ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Τριγωνοποίηση

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

2. **Τριγωνοποίηση**

2.1. **Άνω Τριγωνικοί Πίνακες και Κάτω Τριγωνικοί Πίνακες.** Όπως γνωρίζουμε ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ καλείται *τριγωνοποιήσιμος* αν και μόνον αν ο A είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα.

Το παρακάτω αποτέλεσμα δείχνει ότι ο A είναι τριγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν ο A είναι όμοιος με έναν *κάτω* τριγωνικό πίνακα.

Πρόταση 2.1. *Για έναν πίνακα $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο A είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα.*
(2) *Ο A είναι όμοιος με έναν κάτω τριγωνικό πίνακα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον πίνακα:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι $T^2 = I_n$ και επομένως ο πίνακας T είναι αντιστρέψιμος και $T^{-1} = T$.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Έστω ότι ο A είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα B. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = B$$

Τότε:

$$TP^{-1} \cdot A \cdot PT = TBT \quad \Longrightarrow \quad T^{-1}P^{-1} \cdot A \cdot PT = TBT \quad \Longrightarrow \quad (PT)^{-1} \cdot A \cdot PT = TBT$$

Υπολογίζουμε:

$$TBT =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1\,n-2} & k_{1\,n-1} & k_{1n} \\ 0 & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2\,n-2} & k_{2,n-1} & k_{2n} \\ 0 & 0 & k_{33} & \cdots & k_{3\,n-2} & k_{3\,n-1} & k_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{n-2\,n-2} & k_{n-2\,n-1} & k_{n-2\,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n-1\,n-1} & k_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & k_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ k_{n-1\,n} & k_{n-1\,n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ k_{n-2\,n} & k_{n-2\,n-1} & k_{n-2\,n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{2\,n} & k_{2\,n-1} & k_{2\,n-2} & \cdots & k_{23} & k_{22} & 0 \\ k_{1n} & k_{1\,n-1} & k_{1\,n-2} & \cdots & k_{13} & k_{12} & k_{11} \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι κάτω τριγωνικός. Άρα ο A είναι όμοιος με έναν κάτω τριγωνικό πίνακα.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Η απόδειξη είναι παρόμοια (χρησιμοποιώντας πάλι τον πίνακα T). $\square$

2.2. **Πότε είναι ένας πίνακας όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα;**

Θεώρημα 2.2. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας και $P_A(t)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Ο πίνακας A είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα, αν και μόνο αν, όλες οι ρίζες τού $P_A(t)$ ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$.*

Απόδειξη. «$\Longrightarrow$» Υπενθυμίζουμε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Αν λοιπόν, ο A είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα $D \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, τότε $P_A(t) = P_D(t)$. Αλλά το $P_D(t)$ ισούται με[1] $(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\dots(t-\lambda_n)$, όπου τα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ είναι τα στοιχεία τής κύριας διαγωνίου του D. Επιπλέον, το $P_A(t) = P_D(t)$ είναι ένα πολυώνυμο τού $\mathbb{K}[t]$ βαθμού n και αφού εκφράζεται ως γινόμενο γραμμμικών παραγόντων, τα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι ακριβώς όλες οι ρίζες του, οι οποίες ανήκουν στο $\mathbb{K}$.

«$\Longleftarrow$» Η απόδειξη θα εκτελεστεί με επαγωγή ως προς το μέγεθος n τού πίνακα A.

(*Επαγωγική Θεμελίωση*) Η αλήθεια τού θεωρήματος είναι φανερή για $n = 1$, αφού κάθε 1×1 πίνακας είναι άνω τριγωνικός.

(*Επαγωγική Υπόθεση*) Έστω ότι κάθε $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας, τού οποίου όλες οι ρίζες τού χαρακτηριστικού του πολυωνύμου ανήκουν στο $\mathbb{K}$, είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα.

(*Επαγωγική Απόδειξη*) Θα δείξουμε ότι το θεώρημα ισχύει, για κάθε $n \times n$ πίνακα A, τού οποίου όλες οι ρίζες τού χαρακτηριστικού του πολυωνύμου ανήκουν στο $\mathbb{K}$.

Ας είναι A ένας τέτοιος πίνακας και λ_1 μια ρίζα τού $P_A(t)$. Υπεθυμίζουμε ότι ο A ορίζει έναν $\mathbb{K}$–γραμμικό ενδομορφισμό

$$f_A : \mathsf{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathsf{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}_n, \qquad \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_n \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_n \end{pmatrix}$$

τού χώρου $\mathsf{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ των $n \times 1$ πινάκων, δηλαδή τού χώρου $\mathbb{K}_n$ των στηλών με n συνιστώσες από το $\mathbb{K}$, και επιπλέον ο A είναι ο πίνακας που παριστάνει τον f_A ως προς την κανονική βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ τού $\mathsf{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, δηλαδή $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

Ας είναι $\vec{v}_1 \in \mathsf{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ ένα ιδιοδιάνυσμα τού f_A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1, δηλαδή $f_A(\vec{v}_1) = A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$. Επειδή το $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, μπορούμε να θεωρήσουμε μια νέα βάση $\mathcal{B}'$ τού $\mathsf{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ με πρώτο διάνυσμά της το $\vec{v}_1$, δηλαδή $\mathcal{B}' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$. Ως προς τη νέα βάση $\mathcal{B}'$ ο πίνακας που παριστάνει τον f_A είναι ο

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{c|ccccc} \lambda_1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & B & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array}\right),$$

όπου B είναι ένας $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας.

Οι πίνακες $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ και $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ είναι όμοιοι, αφού παριστάνουν τον ίδιο γραμμικό ενδομορφισμό, ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ αντιστοίχως και γι' αυτό το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ τού A ισούται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $q(t)$ τού πίνακα $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$. Αλλά το $q(t) = (t-\lambda_1)P_B(t)$, όπου $P_B(t)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο τού $(n-1)\times(n-1)$ υποπίνακα B, ο οποίος εμφανίζεται στην προηγούμενη μορφή τού $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$, αφού

---

[1] Αυτό ισχύει όταν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ορίζεται ως $P_A(t) = \mathrm{Det}(XI_n - A)$. Όταν ορίζεται ως $P_A(t) = \mathrm{Det}(A - XI_n)$, τότε $P_D(t) = (-1)^n(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\dots(t-\lambda_n)$

$$\mathrm{Det}(tI_n - M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} t-\lambda_1 & * \quad * \quad * \quad \ldots \quad * \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \boxed{\quad tI_{n-1}-B \quad} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} = (t-\lambda_1)\mathrm{Det}(tI_{n-1}-B),$$

λόγω τής ειδικής μορφής που έχει ο $\mathrm{Det}M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$. Επειδή λοιπόν, $P_A(t) = q(t) = (t-\lambda_1)P_B(t)$, όλες οι ρίζες τού χαρακτηριστικού πολυωνύμου $P_B(t)$ τού B ανήκουν στο $\mathbb{K}$ και γι' αυτό, λόγω τής επαγωγικής υπόθεσης, ο B είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα C, δηλαδή υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας S, έτσι ώστε ο $S^{-1}BS = C$ να είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας.

Τώρα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \boxed{\quad S^{-1} \quad} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \quad * \quad * \quad \ldots \quad * \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \boxed{\quad B \quad} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \boxed{\quad S \quad} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \quad * \quad * \quad \ldots \quad * \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \boxed{\quad S^{-1}BS \quad} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \quad * \quad * \quad \ldots \quad * \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \boxed{\quad C \quad} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Επομένως, ο πίνακας

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \quad * \quad * \quad \ldots \quad * \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \boxed{\quad B \quad} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

είναι όμοιος με τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \quad * \quad * \quad \ldots \quad * \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \boxed{\quad C \quad} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix},$$

που είναι άνω τριγωνικός επειδή ο C είναι άνω τριγωνικός. Έτσι ο αρχικός πίνακας A είναι όμοιος με τον συγκεκριμένο άνω τριγωνικό πίνακα, αφού είναι όμοιος με τον $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$. □

