ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο Γινομένου Πινάκων

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης

Τμήμα: Μαθηματικών

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μέρος 1. Η Δομή Ενός Ενδομορφισμού

1. Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο Γινομένου Πινάκων

1.1. **Ιδιοτιμές Σύνθεσης Γραμμικών Απεικονίσεων και Γινομένου Πινάκων.** Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και

$$f,\, g:\ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

δύο γραμμικές απεικονίσεις. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις

$$f \circ g,\, g \circ f:\ \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

Πρόταση 1.1. *Οι γραμμικές απεικονίσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.*

Απόδειξη. **1.** Δείχνουμε ότι κάθε ιδιοτιμή της $f \circ g$ είναι και ιδιοτιμή της $g \circ f$.

Έστω λ μια ιδιοτιμή της $f \circ g$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυμσα $\vec{e}$, δηλαδή:

$$(f \circ g)(\vec{e}) = \lambda \vec{e}, \qquad \vec{e} \neq \vec{0}$$

(α') Αν $\lambda = 0$, τότε σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε από την θεωρία, η γραμμική απεικόνιση $f \circ g$ δεν είναι ισομορφισμός. Τότε όμως και η γραμμική απεικόνιση $g \circ f$ δεν είναι ισομορφισμός. Πραγματικά: αν η $g \circ f$ είναι ισομορφισμός, τότε η f θα είναι μονομορφισμός διότι αν $f(\vec{x}) = 0$, τότε $g(f(\vec{x})) = \vec{0} \implies \vec{x} = 0$ διότι από την υπόθεση η $g \circ f$ είναι ισομορφισμός. Γνωρίζουμε όμως ότι ένας μονομορφισμός $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι πάντα ισομορφισμός. Άρα η f είναι ισομορφισμός και παρόμοια δείχνουμε η g είναι ισομορφισμός. Επειδή η σύνθεση ισομορφσιμών είναι ισομορφισμός έπεται ότι και η $f \circ g$ είναι ισομορφισμός το οποίο είναι άτοπο. Καταλήγουμε ότι η γραμμική απεικόνιση $g \circ f$ δεν είναι ισομορφισμός. Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι η γραμμική απεικόνιση $g \circ f$ έχει το $\lambda = 0$ ως ιδιοτιμή.
Επομένως θα έχουμε ότι: η γραμμική απεικόνιση $f \circ g$ έχει το $\lambda = 0$ ως ιδιοτιμή $\Longrightarrow$ η γραμμική απεικόνιση $g \circ f$ έχει το $\lambda = 0$ ως ιδιοτιμή.

(β') Υποθέτουμε ότι $\lambda \neq 0$. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\varepsilon} := g(\vec{e})$. Τότε $\vec{\varepsilon} \neq 0$ διότι διαφορετικά αν $\vec{\varepsilon} = g(\vec{e}) = \vec{0}$, τότε $f(g(\vec{e})) = \vec{0}$. Επειδή $(f \circ g)(\vec{e}) = \lambda \vec{e}$ θα έχουμε $\lambda \vec{e} = \vec{0}$. Όμως $\vec{e} \neq \vec{0}$ και επομένως $\lambda = 0$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα θα έχουμε $\vec{\varepsilon} = g(\vec{e}) \neq 0$.
Τότε $f(\vec{\varepsilon}) = f(g(\vec{e})) = (f \circ g)(\vec{e}) = \lambda \vec{e} \neq \vec{0}$. Επιπρόσθετα:

$$(g \circ f)(\vec{\varepsilon}) = g(f(\vec{\varepsilon}) = g(\lambda \vec{e}) = \lambda g(\vec{e}) = \lambda \vec{\varepsilon}, \qquad \vec{\varepsilon} \neq \vec{0}$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι το λ είναι ιδιοτιμή της $g \circ f$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\vec{\varepsilon}$.

