leq \mathsf{Im}(f) \implies f(f^{-1}(K)) = K$$

Παρατηρούμε ότι, με τους παραπάνω συμβολισμούς, θα έχουμε:

$$\mathsf{Ker}(f) \leq H \implies \mathsf{Ker}(f) \cdot H \subseteq H \qquad \text{και}$$

(1) Υποθέτουμε ότι: $\mathsf{Ker}(f) \leq H \leq G$.
Έστω $h \in H$. Τότε $f(h) \in f(H)$ και επομένως $h \in f^{-1}(f(H))$. Άρα: $H \subseteq f^{-1}(f(H))$.
Αντίστροφα, έστω $x \in f^{-1}(f(H))$. Τότε $f(x) \in f(H)$ και άρα $f(x) = f(h)$, όπου $h \in H$. Τότε:

$$f(x) = f(h) \implies f(x)f(h)^{-1} = e_G \implies f(x)f(h^{-1}) = e_G \implies f(xh^{-1}) = e_G \implies$$
$$xh^{-1} \in \mathsf{Ker}(f) \implies x \in \mathsf{Ker}(f)h \subseteq \mathsf{Ker}(f) \cdot H \subseteq H$$

και επομένως $f^{-1}(f(H)) \subseteq H$. Άρα:

$$f^{-1}(f(H)) = H$$

(2) Υποθέτουμε ότι $K \leq \mathsf{Im}(f) = f(G)$.
Έστω $y \in f(f^{-1}(K))$. Τότε $y = f(x)$, όπου $x \in f^{-1}(K)$ και επομένως $f(x) \in K$. Τότε $y = f(x) \in K$ και άρα $f(f^{-1}(K)) \subseteq K$.
Αντίστροφα έστω $k \in K \leq f(G)$. Τότε $k = f(x)$, για κάποιο $x \in G$ και τότε προφανώς $x \in f^{-1}(K)$ διότι $f(x) = k \in K$. Άρα $k = f(x) \in f(f^{-1}(K))$ και επομένως $K \subseteq f(f^{-1}(K))$. Άρα:

$$K = f(f^{-1}(K))$$

Από τα (1) και (2) έπεται ότι $\Psi\Phi(H) = H$ για κάθε υποομάδα H της G_1 η οποία περιέχει τον πυρήνα της G και $\Phi\Psi(K) = K$, για κάθε υποομάδα K της G_2 η οποία περιέχεται στην εικόνα της f. Επομένως η απεικόνιση Φ είναι 1-1 και επί και η Ψ είναι η αντίστροφή της. □

13.3. **Δομικές Ιδιότητες Ομάδων - Κριτήρια (Μη)-Ισομορφίας.** Στην παρούσα υπο-ενότητα θα δούμε εν συντομία κάποιες ιδιότητες οι οποίες είναι κοινές για ομάδες οι οποίες είναι ισόμορφες.

Πρόταση 13.14. *Θεωρούμε την ακόλουθη σχέση* **ισομορφίας** *στην συλλογή* $\mathbf{Grp}$ *όλων των ομάδων:*

$$\forall G_1, G_2 \in \mathbf{Grp}: \qquad G_1 \cong G_2 \qquad \textit{υπάρχει ένας ισομορφισμός} \qquad f : G_1 \longrightarrow G_2$$

Τότε η σχέση $\cong$ *είναι μια σχέση ισοδυναμίας επι της συλλογής* $\mathbf{Grp}$.

Απόδειξη. (1) Η σχέση $\cong$ είναι ανακλαστική, δηλαδή $G \cong G$ για κάθε ομάδα G, διότι η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{Id}_G : G \longrightarrow G$ είναι πάντα ισομορφισμός.

(2) Έστω $G_1 \cong G_2$, και έστω $f : G_1 \longrightarrow G_2$ ένας ισομορφισμός. Τότε από την Πρόταση 13.10, η αντίστροφη $f^{-1} : G_2 \longrightarrow G_1$ της f είναι ισομορφισμός και άρα: $G_2 \cong G_1$. Άρα η σχέση $\cong$ είναι συμμετρική.

(3) Έστω τώρα $G_1 \cong G_2$ και $G_2 \cong G_3$. Τότε υπάρχουν ισομορφισμοί ομάδων $f : G_1 \longrightarrow G_2$ και $g : G_2 \longrightarrow G_3$. Από την Πρόταση 13.4 έπεται άμεσα ότι η σύνθεση $g \circ f : G_1 \longrightarrow G_3$ είναι ισομορφισμός και επομένως θα έχουμε $G_1 \cong G_3$. Άρα η σχέση $\cong$ είναι μεταβατική.

Άρα η σχέση $\cong$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας. □

Από την παραπάνω Πρόταση έπεται ότι η σχέση ισοδυναμίας “ $\cong$ ” επί της συλλογής $\mathbf{Grp}$ όλων των ομάδων, επάγει μια διαμέριση της συλλογής $\mathbf{Grp}$:

$$\mathbf{Grp}/\cong \; = \; \big\{[G]_{\cong} \subseteq \mathbf{Grp} \mid G \in \mathbf{Grp}\big\}$$

όπου για κάθε ομάδα G, η κλάση ισοδυναμίας της G ως προς την “ $\cong$ ”:

$$[G]_{\cong} \; = \; \big\{G' \in \mathbf{Grp} \mid G' \cong G\big\}$$

καλείται **κλάση ισομορφίας** της ομάδας G.

Επομένως η κλάση ισοδυναμίας $[G]_{\cong}$ μιας ομάδας G, αποτελείται από όλες τις ομάδες G' οι οποίες είναι ισόμορφες με την G, και όπως θα δούμε αργότερα όλες αυτές οι ομάδες έχουν τις ίδιες δομικές ιδιότητες, δηλαδή τις ίδιες ιδιότητες οι οποίες απορρέουν από τα αξιώματα μιας ομάδας. Γι' αυτόν τον λόγο ισόμορφες ομάδες θα θεωρούνται ότι είναι ίδιες και θα τις ταυτίζουμε, μέσω κάποιου ισομορφισμού.

Έστω G μια ομάδα, και έστω

$$[G]_{\cong} \; = \; \big\{G' \in \mathbf{Grp} \mid G' \cong G\big\}$$

η κλάση ισομορφίας της G ως προς τη σχέση “ $\cong$ ” ισομορφίας.

Ορισμός 13.15. *Μια ιδιότητα (P) η οποία αφορά μια ομάδα καλείται* **δομική ιδιότητα ομάδας** *αν και μόνον αν:*

$$\textit{μια ομάδα } G \textit{ ικανοποιεί την ιδιότητα } (P) \iff \textit{κάθε ομάδα } G' \in [G]_{\cong} \textit{ ικανοποιεί την ιδιότητα } (P)$$

Δηλαδή μια ιδιότητα η οποία αφορά ομάδες είναι δομική ιδιότητα αν και μόνον αν: η ιδιότητα ισχύει σε μια ομάδα G αν και μόνον αν ισχύει σε κάθε ομάδα η οποία είναι ισόμορφη με την G.

Παράδειγμα 13.16. *Οι επόμενες ιδιότητες είναι δομικές ιδιότητες ομάδας:*

(1) *Η τάξη μιας ομάδας: αν G είναι μια ομάδα με $\mathsf{o}(G) = n$ ($< \infty$ ή $= \infty$) τότε προφανώς κάθε ομάδα G' η οποία είναι ισόμορφη με την G έχει τάξη $\mathsf{o}(G') = \mathsf{o}(G)$.*

(2) *Η ιδιότητα μιας ομάδας να είνα αβελιανή:* αν G είναι μια αβελιανή ομάδα τότε προφανώς κάθε ομάδα G' η οποία είναι ισόμορφη με την G είναι αβελιανή.
(3) *Η ιδιότητα μιας ομάδας να είνα κυκλική:* αν G είναι μια κυκλική ομάδα τότε προφανώς κάθε ομάδα G' η οποία είναι ισόμορφη με την G μέσω ενός ισομορφισμού f, είναι κυκλική, διότι αν $G = \langle a \rangle$, τότε $G' = \langle f(a) \rangle$.
(4) Η ιδιότητα μια ομάδα να έχει στοιχεία πεπερασμένης ή άπειρης τάξης.
(5) Η ιδιότητα ότι το πλήθος των υποομάδων μιας ομάδας G να είναι κάποιος αριθμός (πεπερασμένος ή άπειρος) μεταφέρεται σε κάθε ομάδα ισόμορφη με την G.
(6) Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα 14, αν περιορισθούμε σε κυκλικές ομάδες, τότε η τάξη μιας κυκλικής ομάδας προσδιορίζει την κλάση ισομορφίας της.
(7) Η ιδιότητα ότι όλες οι υποομάδες μιας ομάδας G να είναι αβελιανές, κυκλικές, κανονικές, κτλ, μεταφέρεται σε κάθε ισόμορφη με την G ομάδα.

Επομένως αν μια ομάδα G ικανοποιεί μια δομική ιδιότητα ομάδας (P) και μια ομάδα H δεν ικανοποιεί την (P), τότε οι ομάδες G και H δεν είναι ισόμορφες.

Για παράδειγμα η προσθετική ομάδα $(\mathbb{R}, +)$ και η πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ δεν είναι ισόμορφες, διότι η ομάδα $\mathbb{R}^*$ έχει ένα στοιχείο τάξης 2, το -1, και η $\mathbb{R}$ δεν έχει κανένα στοιχείο πεπερασμένης τάξης εκτός του ταυτοτικού.

Άσκηση 291. *Θεωρούμε το σύνολο*

$$G = \Big\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_3) \ \mid \ a \cdot c = 1 \ \text{ στο } \ \mathbb{Z}_3 \Big\}$$

(1) *Να δείξετε ότι το σύνολο G εφοδιασμένο με την συνήθη πολλαπλασιασμό πινάκων αποτελεί ομάδα.*
(2) *Να δείξετε ότι η ομάδα G είναι κυκλική τάξης 6.*
(3) *Να βρεθεί μια υποομάδα H της G τάξης 3 και να υπολογισθεί η ομάδα πηλίκο G/H.*
(4) *Να βρεθεί μια υποομάδα K της G τάξης 2 και να υπολογισθεί η ομάδα πηλίκο G/K.*

13.4. **Ομομορφισμοί και Κανονικές Υποομάδες.** Υπάρχει μια άμεση σχέση μεταξύ κανονικών υποομάδων μιας ομάδας G και ομομορφισμών ομάδων που εκκινούν από την G. Στην παρούσα ενότητα θα αναλύσουμε αυτή τη σχέση.

Θα δούμε τώρα μια σημαντική ιδιότητα την οποία έχει ο πυρήνας ενός ομομορφισμού.

Πρόταση 13.17. *Έστω $f\colon G \longrightarrow G'$ ένας ομομορφισμός ομάδων. Τότε ο πυρήνας $\mathsf{Ker}(f)$ είναι μια κανονική υποομάδα της G:*

$$\mathsf{Ker}(f) \trianglelefteq G \qquad \textit{δηλαδή} \qquad \forall g \in G: \; g\,\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Ker}(f)g$$

Απόδειξη. Θέτουμε για ευκολία:

$H := \mathsf{Ker}(f)$ και θα δείξουμε ότι: $\quad gH = f^{-1}\big(\{f(g)\}\big) = \big\{x \in G \mid f(x) = f(g)\big\} = Hg, \quad \forall g \in G$

Θα έχουμε:

$$x \in f^{-1}\big(\{f(g)\}\big) \implies f(x) = f(g) \implies f(g)^{-1}f(x) = e_{G'} \implies f(g^{-1}x) = e_{G'} \implies$$
$$g^{-1}x \in H = \mathsf{Ker}(f) \implies x \in gH \implies f^{-1}\big(\{f(g)\}\big) \subseteq gH \qquad (*)$$

Αντίστροφα:

$$y \in gH \implies y = gh, \text{ όπου } h \in H \implies f(y) = f(gh) = f(g)f(h) = f(g)e_{G'} = f(g) \implies$$
$$y \in f^{-1}\big(\{f(g)\}\big) \implies gH \subseteq f^{-1}\big(\{f(g)\}\big) \qquad (**)$$

Από τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$, έπεται ότι

$$gH = f^{-1}\big(\{f(g)\}\big) \qquad \text{και παρόμοια} \qquad f^{-1}\big(\{f(g)\}\big) = Hg$$

Επομένως θα έχουμε:

$$\forall g \in G: \; g\,\mathsf{Ker}(f) = \mathsf{Ker}(f)g = f^{-1}\big(\{f(g)\}\big)$$

και άρα από την Πρόταση 10.4, έπεται ότι ο πυρήνας $\mathsf{Ker}(f)$ είναι κανονική υποομάδα της G. □

Η παραπάνω Πρόταση πιστοποιεί ότι ο πυρήνας ενός ομομορφισμού είναι κανονική υποομάδα. Φυσιολογικά τίθεται το ερώτημα αν, αντίστροφα, κάθε κανονική υποομάδα είναι πυρήνας ενός ομομορφισμού.

Η ακόλουθη Πρόταση δίνει καταφατική απάντηση στο παραπάνω ερώτημα.

Πρόταση 13.18. *Έστω $H \trianglelefteq G$ μια κανονική υποομάδα της ομάδας G, και έστω G/H η επαγόμενη ομάδα-πηλίκο.*

(1) *Η απεικόνιση προβολής*
$$\pi_H : G \longrightarrow G/H, \quad \pi_H(x) = [x]_H = xH$$
είναι ένας επιμορφισμός ομάδων.

(2)
$$H = \mathsf{Ker}(\pi_H)$$

Απόδειξη. (1) Επειδή η H είναι κανονική υποομάδα της G, γνωρίζουμε ότι ο πολλαπλασιασμός στο σύνολο-πηλίκο G/H ικανοποιεί τη σχέση $[x]_H[y]_H = [xy]_H$. Επομένως θα έχουμε:

$$\pi_H(xy) = [xy]_H = (xy)H = (xH)(yH) = [x]_H[y]_H = \pi_H(x)\pi_H(y)$$

και άρα η π_H είναι ομομορφισμός, και προφανής η π_H είναι επιμορφισμός.

(2) Θα έχουμε:

$$\mathsf{Ker}(\pi_H) = \big\{x \in G \mid \pi_H(x) = e_{G/H}\big\} = \big\{x \in G \mid xH = e_G H\big\} = \big\{x \in G \mid x \in H\big\} = H \qquad □$$

Παρατήρηση 13.19. *Θα δούμε στην ενότητα* 15 *ότι «μέχρι ισομορφισμό» η αντιστοιχία*

$$\Phi : \big\{\textit{κανονικές υποομάδες } H \textit{ της } G\big\} \longrightarrow \big\{\textit{επιμορφισμοί } f\colon G \longrightarrow G'\big\}, \quad \Phi(H) = \pi_H\colon G \longrightarrow G/H$$

είναι 1-1 και επί, με αντίστροφη την αντιστοιχία

$$\Psi : \big\{\textit{επιμορφισμοί } f\colon G \longrightarrow G'\big\} \longrightarrow \big\{\textit{κανονικές υποομάδες } H \textit{ της } G\big\}, \qquad \Psi(f) = \mathsf{Ker}(f)$$

Επομένως υπό αυτή την οπτική γωνία, κανονικές υποομάδες της G και επιμορφισμοί οι οποίοι εκκινούν από την G είναι ισοδύναμες έννοιες.

Ήδη έχουμε δείξει στην Πρόταση 13.13, *ότι για κάθε κανονική υποομάδα $H \trianglelefteq G$ ισχύει $H = \mathsf{Ker}\,\pi_H$ το οποίο σημαίνει ότι:*

$$\forall\, H \trianglelefteq G : \qquad \Phi\Psi(H) = H$$

Έτσι μένει να δείξουμε ότι: για κάθε επιμορφισμό ομάδων $f\colon G \longrightarrow G'$, ο επιμορφισμός f είναι «ισόμορφος» με τον κανονικό επιμορφισμό $\pi_H\colon G \longrightarrow G/H$, όπου $H := \mathsf{Ker}(f)$. Ιδιαίτερα πρέπει να δείξουμε ότι ο επιμορφισμός f επάγει έναν ισομορφισμό

$$\widetilde{f} : G/\,\mathsf{Ker}(f) \xrightarrow{\cong} G'$$

Αυτό είναι αντικείμενο του Πρώτου Θεωρήματος Ισομορφισμών που θα δούμε στην μεθεπόμενη ενότητα 15.

13.5. **Το Θεώρημα του Cayley.** Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε μη-κενό σύνολο A, το σύνολο

$$\mathsf{S}(A) = \big\{\sigma : A \longrightarrow A \ \mid\ \sigma : \ \text{1-1 και επί}\big\}$$

των 1-1 και επί απεικονίσεων από το σύνολο A στον εαυτό του αποτελεί μια ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων. Η ομάδα $\mathsf{S}(A)$ καλείται η *συμμετρική ομάδα* επί του συνόλου A. Αν $A = \{1, 2, \cdots, n\}$, τότε

$$\mathsf{S}(A) = \mathsf{S}(\{1, 2, \cdots, n\}) = \mathsf{S}_n$$

είναι η n-οστή συμμετρική ομάδα.

Πρόταση 13.20. *Έστω A και B δύο μη-κενά σύνολα. Αν τα σύνολα A και B έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, τότε οι συμμετρικές ομάδες $\mathsf{S}(A)$ και $\mathsf{S}(B)$ είναι ισόμορφες:*

$$|A| = |B| \qquad \Longrightarrow \qquad \mathsf{S}(A) \ \cong\ \mathsf{S}(B)$$

Απόδειξη. Επειδή τα σύνολα A και B έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, έπεται ότι υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση

$$\varphi : A \longrightarrow B$$

Ορίζουμε μια απεικόνιση:

$$\widetilde{\varphi} : \mathsf{S}(A) \longrightarrow \mathsf{S}(B), \quad \widetilde{\varphi}(\sigma) = \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$$

Θα δείξουμε ότι η $\widetilde{\varphi}$ είναι ισομορφισμός ομάδων, δηλαδή: 1-1, επί, και ομομορφισμός.

(1) 1-1: Έστω $\sigma, \tau \in \mathsf{S}(A)$, τότε:

$$\widetilde{\varphi}(\sigma) = \widetilde{\varphi}(\tau) \implies \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1} \implies \sigma \circ \varphi^{-1} = \tau \circ \varphi^{-1} \implies \sigma = \tau$$

(2) Επί: Έστω $\rho \in \mathsf{S}(B)$. Τότε:

$$\sigma := \varphi^{-1} \circ \rho \circ \varphi \ \in\ \mathsf{S}(A) \quad \text{και} \quad \widetilde{\varphi}(\sigma) = \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \rho \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = \rho$$

(3) Ομομορφισμός: Έστω $\sigma, \tau \in \mathsf{S}(A)$, τότε:

$$\widetilde{\varphi}(\sigma \circ \tau) = \varphi \circ \sigma \circ \tau \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \sigma \circ \mathrm{Id}_A \circ \tau \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1} = \widetilde{\varphi}(\sigma) \circ \widetilde{\varphi}(\tau) \qquad \square$$

Παρατήρηση 13.21. *Αντίστροφα αν A και B είναι δύο μη-κενά σύνολα με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, και οι συμμετρικές ομάδες $\mathsf{S}(A)$ και $\mathsf{S}(B)$ είναι ισόμορφές, τότε $|A| = |B|$.*

Πραγματικά, έστω $|A| = n$ και $|B| = m$. Αν $n \neq m$, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $n < m$. Τότε επειδή $\mathsf{S}(A) \cong \mathsf{S}(B)$, θα έχουμε $\mathsf{o}(\mathsf{S}(A)) = \mathsf{o}(\mathsf{S}(B))$, και άρα $n! = m!$. Όμως: $m! = 1\,2\,3 \cdots n\,(n+1) \cdots m = n!\,(n+1) \cdots m$ το οποίο είναι άτοπο διότι $n! = m!$. Άρα $n = m$ και επομένως: $|A| = |B|$.

Το ακόλουθο σημαντικό Θεώρημα, το οποίο οφείλεται στον Cayley, πιστοποιεί ότι κάθε ομάδα G είναι ισόμορφη με μια *ομάδα μεταθέσεων*, δηλαδή με μια υποομάδα μιας συμμετρικής ομάδας. Με βάση το Θεώρημα του Cayley, η Θεωρία ομάδων ανάγεται τυπικά στην Θεωρία συμμετρικών ομάδων και των υποομάδων τους.

Θεώρημα 13.22. *(**Θεώρημα Cayley**) Έστω G μια ομάδα. Τότε υπάρχει ένας μονομορφισμός ομάδων*

$$\mathsf{L}_G : G \rightarrowtail \mathsf{S}(G)$$

Επομένως η G είναι ισόμορφη με την υποομάδα $\mathsf{Im}(\mathsf{L}_G) \leq \mathsf{S}(G)$:

$$\mathsf{L}_G : G \xrightarrow{\cong} \mathsf{Im}(\mathsf{L}_G) \leq \mathsf{S}(G)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε απεικόνιση

$$\mathsf{L}_G : G \longrightarrow \mathsf{S}(G), \quad \mathsf{L}_G(g) = \mathsf{l}_g$$

όπου

$$\mathsf{l}_g : G \longrightarrow G, \qquad \mathsf{l}_g(x) = gx$$

Θα δείξουμε τον ισχυρισμό της εκφώνησης σε μια σειρά βημάτων:

(1) Για κάθε $g \in G$, η απεικόνιση $\mathsf{l}_g \colon G \longrightarrow G$ είναι 1-1 και επί, δηλαδή είναι μια μετάθεση του συνόλου G:

$$\forall g \in G: \quad \mathsf{L}_G(g) = \mathsf{l}_g \in \mathsf{S}(G)$$

Πράγματι θα έχουμε:

$$\mathsf{l}_g(x) = \mathsf{l}_g(y) \implies gx = gy \implies x = y \implies \mathsf{l}_g: \text{ 1-1}$$

$$\forall y \in G: \quad \mathsf{l}_g(g^{-1}y) = g(g^{-1}y) = gg^{-1}y = e_G y = y \implies \mathsf{l}_g: \text{ επί}$$

Επομένως πράγματι η απεικόνιση L_G στέλνει την G στην ομάδα μετυαθέσεων $\mathsf{S}(G)$.

(2) Η απεικόνιση $\mathsf{L}_G \colon G \longrightarrow \mathsf{S}(G)$ είναι ομομορφισμός ομάδων.
Πράγματι, θα έχουμε:

$$\mathsf{L}_G(g_1 g_2) = \mathsf{l}_{g_1 g_2} \quad \text{και} \quad \mathsf{L}_G(g_1) \circ \mathsf{L}_G(g_2) = \mathsf{l}_{g_1} \circ \mathsf{l}_{g_2}$$

Έτσι πρέπει να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις $\mathsf{l}_{g_1 g_2}$ και $\mathsf{l}_{g_1} \circ \mathsf{l}_{g_2}$ είναι ίσες. Θα έχουμε:

$$\big(\mathsf{l}_{g_1} \circ \mathsf{l}_{g_2}\big)(x) = \mathsf{l}_{g_1}\big(\mathsf{l}_{g_2}(x)\big) = \mathsf{l}_{g_1}(g_2 x) = g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x = \mathsf{l}_{g_1 g_2}(x)$$

Άρα $\mathsf{l}_{g_1 g_2} = \mathsf{l}_{g_1} \circ \mathsf{l}_{g_2}$ και άρα

$$\mathsf{L}_G(g_1 g_2) = \mathsf{l}_{g_1 g_2} = \mathsf{l}_{g_1} \circ \mathsf{l}_{g_2} = \mathsf{L}_G(g_1) \circ \mathsf{L}_G(g_2)$$

δηλαδή η απεικόνιση L_G είναι ομομορφισμός ομάδων.

(3) Η απεικόνιση $\mathsf{L}_G \colon G \longrightarrow \mathsf{S}(G)$ είναι μονομορφισμός.
Πράγματι, θα έχουμε:

$$\mathsf{Ker}(\mathsf{L}_G) = \big\{g \in G \mid \mathsf{L}_G(g) = \mathrm{Id}_G\big\} = \big\{g \in G \mid \mathsf{l}_g = \mathrm{Id}_G\big\} =$$

$$= \big\{g \in G \mid \mathsf{l}_g(x) = \mathrm{Id}(x), \quad \forall x \in G\big\} = \big\{g \in G \mid gx = x, \quad \forall x \in G\big\} = \{e_G\}$$

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 13.13, η απεικόνιση L_G είναι μονομορφισμός ομάδων.

(4) Θέτοντας
$$G' = \{\mathsf{l}_g \in \mathsf{S}(G) \mid g \in G\} = \mathsf{Im}(\mathsf{L}_G) \ \leq \ \mathsf{S}(G)$$
έχουμε έναν ισομορφισμό $G \cong G' \leq \mathsf{S}(G)$.

Πράγματι, επειδή η απεικόνιση $\mathsf{L}_G \colon G \longrightarrow \mathsf{S}(G)$ είναι ομομορφισμός και 1-1, έπεται ότι θα επάγει μια 1-1 και επί απεικόνιση
$$\mathsf{L}_G : \ G \longrightarrow \mathsf{Im}(\mathsf{L}_G), \quad \mathsf{L}_G(g) = \mathsf{l}_g$$
η οποία προφανώς είναι ομομορφισμός, και άρα θα έχουμε έναν ισομορφισμό
$$\mathsf{L}_G : \ G \xrightarrow{\cong} \mathsf{Im}(\mathsf{L}_G) \ \leq \ \mathsf{S}(G)$$
όπου $\mathsf{Im}(\mathsf{L}_G)$ είναι η ακόλουθη υποομάδα της $\mathsf{S}(G)$:
$$\mathsf{Im}(\mathsf{L}_G) = \{\mathsf{L}_G(g) \in \mathsf{S}(G) \mid g \in G\} = \{\mathsf{l}_g \in \mathsf{S}(G) \mid g \in G\} \ \leq \ \mathsf{S}(G) \qquad \square$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε και την απεικόνιση
$$\mathsf{R}_G : \ G \longrightarrow \mathsf{S}(G), \quad \mathsf{R}_G(g) = \mathsf{r}_g$$
όπου
$$\mathsf{r}_g : \ G \longrightarrow G, \qquad \mathsf{r}_g(x) = xg$$
Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως στο Θεώρημα 13.23, αποδεικνύεται ότι υπάρχει μια 1-1 απεικόνιση
$$\mathsf{R}_G : \ G \ \longrightarrow \ \mathsf{S}(G)$$
η οποία όμως δεν είναι μονομορφισμός ομάδων διότι εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει:
$$\mathsf{R}_{g_1g_2} = \mathsf{R}_{g_2} \circ \mathsf{R}_{g_1} \quad \text{και όχι} \quad \mathsf{R}_{g_1g_2} = \mathsf{R}_{g_1} \circ \mathsf{R}_{g_2}$$
Διορθώνουμε το πρόβλημα ως εξής: Έστω η απεικόνιση
$$\cdot^{\mathrm{op}} : \ G \times G \longrightarrow G, x \quad x \cdot^{\mathrm{op}} y = yx$$
Τότε εύκολα βλέπουμε ότι το ζεύγος $(G, \cdot^{\mathrm{op}})$ είναι μια ομάδα, η οποία καλείται η **αντίθετη ομάδα** της G, και συμβολίζεται με G^{op}. Τότε προφανώς θα έχουμε έναν μονομορφισμό
$$\mathsf{R}_G : \ G^{\mathrm{op}} \rightarrowtail \mathsf{S}(G)$$
και η G^{op} είναι ισόμορφη με την υποομάδα $\mathsf{Im}(\mathsf{R}_G) \leq \mathsf{S}(G)$:
$$\mathsf{R}_G : \ G^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\cong} \mathsf{Im}(\mathsf{R}_G) \ \leq \ \mathsf{S}(G)$$
Θα λέμε ότι η G είναι *αντι-ισόμορφη* με την υποομάδα $\mathsf{Im}(\mathsf{R}_G)$ της $\mathsf{S}(G)$.

Εναλλακτικά για να αποφύγουμε το πρόβλημα, ορίζουμε μια απεικόνιση
$$\mathsf{R}_G : \ G \longrightarrow \mathsf{S}(G), \quad \mathsf{R}_G(g) = \mathsf{r}_g$$
όπου
$$\mathsf{r}_g : \ G \longrightarrow G, \qquad \mathsf{r}_g(x) = xg^{-1}$$
Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως στο Θεώρημα 13.23, αποδεικνύεται ότι η R_G είναι μια 1-1 απεικόνιση
$$\mathsf{R}_G : \ G \ \longrightarrow \ \mathsf{S}(G)$$
η οποία είναι μονομορφισμός ομάδων διότι εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει:
$$\mathsf{R}_{g_1g_2} = \mathsf{R}_{g_1} \circ \mathsf{R}_{g_2}$$

Έτσι με βάση την παραπάνω συζήτηση, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 13.23. *Έστω G μια ομάδα.*

(1) *Ο μονομορφισμός*

$$\mathsf{L}_G : G \longrightarrow \mathsf{S}(G), \quad g \longmapsto \mathsf{L}_G = \mathsf{l}_g, \quad \text{και} \quad \mathsf{l}_g(x) = gx$$

καλείται η **αριστερή κανονική αναπαράσταση της** G.

(2) *Ο μονομορφισμός*

$$\mathsf{R}_G : G \longrightarrow \mathsf{S}(G), \quad g \longmapsto \mathsf{R}_G = \mathsf{r}_g, \quad \text{και} \quad \mathsf{r}_g(x) = xg^{-1}$$

καλείται η **δεξιά κανονική αναπαράσταση της** G.

Πόρισμα 13.24. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα τάξης $\mathsf{o}(G) = n$.*

(1) *Η αριστερή κανονική αναπαράσταση L_G της G ορίζει έναν μονομορφισμό*

$$\mathsf{L}_G : G \longrightarrow \mathsf{S}_n, \quad g \longmapsto \mathsf{L}_G = \mathsf{l}_g, \quad \text{και} \quad \mathsf{l}_g(x) = gx$$

και άρα κάθε πεπερασμένη ομάδα τάξης n είναι ισόμορφη με την υποομάδα $\mathsf{Im}(\mathsf{L}_G)$ της S_n.

(2) *Η δεξιά κανονική αναπαράσταση R_G της G ορίζει έναν μονομορφισμό*

$$\mathsf{R}_G : G \longrightarrow \mathsf{S}_n, \quad g \longmapsto \mathsf{R}_G = \mathsf{r}_g, \quad \text{και} \quad \mathsf{r}_g(x) = xg^{-1}$$

και άρα κάθε πεπερασμένη ομάδα τάξης n είναι ισόμορφη με την υποομάδα $\mathsf{Im}(\mathsf{R}_G)$ της S_n.

Παράδειγμα 13.25. *Θα υπολογίσουμε την αριστερή κανονική αναπαράσταση της κυκλικής ομάδας G τάξης 3:*

$$G = \{e,\ a,\ b\} = \{e,\ a,\ a^2\} = \langle a \rangle$$

Επειδή $\mathsf{o}(G) = 3$, έπεται ότι η G θα είναι ισόμορφη με την υποομάδα $\mathsf{Im}(\mathsf{L}_G)$ της S_3, και θα έχουμε:

$$\mathsf{Im}(\mathsf{L}_G) = \{\mathsf{l}_e,\ \mathsf{l}_a,\ \mathsf{l}_b\} \ \leq\ \mathsf{S}_3$$

Οι πίνακες Cayley του πολλαπλασιασμού των ομάδων G και $\mathsf{Im}(\mathsf{L}_G)$ είναι:

$$G = \{e,\ a,\ b\} : \quad \begin{array}{c|c|c|c} \cdot & e & a & b \\ \hline e & e & a & b \\ \hline a & a & b & e \\ \hline b & b & e & a \end{array} \qquad \text{και} \qquad \mathsf{Im}\,\mathsf{L}_G = \{\mathsf{l}_e,\ \mathsf{l}_a,\ \mathsf{l}_b\} : \quad \begin{array}{c|c|c|c} \cdot & \mathsf{l}_e & \mathsf{l}_a & \mathsf{l}_b \\ \hline \mathsf{l}_e & \mathsf{l}_e & \mathsf{l}_a & \mathsf{l}_b \\ \hline \mathsf{l}_a & \mathsf{l}_a & \mathsf{l}_b & \mathsf{l}_e \\ \hline \mathsf{l}_b & \mathsf{l}_b & \mathsf{l}_e & \mathsf{l}_a \end{array}$$

Θα προσδιορίσουμε τις μεταθέσεις $\mathsf{l}_e,\ \mathsf{l}_a,\ \mathsf{l}_b$:

(1) *Η μετάθεση*

$$\mathsf{l}_e : G \longrightarrow G, \quad \mathsf{l}_e(x) = ex$$

Άρα:

$$\mathsf{l}_e(e) = ee = e^2 = e, \quad \mathsf{l}_e(a) = ea = a, \quad \mathsf{l}_e(b) = e = b$$

Επομένως η απεικόνιση l_e είναι η ταυτοτική μετάθεση του συνόλου $G = \{e, a, b\}$:

$$\mathsf{l}_e = \begin{pmatrix} e & a & b \\ e & a & b \end{pmatrix}$$

(2) *Η μετάθεση*

$$\mathsf{l}_a : G \longrightarrow G, \quad \mathsf{l}_a(x) = ax$$

Άρα:

$$\mathsf{l}_a(e) = ae = a, \quad \mathsf{l}_a(a) = aa = a^2 = b, \quad \mathsf{l}_a(b) = ab = e$$

Επομένως η απεικόνιση l_a είναι η ακόλουθη μετάθεση του συνόλου $G = \{e, a, b\}$:

$$\mathsf{l}_a = \begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix} = (e\,a\,b)$$

(3) *Η μετάθεση*

$$\mathsf{l}_b : G \longrightarrow G, \quad \mathsf{l}_b(x) = bx$$

Άρα:

$$\mathsf{l}_b(e) = be = b, \quad \mathsf{l}_b(a) = ba = e, \quad \mathsf{l}_b(b) = bb = b^2 = a$$

Επομένως η απεικόνιση l_a *είναι η ακόλουθη μετάθεση του συνόλου* $G = \{e, a, b\}$*:*

$$\mathsf{l}_b = \begin{pmatrix} e & a & b \\ b & e & a \end{pmatrix} = (e\,b\,a)$$

Επομένως η G *είναι ισόμορφη με τη ακόλουθη ομάδα μεταθέσεων (υποομάδα της* $\mathsf{S}(G)$*):*

$$\mathsf{Im}(\mathsf{L}_G) = \big\{(e),\ (eab),\ (eba)\big\}$$

Χρησιμοποιώντας την 1-1 και επί απεικόνιση $G = \{e, a, b\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$*, όπου* $e \leftrightarrows 1$*,* $a \leftrightarrows 2$*,* $b \leftrightarrows 3$*, από την Πρόταση* 13.22*, θα έχουμε ότι η* $\mathsf{S}(G)$ *είναι ισόμορφη με την* S_3*.*

Επομένως η G *είναι ισόμορφη με τη ακόλουθη ομάδα μεταθέσεων (υποομάδα της* S_3*):*

$$\mathsf{Im}(\mathsf{L}_G) = \big\{(e),\ (123),\ (132)\big\}$$

η οποία συμπίπτει με την εναλλάσσουσα ομάδα A_3*. Άρα:*

$$\mathsf{L}_G : G \xrightarrow{\ \cong\ } \mathsf{A}_3 \leq \mathsf{S}_3$$

Παρόμοια δουλεύουμε για την εύρεση της δεξιάς κανονικής αναπαράστασης της G*.*

Άσκηση 292. *Να υπολογισθεί η αριστερή κανονική αναπαράσταση της ομάδας του Klein* V_4*.*

Κλείνουμε την παρούσα ενότητα με το ακόλουθο, σημαντικό απο θεωρητικής πλευράς, αποτέλεσμα.

Θεώρημα 13.26. *Για κάθε* $n \geq 1$*, το πλήθος των κλάσεων ισομορφίας των πεπερασμένων ομάδων τάξης* n *είναι πεπερασμένο.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα του Cayley έπεται ότι κάθε ομάδα G τάξης n είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της συμμετρικης ομάδας S_n. Επειδή η S_n είναι μια πεπερασμένη ομάδα (τάξης $n!$), έπεται ότι το σύνολο των υποομάδων της είναι πεπερασμένο. Συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των κλάσεων ισομορφίας των ομάδων τάξης n είναι ίσο με το σύνολο των υποομάδων της S_n και επομένως είναι πεπερασμένο. $\square$

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης