# Αλγεβρικες Δομες Ι

## Προτεινομενες Ασκησεις - Φυλλαδιο 1

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/AlgebraicStructuresI/ASI.html

**Τετάρτη 10 Οκτωβρίου 2012**

**Άσκηση 1.** *Να εξεταστεί ποια από τα επόμενα σύνολα ορίζουν σχέση ισοδυναμίας και στην περίπτωση που η απάντηση είναι καταφατική να προσδιοριστούν οι κλάσεις ισοδυναμίας:*

(1) $f_1 = \{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid nm > 0\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,
(2) $f_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \| \, x \geq y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(3) $f_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(4) $f_4 = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 2/n - m\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

**Άσκηση 2.** *Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ ορίζουμε δύο σχέσεις $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$ ως εξής:*

$$z \sim_{\mathcal{R}} w \iff z - w \in \mathbb{R}$$
$$z \sim_{\mathcal{S}} w \iff z - w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

*Να εξετάσετε αν οι σχέσεις $\mathcal{R}$ και $\mathcal{S}$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας στο $\mathbb{C}$, και, στην περίπτωση κατά την οποία είναι σχέσεις ισοδυναμίας, να περιγράψετε τα σύνολα πηλίκα $\mathbb{C}/\mathcal{R}$ και $\mathbb{C}/\mathcal{S}$.*

**Άσκηση 3.** *Έστω $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ και έστω η σχέση*

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(5,8),(7,4),\} \quad \subseteq \quad X \times X$$

*Να βρεθεί η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας $\overline{\mathcal{R}}$ επί του $X$ η οποία περιέχει τη σχέση $R$.*

**Άσκηση 4.** *Έστω ότι $\mathbb{K}$ συμβολίζει ένα από τα ακόλυθα σώματα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, και έστω $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ το σύνολο των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{K}$. Υπενθυμίζουμε ότι δύο πίνακες $A, B \in \mathsf{M}_n(\mathbb{K})$ καλούνται* **όμοιοι** *αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P$ έτσι ώστε:*

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = B$$

*Δείξτε ότι ορίζοντας:*

$$A \sim B \iff \text{ο πίνακας } A \text{ είναι όμοιος με τον } B$$

*αποκτούμε μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $\mathsf{M}_n(\mathbb{K})$. Είναι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός πινάκων συμβατή πράξη με την σχέση ομοιότητας;*

**Άσκηση 5.** *Έστω $X$ ένα μη-κενό σύνολο και $\mathcal{R}$ μια σχέση επί του $X$, δηλαδή ένα υποσύνολο του $X \times X$. Να δείξετε ότι η σχέση*

$$\overline{\mathcal{R}} = \bigcap \left\{ \mathcal{S} \subseteq X \times X \;\middle|\; \mathcal{S} \text{ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του } X \text{ και } \mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \right\}$$

*είναι* **η μικρότερη σχέση ισοδυναμίας επί του** *$X$ η οποία περιέχει τη σχέση $\mathcal{R}$. Επιπλέον να δείξετε ότι:*

$$\forall a,b \in X: \; a \sim_{\overline{\mathcal{R}}} b \iff \exists n \geq 0 \text{ και } x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \in X: \quad a = x_1 \;\;\&\;\; b = x_{n+1}, \;\; \text{και}:$$

$$\begin{cases} (x_i, x_{i+1}) \in \mathcal{R}, & 1 \leq i \leq n \\ \qquad\qquad \text{ή} & \\ (x_{i+1}, x_i) \in \mathcal{R}, & 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

**Άσκηση 6.** *Πόσες σχέσεις ισοδυναμίας ορίζονται επί ενός συνόλου $X$ με $5$ στοιχεία;*

**Άσκηση 7.** *Έστω το σύνολο $A = \{0, 1\} \subseteq \mathbb{Z}$. Να εξεταστεί, αν η αντιστοιχία*

$$+ : A \times A \longrightarrow A, \qquad (a, b) \longmapsto a + b \ \ \text{(η πρόσθεση των ακεραίων)}$$

*ορίζει πράξη επί του $A$.*

**Άσκηση 8.** *Έστω το σύνολο $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Να εξεταστεί, αν η αντιστοιχία*

$$\star : \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* \longrightarrow \mathbb{Q}^*, \qquad (a, b) \longmapsto a \star b = \frac{a}{b}$$

*ορίζει πράξη επί του $\mathbb{Q}^*$, και να εξεταστεί, αν πρόκειται για προσεταιριστική ή μεταθετική πράξη.*

**Άσκηση 9.** *Έστω $X$ ένα συνόλο και $\mathcal{P}(X)$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του. Υπενθυμίζουμε ότι, αν $A, B$ είναι δύο υποσύνολα του $X$, δηλαδή $A, B \in \mathcal{P}(X)$, τότε η* **συμμετρική διαφορά** *τους $A\Delta B$ ορίζεται να είναι το ακόλουθο υποσύνολο*

$$A \,\Delta\, B := (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$$

*του $X$. Να εξετάσετε αν το σύνολο $\mathcal{P}(X)$ εφοδιασμένο με την πράξη της συμμετρικής διαφοράς*

$$\Delta : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X), \qquad (A, B) \longmapsto A \,\Delta\, B$$

*ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

(1) *Προσεταιριστικότητα.*
(2) *Μεταθετικότητα.*
(3) *Υπάρχει στοιχείο $E \in \mathcal{P}(X)$ έτσι ώστε: $E\Delta A = A = A\Delta E$; Αν υπάρχει τέτοιο στοιχείο $E$ είναι μοναδικό;*
(4) *Υπάρχει, για κάθε στοιχείο $A \in \mathcal{P}(X)$, ένα στοιχείο $A' \in \mathcal{P}(X)$ έτσι ώστε: $A\Delta A' = E = A'\Delta A$; Αν υπάρχει τέτοιο στοιχείο $A'$, είναι μοναδικό;*
(5) *Ορίζουμε στο $\mathcal{P}(X)$ μια σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ ως εξής:*

$$\forall A, B \in (X) : \ \ A \sim_{\mathcal{R}} B \quad \Longleftrightarrow \quad |A| = |B|$$

*δηλαδή τα υποσύνολα $A, B$ έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Είναι η πράξη $\Delta$ συμβιβαστή με την σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$;*
(6) *Να εξετασθεί αν η εξίσωση*

$$A\Delta X = B$$

*έχει μοναδική λύση στο $\mathcal{P}(X)$.*

**Άσκηση 10.** *Έστω $\mathcal{A} = \big\{ f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ τυχούσα απεικόνιση} \big\}$. Να δείξετε ότι ορίζοντας*

$$\forall f, g \in \mathcal{A} : \ \ (f \star g)(n) = \sum_{ab=n} f(a)g(b)$$

*(δηλαδή αθροίζουμε όλα τα δυνατά γινόμενα $f(a)g(b)$, όπου οι φυσικοί αριθμοί $a, b$ ικανοποιούν τη σχέση: $ab = n$), αποκτούμε μια διμελή πράξη $\star \colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$.*

(1) *Να δείξετε ότι η πράξη $\star$ είναι προσεταιριστική.*
(2) *Να δείξετε ότι η πράξη $\star$ είναι μεταθετική.*
(3) *Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική απεικόνιση $\varepsilon \in \mathcal{A}$ έτσι ώστε:*

$$\varepsilon \star f = f = f \star \varepsilon$$