2.3. **Αλγόριθμος Τριγωνοποίησης Πίνακα.** Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας πίνακας και υποθέτουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$, έτσι ώστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A να αναλύεται ως εξής:

$$P_A(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{a_1})(t-\lambda_2)^{a_2}\ \cdots\ (t-\lambda_k)^{a_k}$$

Έτσι $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ είναι οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του A. Τότε όπως γνωρίζουμε ο πίνακας A είναι τριγωνοποιήσιμος. Επομένως υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$P^{-1}\ A\ P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \epsilon_{12} & \cdots & \epsilon_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \epsilon_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \epsilon_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Αλγόριθμος Τριγωνοποίησης του A

1. Επιλέγουμε μια ιδιοτιμή λ_1 του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα-στήλη E_1:

$$A \cdot E_1 = \lambda_1 E_1$$

και συμπλήρώνουμε το ιδιοδιάνυσμα E_1 σε μια βάση

$$\mathcal{B}_1 = \big\{E_1, E_2, \cdots, E_n\big\}$$

του χώρου των στηλών $\mathbb{K}_n$.

Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα

$$P_1 = \big(E_1 E_2 \cdots E_n\big)$$

ο οποίος σχηματίζεται από τις στήλες της βάσης $\mathcal{B}_1$. Τότε ο πίνακας $P_1^{-1}\cdot A\cdot P_1$ θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$P_1^{-1}\cdot A\cdot P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \ldots & * \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & B_1 & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

Ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας B_1 έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο $\mathbb{K}$ διότι

$$P_A(t) = P_{P_1^{-1}\cdot A\cdot P_1}(t) = (\lambda_1 - t)P_{B_1}(t)$$

(α′) Αν ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας B_1 είναι άνω τριγωνικός, ο αλγόριθμος σταματάει και έχουμε βρει την άνω τριγωνική μορφή του A η οποία είναι ο πίνακας $P^{-1}\cdot A\cdot P_1$.

(β′) Αν ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας B_1 δεν είναι άνω τριγωνικός, τότε προχωρούμε στο επόμενο βήμα:

2. Επιλέγουμε μια ιδιοτιμή λ_2 του B_1 (η οποία εκ΄ κατασκευής είναι και ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα E_2':

$$B_1 \cdot E_2' = \lambda_2 E_2'$$

και συμπλήρώνουμε το ιδιοδιάνυσμα E_2' σε μια βάση

$$\mathcal{B}_2 = \left\{E_2', E_3', \cdots, E_n'\right\}$$

του χώρου των στηλών $\mathbb{K}_{n-1}$.

Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα

$$P_2 = \left(E_2' E_3' \cdots E_n'\right)$$

ο οποίος σχηματίζεται από τις στήλες της βάσης $\mathcal{B}_2$. Τότε ο πίνακας $P_2^{-1} \cdot B_1 \cdot P_2$ θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$P_2^{-1} \cdot B_1 \cdot P_2 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_2 & * \quad * \quad * \quad \ldots \quad * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ 0 & B_2 \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right)$$

O $(n-2) \times (n-2)$ πίνακας B_2 έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο $\mathbb{K}$ διότι

$$P_{B_1}(t) = P_{P_2^{-1} \cdot B_1 \cdot P_2}(t) = (\lambda_2 - t) P_{B_2}(t)$$

(α΄) Αν ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας B_2 είναι άνω τριγωνικός, ο αλγόριθμος σταματάει και έχουμε βρει την άνω τριγωνική μορφή του A ως εξής:

Θέτουμε

$$Q_2 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ 0 & P_2 \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right)$$

Τότε ο πίνακας Q_2 είναι αντιστρέψιμος, διότι $|Q_2| = 1|P_2| = |P_2| \neq 0$, και

$$Q_2^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ 0 & P_2^{-1} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right)$$

Επιπλέον έχουμε:

$$(P_1 Q_2)^{-1} \cdot A (P_1 Q_2) = Q_2^{-1} \cdot (P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1) \cdot Q_2 =$$

$$
Q_2^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & B_1 & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \cdot Q_2 =
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & P_2^{-1} & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & B_1 & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & P_2 & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & P_2^{-1} \cdot B_1 \cdot P_2 & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & & B_2 & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}
$$

Επειδή ο B_2 είναι άνω τριγωνικός, έπεται ότι και ο A είναι άνω τριγωνικός και ο τελευταίος πίνακας, δηλαδή ο πίνακας $(P_1Q_2)^{-1} \cdot A(P_1Q_2)$ είναι μια άνω τριγωνική μορφή του A.

(β') Αν ο $(n-2) \times (n-2)$ πίνακας B_2 δεν είναι άνω τριγωνικός, τότε προχωρούμε στο επόμενο βήμα:

3. Το βήμα αυτό είναι η επανάληψη του βήματος **2.** για τον $(n-2) \times (n-2)$ πίνακα B_2.

4. Συνεχίζουμε την παραπάνω διαδικασία η οποία μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων θα μας οδηγήσει στην άνω τριγωνική μορφή του πίνακα A.

Παράδειγμα 2.3. *Θεωρούμε τον πίνακα*

$$
A = \begin{pmatrix} 8 & 14 & 11 \\ -3 & -5 & -5 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}
$$

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A:

$$
P_A(t) = -(t-1)^3
$$

και άρα η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 3.

Επομένως ο πίνακας A είναι τριγωνοποιήσιμος. Εφαρμόζουμε το Αλγόριθμο Τριγωνοποίησης για να υπολογίσουμε μια άνω τριγωνική μορφή του A:

1. *Για την ιδιοτιμής $\lambda = 1$, υπολογίζουμε τον ιδιοχώρο*

$$\mathcal{V}(1) = \Big\{ \begin{pmatrix} k \\ -k/2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid k \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\rangle$$

και άρα έβα ιδιοδιάνυσμα του A το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι το

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Συμπληρώνουμε το E_1 σε μια βάση $\mathcal{B}_1$ του $\mathbb{R}_3$, για παράδειγμα:

$$\mathcal{B}_1 = \Big\{ E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$$

Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα $P_1 = (E_1 E_2 E_3)$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο του P_1:

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως τον πίνακα $P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1$:

$$P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1/2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο 2×2 πίνακας

$$B_1 := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

δεν είναι άνω τριγωνικός, επομένως προχωρούμε στο επόμενο βήμα:

2. *Οι ιδιοτιμές τοπυ B_1 είναι οι ιδιοτιμές του A, και άρα η μόνη ιδιοτιμή του B_1 είναι η $\lambda = 1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2.*

Για την ιδιοτιμής $\lambda = 1$ του 2×2 πίνακα B_1, υπολογίζουμε τον ιδιοχώρο

$$\mathcal{V}(1) = \Big\{ \begin{pmatrix} k \\ -2k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \mid k \in \mathbb{R} \Big\} = \Big\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Big\rangle$$

και άρα ένα ιδιοδιάνυσμα του B_1 το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι το

$$E_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Συμπληρώνουμε το E_2' σε μια βάση $\mathcal{B}_2$ του $\mathbb{R}_2$, για παράδειγμα:

$$\mathcal{B}_2 = \Big\{ E_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \;\; E_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big\}$$

Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα $P_1 = (E_2' E_3')$:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τον αντίστροφο του P_2*:*

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

και ακολούθως τον πίνακα $P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1$*:*

$$P_1^{-2} \cdot B_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := B_2$$

ο οποίος είναι άνω τριγωνικός. Άρα ο αλγόριθμος τριγωνοποίησης σταματάει και μπορούμε να υπολογίσουμε την άνω τριγωνική μορφή ως εξής:

Θέτουμε

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{P_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την άνω τριγωνική μορφή του πίνακα A *ως εξής:*

$$(P_1 Q_2)^{-1} \cdot A \cdot (P_1 Q_2) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς