Αλγεβρικες Δομες I

Ασκησεις - Φυλλαδιο 1

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI.html

Τετάρτη 10 Οκτωβρίου 2012

Άσκηση 1. *Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών* $\mathbb{R}$ *ορίζουμε μια σχέση* $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *ως εξής:*

$$x \sim_{\mathcal{R}} y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

Να δείξετε ότι η $\mathcal{R}$ *είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο* $\mathbb{R}$, *και να περιγράψετε το σύνολο πηλίκο* $\mathbb{R}/\mathcal{R}$.

Άσκηση 2. *Στο σύνολο των ρητών αριθμών* $\mathbb{Q}$ *ορίζουμε μια σχέση* $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ *ως εξής:*

$$x \sim_{\mathcal{R}} y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

Να δείξετε ότι η $\mathcal{R}$ *είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο* $\mathbb{Q}$, *και υπάρχει μια 1-1 και επί επεικόνιση*

$$f : \mathbb{Q}/\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1)$$

Άσκηση 3. *Θεωρούμε το υποσύνολο* $\mathcal{S} = \big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\big\}$ *του συνόλου* $\mathbb{C}^*$ *των μη-μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Στο* $\mathbb{C}^*$ *ορίζουμε μια σχέση* $\mathcal{R}$ *ως εξής:*

$$z \sim_{\mathcal{R}} w \iff zw^{-1} \in \mathcal{S}$$

1. *Να δείξετε ότι η* $\mathcal{R}$ *είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο* $\mathbb{C}^*$, *και ακολούθως να περιγραφεί το σύνολο-πηλίκο* $\mathbb{C}^*/\mathcal{R}$.
2. *Είναι το υποσύνολο* $\mathcal{S}$ *κλειστό ως προς την πράξη πολλαπλασιασμού* $\cdot$ *στο σύνολο* $\mathbb{C}^*$;
3. *Είναι η πράξη πολλαπλασιασμού* $\cdot$ *στο σύνολο* $\mathbb{C}^*$ *συμβιβαστή με την σχέση ισοδυναμίας* $\mathcal{R}$;

Άσκηση 4. *Να εξεταστεί, ποια από τα ακόλουθα υποσύνολα τού καρτεσιανού γινομένου* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *ορίζουν μια σχέση ισοδυναμίας* ϕ *επί του συνόλου των ακεραίων αριθμών* $\mathbb{Z}$ *και για κάθε* ϕ *να προσδιοριστούν οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας καθώς και η προκύπτουσα διαμέριση του συνόλου* $\mathbb{Z}$:

(1) $g_1 = \big\{(z, z) \mid z \in \mathbb{Z}\big\}$,
(2) $g_2 = \big\{(z, z + 1) \mid z \in \mathbb{Z}\big\}$,
(3) $g_3 = \big\{(z + 1, z) \mid z \in \mathbb{Z}\big\}$,
(4) $g_4 = g_1 \cup g_2$,
(5) $g_5 = g_1 \cup g_2 \cup g_3$
(6) $g_6 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$,
(7) $g_7 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 1), (3, 2), (3, 1)\}$,
(8) $g_8 = g_1 \cup g_7$,
(9) $g_9 = g_1 \cup g_7 \cup \{(7, 8), (8, 7)\}$,
(10) $g_{10} = g_1 \cup g_7 \cup \{(3, 4), (4, 3)\}$.

Άσκηση 5. *Έστω* X *ένα μη-κενό σύνολο και* $\{\mathcal{R}_i\}_{i \in I}$ *μια οικογένεια σχέσεων ισοδυναμίας επί του* X.

1. *Να δείξετε ότι η τομή* $\mathcal{R} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{R}_i$ *είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του* X.
2. *Να εξετάσετε αν η ένωση* $\mathcal{R}' = \bigcup_{i \in I} \mathcal{R}_i$ *είναι σχέση ισοδυναμίας επί του* X.

Άσκηση 6. *Θεωρούμε το σύνολο* $X = \big\{1, 2, 3, 4\big\}$.

1. *Έστω η σχέση*

$$\mathcal{R} = \big\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3), (4, 1), (2, 3)\big\} \quad \subseteq \quad X \times X$$

Να βρεθεί η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας $\overline{\mathcal{R}}$ *επί του* X *η οποία περιέχει τη σχέση* $\mathcal{R}$.

2. *Έστω η σχέση*

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(2,3),(4,1)\} \quad \subseteq \quad X \times X$$

Να βρεθεί η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας $\overline{\mathcal{R}}$ επί του X η οποία περιέχει τη σχέση $\mathcal{R}$.

Άσκηση 7. *Να περιγραφούν όλες οι πιθανές σχέσεις ισοδυναμίας επί ενός συνόλου X με $1, 2, 3$, και 4 στοιχεία.*

Άσκηση 8. **1.** *Στο σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, όπου $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\cdots\}$, ορίζουμε την ακόλουθη σχέση $\mathcal{R}$:*

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \qquad (a,b) \sim_{\mathcal{R}} (c,d) \quad \Longleftrightarrow \quad a+d = b+c$$

Δείξτε ότι η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ και περιγράψτε το σύνολο πηλίκο $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$.

2. *Στο σύνολο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ ορίζουμε την ακόλουθη σχέση $\mathcal{S}$:*

$$\forall (x,y),\ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*: \quad (x,y) \sim_{\mathcal{R}} (a,b) \quad \Longleftrightarrow \quad xb = ya$$

Δείξτε ότι η $\mathcal{S}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ και περιγράψτε το σύνολο πηλίκο $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\mathcal{S}$.

Άσκηση 9. *Εξετάστε στις παρακάτω περιπτώσεις αν η διμελής πράξη $\star$ επί του συνόλου G είναι προσεταιριστική, μεταθετική, υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, και αν κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο.*

(1) $G = \mathbb{Z}$ *και* $a \star b = ab$.
(2) $G = \mathbb{Z}$ *και* $a \star b = a - b$.
(3) $G = \mathbb{R}^+$ *και* $a \star b = ab$.
(4) $G = \mathbb{Q}$ *και* $a \star b = ab$.
(5) $G = \mathbb{R}^*$ *και* $a \star b = ab$.
(6) $G = \mathbb{Z}^+$ *και* $a \star b = 2^{ab}$.
(7) $G = \mathbb{Z}^+$ *και* $a \star b = a^b$.
(8) $G = \mathbb{C}$ *και* $a \star b = a + b$.

Άσκηση 10. *Έστω $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (δηλαδή G είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών εκτός από το -1), και ορίζουμε*

$$\forall x, y \in G: \qquad x \star y = x + y + xy$$

Να δείξετε ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι μια πράξη επί του G. Να εξετασθεί αν η πράξη $\star$ είναι προσεταιριστική ή μεταθετική. Να εξετασθεί αν υπάρχει στοιχείο $e \in G$ έτσι ώστε: $x \star e = x = e \star x$, $\forall x \in G$. Αν ένα τέτοιο στοιχείο υπάρχει, είναι μοναδικό; Σ' αυτή την περίπτωση να εξετασθεί αν για κάθε $x \in G$, υπάρχει $y \in G$ έτσι ώστε: $x \star y = e = y \star x$. Τέλος να εξετασθεί αν η εξίσωση:

$$a \star x = b$$

έχει (μοναδική) λύση στο σύνολο G.

Άσκηση 11. *Έστω ότι $\mathbb{K}$ συμβολίζει ένα από τα ακόλουθα σώματα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, και έστω $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ το σύνολο των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{K}$. Υπενθυμίζουμε ότι δύο πίνακες $A, B \in \mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ καλούνται* **ισοδύναμοι** *αν υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P και αντιστρέψιμος $m \times m$ πίνακας Q έτσι ώστε:*

$$Q \cdot A \cdot P = B$$

Δείξτε ότι ορίζοντας:

$$A \sim B \quad \Longleftrightarrow \quad \text{ο πίνακας } A \text{ είναι ισοδύναμος με τον } B$$

αποκτούμε μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathsf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Είναι η πρόσθεση, και ο πολλαπλασιασμός πινάκων (όταν $m = n$), συμβιβαστή πράξη με την σχέση ισοδυναμίας πινάκων;