2. Παρόμοια δείχνουμε ότι κάθε ιδιοτιμή της $g \circ f$ είναι και ιδιοτιμή της $f \circ g$. □

Πόρισμα 1.2. *Αν $A, B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, τότε οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις

$$f_A:\ \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \quad f_A(X) = AX$$

$$f_B:\ \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \quad f_B(X) = BX$$

Τότε $f_{AB}(X) = (AB)X = A(BX) = Af_B(X) = f_A(f_B(X)) = (f_A \circ f_B)(X)$, $\forall X \in \mathbb{K}_n$. Αυτό σημαίνει ότι $f_{AB} = f_A \circ f_B$. Παρόμοια $f_{BA} = f_B \circ f_A$.

Από την Πρόταση 1.1, έπεται ότι οι γραμμικές απεικονίσεις f_{AB} και f_{BA} έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Αυτό όμως είναι ισοδύναμο με το ότι οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. □

Παρατήρηση 1.3. *Από την Πόρισμα 1.2, έπεται αν $A, B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, τότε οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Αυτό δεν σημαίνει ότι οι πίνακες είναι όμοιοι. Για παράδειγμα οι πίνακες*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. Όμως $A \cdot B = \mathbb{O} \neq B \cdot A$ και άρα οι πίνακες $A \cdot B$ και $B \cdot A$ δεν μπορεί να είναι όμοιοι.

1.2. **Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο Γινομένου Πινάκων.** Ισχύει κάτι ισχυρότερο από το συμπέρασμα της Πρότασης 1.1, ή ισοδύναμα του Πορίσματος 1.2:

Θεώρημα 1.4. *Αν $A, B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Τότε οι πίνακες AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηρισικό πολυώνυμο:*

$$P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$$

Απόδειξη. <u>*Πρώτη Περίπτωση*</u>: Ένας εκ των πινάκων A, B είναι αντιστρέψιμος. Έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Τότε:

$$BA = A^{-1}ABA = A^{-1}(AB)A$$

και επομένως οι πίνακες AB και BA είναι όμοιοι. Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηρσιτικό πολυώνυμο, έπεται ότι: $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$. Παρόμοια αν ο B είναι αντιστρέψιμος, τότε $AB = B^{-1}BAB = B^{-1}(BA)B$, δηλαδή οι πίνακες AB και BA είναι όμοιοι και άρα $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$.

<u>*Δεύτερη Περίπτωση*</u>: Υποθέτουμε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. Τότε η βαθμίδα του είναι $\mathbf{r}(A) := r < n$. Από την Γραμμική Άλγεβρα Ι γνωρίζουμε ότι ο A είναι ισοδύναμος με τον πίνακα

$$\widetilde{I}_r := \begin{pmatrix} I_r & \mathbb{O}_{r\times n-r} \\ \mathbb{O}_{n-r\times r} & \mathbb{O}_{n-r\times n-r} \end{pmatrix}$$

Δηλαδή υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $Q_1, P_1 \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:

$$Q_1AP_1 = \widetilde{I}_r$$

Θέτοντας $Q = Q_1^{-1}$ και $P := P_1^{-1}$ θα έχουμε τότε:

$$A = Q\widetilde{I}_rP \tag{1.1}$$

Θεωρούμε τον πίνακα $C := PBQ$ τον οποίο τον χωρίζουμε σε υποπίνακες:

$$C = PBQ = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

όπου

$$C_{11} \in \mathsf{M}_{r\times r}(\mathbb{K}), \quad C_{12} \in \mathsf{M}_{r\times n-r}(\mathbb{K}), \quad C_{21} \in \mathsf{M}_{n-r\times r}(\mathbb{K}), \quad C_{22} \in \mathsf{M}_{n-r\times n-r}(\mathbb{K})$$

και τότε

$$B = P^{-1}CQ^{-1} = P^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Επομένως:

$$AB = AP^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} Q^{-1} = Q\widetilde{I}_rPP^{-1} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} Q^{-1} = Q\widetilde{I}_r \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι:

$$\widetilde{I}_r \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ \mathbb{O}_{r\times r} & \mathbb{O}_{n-r\times n-r} \end{pmatrix}$$

και επομένως θα έχουμε:

$$AB = Q \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ \mathbb{O}_{r\times r} & \mathbb{O}_{n-r\times n-r} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

Δηλαδή ο πίνακας AB είναι όμοιος με τον πίνακα
$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ \mathbb{O}_{r\times r} & \mathbb{O}_{n-r\times n-r} \end{pmatrix}$$
Επίσης:
$$BA = P^{-1}CQ^{-1}A = P^{-1}\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\ Q^{-1}\ Q\widetilde{I}_r P = P^{-1}\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\widetilde{I}_r P$$
Εύκολα βλέπουμε ότι:
$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\widetilde{I}_r = \begin{pmatrix} C_{11} & \mathbb{O}_{r\times n-r} \\ C_{21} & \mathbb{O}_{n-r\times n-r} \end{pmatrix}$$
Άρα θα έχουμε
$$BA = P^{-1}\ \begin{pmatrix} C_{11} & \mathbb{O}_{r\times n-r} \\ C_{21} & \mathbb{O}_{n-r\times n-r} \end{pmatrix} P$$
Δηλαδή ο πίνακας BA είναι όμοιος με τον πίνακα
$$\begin{pmatrix} C_{11} & \mathbb{O}_{r\times n-r} \\ C_{21} & \mathbb{O}_{n-r\times n-r} \end{pmatrix}$$
Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα έχουμε
$$P_{AB}(t) = P_M(t), \qquad \text{όπου} \qquad M := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ \mathbb{O}_{r\times r} & \mathbb{O}_{n-r\times n-r} \end{pmatrix}$$
$$P_{BA}(t) = P_N(t), \qquad \text{όπου} \qquad N := \begin{pmatrix} C_{11} & \mathbb{O}_{r\times n-r} \\ C_{21} & \mathbb{O}_{n-r\times n-r} \end{pmatrix}$$
Όμως:
$$P_M(t) = \begin{vmatrix} C_{11} - tI_r & C_{12} \\ \mathbb{O}_{r\times r} & \mathbb{O}_{n-r\times n-r} - tI_{n-r\times n-r} \end{vmatrix} = (-1)^{n-r} P_{C_{11}}(t)$$
$$P_N(t) = \begin{vmatrix} C_{11} - tI_r & \mathbb{O}_{r\times n-r} \\ C_{21} & \mathbb{O}_{n-r\times n-r} - tI_{n-r\times n-r} \end{vmatrix} = (-1)^{n-r} P_{C_{11}}(t)$$
Άρα $P_M(t) = P_N(t)$ και επομένως
$$P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$$
□

Θεώρημα 1.5. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, και έστω $f,\ g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις. Τότε οι $f \circ g$ και $g \circ f$ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο:*
$$P_{f\circ g}(t) = P_{g\circ f}(t)$$
Απόδειξη. Έστω $\mathcal{B}$ μια βάση του $\mathcal{E}$ και $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ και $B = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g)$. Τότε από το Θεώρημα 1.4 έχουμε: $P_{AB}(t) = P_{BA}(t)$. Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μιας γραμμικής απεικόνισης συμπίπτει με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακά της σε τυχούσα βάση, έπεται ότι:
$$P_f(t) = P_A(t) \qquad \text{και} \qquad P_g(t) = P_B(t)$$
Επειδή ο πίνακας της $f \circ g$ στην βάση $\mathcal{B}$ είναι ο AB και ο πίνακας της $g \circ f$ στην βάση $\mathcal{B}$ είναι ο BA, θα έχουμε:
$$P_{f\circ g}(t) = P_{AB}(t) = P_{BA}(t) = P_{g\circ f}(t)$$
□

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης