ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ανοικτάμαθήματα
opencourses

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Το Θεώρημα των Cayley-Hamilton

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

3. **Το Θεώρημα των Cayley-Hamilton**

3.1. **Πολυωνυμικές Γραμμικές Απεικονίσεις και Πολυωνυμικοί Πίνακες.**

1. Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$.

Σταθεροποιούμε μια γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$.

Για κάθε πολυώνυμο $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + a_n t^n$ ορίζουμε μια απεικόνιση

$$P(f) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \vec{x} \longmapsto P(f)(\vec{x})$$

όπου

$$\begin{aligned} P(f)(\vec{x}) &:= a_0 \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}(\vec{x}) + a_1 f(\vec{x}) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(\vec{x}) + a_n f^n(\vec{x}) \\ &= a_0 \vec{x} + a_1 f(\vec{x}) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(\vec{x}) + a_n f^n(\vec{x}) \end{aligned}$$

Αν $\mathsf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{E}) = \{f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \mid f \text{ είναι γραμμική}\}$ είναι ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος των γραμμικών απεικονίσεων από τον $\mathcal{E}$ στον εαυτό του, τότε η παραπάνω διαδικασία ορίζει μια απεικόνιση

$$\mathbb{K}[t] \times \mathsf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{E}) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{E}), \quad \big(P(t), f\big) \longmapsto P(f)$$

Γραμμικές απεικονίσεις της μορφής $P(f)$, όπου $P(t) \in \mathbb{K}[t]$, καλούνται *πολυωνυμικές γραμμικές απεικονίσεις*.

2. Σταθεροποιούμε έναν $n \times n$ πίνακα $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Για κάθε πολυώνυμο $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + a_n t^n$ ορίζουμε έναν $n \times n$ πίνακα

$$P(A) := a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_{n-1}A^{n-1} + a_n A^n \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$$

Η παραπάνω διαδικασία ορίζει μια απεικόνιση

$$\mathbb{K}[t] \times \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K}), \quad \big(P(t), A\big) \longmapsto P(A)$$

Τετραγωνικοί πίνακες της μορφής $P(A)$, όπου $P(t) \in \mathbb{K}[t]$, καλούνται *πολυωνυμικοί πίνακες*.

3.2. **Το Θεώρημα των Cayley-Hamilton.** Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος και $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ ένα πολυώνυμο με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{K}$. Έστω επίσης $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, και $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός πίνακας.

Ορισμός 3.1. (1) *Το $P(t)$ μηδενίζει την γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, αν: $P(f) = 0$.*
(2) *Το $P(t)$ μηδενίζει τον τετραγωνικό πίνακα $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, αν: $P(A) = \mathbb{O}$.*

Το ακόλουθο σημαντικό Θεώρημα των Cayley-Hamilton πιστοποιεί ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα μηδενίζει τον πίνακα. Στην απόδειξη του Θεωρήματος εμπλέκονται πίνακες τα στοιχεία των οποίων είναι πολυώνυμα. Οι βασικές ιδιότητες πινάκων με στοιχεία αριθμούς από το σώμα που θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη, είναι εύκολο να δει κανείς ότι ισχύουν και για πίνακες με στοιχεία πολυώνυμα.

Θεώρημα 3.2. *(Cayley-Hamilton) Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$ πίνακας. και $P_A(t)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Τότε ο πολυωνυμικός πίνακας $P_A(A)$ είναι ο μηδενικός:*

$$P_A(A) = \mathbb{O}$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $P_A(t) = |A - tI_n| = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$. Θα δείξουμε ότι

$$P_A(A) = (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = \mathbb{O} \tag{3.1}$$

Υπενθυμιζουμε ότι για κάθε τετραγωνικό πίνακα $M \in \mathsf{M}_{n\times}(\mathbb{K})$ ισχύει:

$$M \cdot \mathsf{adj}(M) = |M| \cdot I_n$$

Επομένως θα έχουμε την ακόλουθη ισότητα πινάκων με στοιχεία πολυώνυμα:

$$(A - tI_n) \cdot \mathsf{adj}(A - tI_n) = |A - tI_n| \cdot I_n = P_A(t) \cdot I_n \tag{3.2}$$

Τα στοιχεία του πίνακα πολυωνύμων $\mathsf{adj}(A - tI_n)$ είναι πολυώνυμα τα οποία προκύπτουν ως ελάσσονες ορίζουσες τάξης $n-1$ του πίνακα $A-tI_n$, και άρα θα είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ $n-1$. Επομένως υπάρχουν πίνακες $B_0, B_1, \cdots, B_{n-1} \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:

$$\mathsf{adj}(A - tI_n) = B_{n-1}t^{n-1} + B_{n-2}t^{n-2} + \cdots + B_1 t + B_0 \tag{3.3}$$

Τότε συνδυάζοντας τις (2.2) και (2.3) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
(A - tI_n) \cdot \mathsf{adj}(A - tI_n) = P_A(t) \cdot I_n = ((-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0) \cdot I_n \quad &\Longrightarrow \\
A \cdot B_{n-1}t^{n-1} + A \cdot B_{n-2}t^{n-2} + \cdots + A \cdot B_1 t + A \cdot B_0 - B_{n-1}t^n - B_{n-2}t^{n-1} - \cdots - B_1 t^2 - B_0 t \quad &= \\
(-1)^n t^n I_n + a_{n-1}t^{n-1} I_n + \cdots + a_1 t I_n + a_0 I_n \quad &\Longrightarrow \\
-B_{n-1}t^n - (A \cdot B_{n-1} + B_{n-2})t^{n-1} + \cdots + (A \cdot B_2 - B_1)t^2 + (A \cdot B_1 - B_0)t + A \cdot B_0 \quad &= \\
(-1)^n t^n I_n + a_{n-1}t^{n-1} I_n + \cdots + a_1 t I_n + a_0 I_n &
\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα είναι μια ισότητα πινάκων με στοιχεία πολυώνυμα, και επομένως θα έχουμε:

$$\begin{gathered}
-B_{n-1} = (-1)^n I_n \\
A \cdot B_{n-1} + B_{n-2} = a_{n-1} I_n \\
\vdots \\
A \cdot B_1 - B_0 = a_1 I_n \\
A \cdot B_0 = a_0 I_n
\end{gathered}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη ισότητα πινάκων με τον πίνακα A^n, την δεύτερη με τον πίνακα A^{n-1}, $\cdots$, την προτελευταία με τον πίνακα A, και την τελευταία με τον πίνακα I_n. Τότε θα έχουμε τις ακόλουθες ισότητες πινάκων:

$$\begin{gathered}
-A^n \cdot B_{n-1} = (-1)^n A^n \cdot I_n = (-1)^n A^n \\
A^n \cdot B_{n-1} + A^{n-1} \cdot B_{n-2} = a_{n-1}A^{n-1} \cdot I_n = a_{n-1}A^{n-1} \\
\vdots \\
A^2 \cdot B_1 - A \cdot B_0 = a_1 A \cdot I_n = a_1 A \\
A \cdot B_0 = a_0 I_n
\end{gathered}$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω ισότητες πινάκων, βλέπουμε ότι το πρώτο μέλος της προκύπτουσας ισότητας είναι ο μηδενικός πίνακας $\mathbb{O}$ και το δεύτερο μέλος είναι ο πίνακας $(-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = P_A(A)$. Επομένως δείξαμε ότι:

$$P_A(A) = \mathbb{O}$$

□

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι το Θεώρημα των Cayley-Hamilton ισχύει και για γραμμικές απεικονίσεις. Πριν περάσουμε στην απόδειξη, θα χρειασθούμε το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 3.3. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και $\mathcal{B}$ μια βάση του $\mathcal{E}$. Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, και $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ ένα πολυώνυμο. Τότε:*

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\big(P(f)\big) = P\big(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\big)$$

Απόδειξη. Έστω $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{m-1}t^{m-1} + a_m t^m$. Τότε:

$$P(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)) = a_0 I_n + a_1 M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) + a_2 M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)^2 + \cdots + a_{m-1} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)^{m-1} + a_m M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)^m \tag{3.4}$$

Υπενθυμίζουμε από την Γραμμική Άλγεβρα Ι, ότι αν $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$, τότε η απεικόνιση

$$\Phi : \ \mathsf{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{E},\mathcal{E}) \ \longrightarrow \ \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K}), \quad \Phi(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$$

είναι ισομορφισμός $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων, όπου $n = \dim_{\mathbb{K}}\mathcal{E}$. Επιπλέον η Φ στέλνει την σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων στο γινόμενο των αντίστοιων πινάκων, δηλαδή ισχύει:

$$\Phi(f\circ g) = \Phi(f)\cdot\Phi(g) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g)$$

Ιδιαίτερα θα έχουμε:

$$\Phi(f^k) = \Phi(f\circ f\circ\cdots\circ f) = \Phi(f)\cdot\Phi(f)\cdot\ \cdots\ \cdot\Phi(f) = \Phi(f)^k = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)^k$$

Επίσης η Φ και στέλνει την ταυτοτική γραμμική απεικόνιση $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ στον ταυτοτικό $n\times n$ πίνακα I_n:

$$\Phi(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) = I_n$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ιδιότητες του ισομορφισμού Φ, η σχέση (3.4) δίνει:

$$\begin{aligned} P(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)) &= a_0\Phi(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}) + a_1\Phi(f) + a_2\Phi(f)^2 + \cdots + a_n\Phi(f)^m = \\ \Phi(a_0\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} &+ a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_m f^m) = \Phi(P(f)) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(P(f)) \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 3.4. *Έστω $A\in\mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας $n\times n$ πίνακας και και $P(t)\in\mathbb{K}[t]$ ένα πολυώνυμο. Αν $\mathcal{B}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}_n$, και $f_A\colon\mathbb{K}_n\longrightarrow\mathbb{K}_n$, $f_A(X) = AX$, είναι η επαγόμενη γραμμική απεικόνιση, τότε:*

$$P(A) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\big(P(f_A)\big)$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης f_A στην κανονική βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{K}_n$ είναι ο A: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_A) = A$. Τότε το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 3.3. □

Θεώρημα 3.5. *(Cayley-Hamilton) Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$. Έστω $f\colon\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, και $P_f(t)$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f. Τότε η γραμμική απεικόνσιση $P_f(f)$ είναι η μηδενική:*

$$P_f(f) = 0$$

Απόδειξη. Θεωρώντας τυχούσα βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$, και θέτοντας $P(t) = P_f(t)$ στο Λήμμα 3.3, έπεται ότι:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\big(P_f(f)\big) = P_f\big(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\big) \tag{3.5}$$

Όπως γνωρίζουμε, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μιας γραμμκής απεικόνισης συμπίπτει με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακά της σε τυχούσα βάση του $\mathcal{E}$:

$$P_f(t) = P_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}(t)$$

και επομένως:

$$P_f(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)) = P_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)) \tag{3.6}$$

Απο το Θεώρημα των Cayley-Hamilton 3.2 για πίνακες έπεται ότι $P_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)) = \mathbb{O}$. Επομένως $P_f(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)) = \mathbb{O}$, και τότε η σχέση (3.6) δείχνει ότι

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}\big(P_f(f)\big) = \mathbb{O}$$

δηλαδή ο πίνακας της πολυωνυμικής γραμμικής απεικόνισης $P_f(f)$ στην βάση $\mathcal{B}$ είναι ο μηδενικός πίνακας. Επειδή η μόνη γραμμική απεικόνιση της οποίας ο πίνακας σε τυχούσα βάση του $\mathcal{E}$ είναι ο μηδενικός, έπεται ότι η γραμμική απεικόνιση $P_f(f)$ είναι η μηδενική:

$$P_f(f) = 0$$

□

3.3. **Μια άλλη απόδειξη τού Θεωρήματος Cayley-Hamilton.**

Πρόταση 3.6. *Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Τότε ο πίνακας $B = (A - a_{11}I_n)(A - a_{22}I_n)\dots(A - a_{nn}I_n)$ ισούται με τον μηδενικό $n \times n$ πίνακα, δηλαδή τον $\mathbb{O}_{n\times n}$.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι ο B είναι ο $\mathbb{O}_{n\times n}$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$B \cdot \vec{e}_j = \vec{0}, \forall j, 1 \leq j \leq n,$$

όπου $\vec{e}_j$ είναι ο $n \times 1$ πίνακας, τού οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με μηδέν, εκτός από το στοιχείο τής j–οστής γραμμής το οποίο ισούται με 1, αφού το γινόμενο $B \cdot \vec{e}_j$ ισούται με την j–οστή στήλη τού B.

Πριν προχωρήσουμε παρατηρούμε ότι οποιοδήποτε γινόμενο

$$(A - a_{i_1i_1}I_n)(A - a_{i_2i_2}I_n)\dots(A - a_{i_ni_n}I_n),$$

όπου τα $a_{i_1i_1}, a_{i_2i_2}, \dots, a_{i_ni_n}$, είναι μια μετάθεση των $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$, δηλαδή είναι οι αριθμοί a_{11}, a_{22}, $\dots a_{nn}$, ενδεχόμενα με διαφορετική σειρά, ισούται και πάλι τον πίνακα B, αφού ο B ισούται με την τιμή $p(A)$ τού πολυωνύμου $p(t) = (t - a_{11})(t - a_{22})\dots(t - a_{nn})$, οι παράγοντες τού οποίου μετατίθενται, δηλαδή $p(t) = (t - a_{i_1i_1})(t - a_{i_2i_2})\dots(t - a_{i_ni_n})$.

Θα δείξουμε επαγωγικώς ότι

$$(A - a_{11}I_n)(A - a_{22}I_n)\dots(A - a_{ii}I_n) \cdot \vec{e}_j = \vec{0}, \forall j, 1 \leq j \leq i, \tag{*}$$

Για $i = 1$ έχουμε:

$$(A - a_{11}I_n)(\vec{e}_1 = A \cdot \vec{e}_1 - a_{11}\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e}_1 - a_{11}\vec{e}_1 = \vec{0},$$

επειδή ο A είναι άνω τριγωνικός.
Έστω ότι η $(*)$ είναι αληθής για $i = \kappa$. Θα δείξουμε την $(*)$ για $i = \kappa + 1$.
Για κάθε $\vec{e}_j, 1 \leq j \leq \kappa$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&(A - a_{11}I_n)(A - a_{22}I_n)\dots(A - a_{\kappa\kappa}I_n)(A - a_{\kappa+1,\kappa+1}I_n) \cdot \vec{e}_j = \\
&(A - a_{\kappa+1,\kappa+1}I_n)(A - a_{11}I_n)(A - a_{22}I_n)\dots(A - a_{\kappa\kappa}I_n) \cdot \vec{e}_j = \vec{0},
\end{aligned}$$

αφού λόγω τής επαγωγικής υπόθεσης $(A - a_{11}I_n)(A - a_{22}I_n)\dots(A - a_{\kappa\kappa}I_n) \cdot \vec{e}_j = \vec{0}$, όταν $1 \leq j \leq \kappa$.
Υπολείπεται η απόδειξη για $j = \kappa + 1$.
Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
&(A - a_{\kappa+1,\kappa+1}I_n) \cdot \vec{e}_{\kappa+1,\kappa+1} = A \cdot \vec{e}_{\kappa+1,\kappa+1} - a_{\kappa+1,\kappa+1}\vec{e}_{\kappa+1} = \\
&a_{1,\kappa+1}\vec{e}_1 + a_{2,\kappa+1}\vec{e}_2 + \dots + a_{\kappa,\kappa+1}\vec{e}_\kappa + a_{\kappa+1,\kappa+1}\vec{e}_{\kappa+1} - a_{\kappa+1,\kappa+1}\vec{e}_{\kappa+1} = \\
&a_{1,\kappa+1}\vec{e}_1 + a_{2,\kappa+1}\vec{e}_2 + \dots + a_{\kappa,\kappa+1}\vec{e}_\kappa.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, το $(A - a_{\kappa+1,\kappa+1}I_n) \cdot \vec{e}_{\kappa+1,\kappa+1}$ είναι ένας $\mathbb{K}$–γραμμικός συνδυασμός των $\vec{e}_j, 1 \leq j \leq \kappa$. Αφού ο πίνακας $(A - a_{11}I_n)(A - a_{22}I_n)\dots(A - a_{\kappa\kappa}I_n)$, μηδενίζει τα $\vec{e}_j$, για κάθε $j, 1 \leq j \leq \kappa$, μηδενίζει και κάθε γραμμικό συνδυασμό τους. Έτσι, ο συγκεκριμένος πίνακας μηδενίζει και το $(A - a_{\kappa+1,\kappa+1}I_n) \cdot \vec{e}_{\kappa+1,\kappa+1}$.
Ώστε,

$$(A - a_{11}I_n)(A - a_{22}I_n)\dots(A - a_{\kappa\kappa}I_n)(A - a_{\kappa+1,\kappa+1}I_n) \cdot \vec{e}_{\kappa+1,\kappa+1} = \vec{0}.$$

Επομένως, $B \cdot \vec{e}_j = \vec{0}, \forall j, 1 \leq j \leq n$. $\square$

Παρατήρηση 3.7. *Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο $(t - a_{11})(t - a_{22})\dots(t - a_{nn})$ ισούται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t) = \mathrm{Det}(tI_n - A)$ τού άνω τριγωνικού πίνακα A. Συνεπώς, η ανωτέρω Πρόταση δηλώνει ότι $P_A(A) = (A - a_{11}I_n)(A - a_{22}I_n)\dots(A - a_{nn}I_n) = \mathbb{O}_{n\times n}$, που είναι το Θεώρημα Cayley-Hamilton, όταν ο A είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Ας δούμε πώς αποδεικνύεται η γενική περίπτωση:*

Θεώρημα 3.8. *(Cayley-Hamilton) Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με συνιστώσες από το σώμα $\mathbb{K}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ή $\mathbb{R}$. Αν $P_A(t)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο τού A, τότε $P_A(A) = \mathbb{O}_{n\times n}$.*

Απόδειξη. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ τού A ισούται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_B(t)$ οποιουδήποτε πίνακα που είναι όμοιος με τον A. Όλες οι ρίζες τού $P_A(t)$ ανήκουν στο σώμα $\mathbb{C}$ και γι' αυτό ο A είναι όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα B με πιθανόν μιγαδικές συνιστώσες, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2. Ας πούμε λοιπόν ότι $B = S^{-1}AS$, όπου ο $S \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Αλλά για τον άνω τριγωνικό πίνακα B γνωρίζουμε ότι $P_B(B) = \mathbb{O}_{n\times n}$, λόγω τής Πρότασης 3.6, και αφού $P_A(t) = P_B(t)$, έχουμε $P_A(B) = \mathbb{O}_{n\times n}$. Επιπλέον είναι:

$$P_A(A) = P_A(SBS^{-1}) = SP_A(B)S^{-1} = S\mathbb{O}_{n\times n}S^{-1} = \mathbb{O}_{n\times n}, \tag{**}$$

□

Παρατήρηση 3.9. *Σχετικά με τον υπολογισμό που εκτελέσαμε στην (∗∗) ισχύει το γενικότερο:*

Αν, $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t \cdots + a_m t^m$ είναι οποιοδήποτε πολυώνυμο και $A, S^{-1}AS$ είναι δύο όμοιοι τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες, τότε η τιμή $P(S^{-1}AS)$ τού $P(t)$ στον πίνακα $S^{-1}AS$ ισούται με $S^{-1}P(A)S$:

$$P(S^{-1}AS) = S^{-1}P(A)S$$

Πραγματικά:

$$\begin{aligned} P(S^{-1}AS) = a_0 I_n + a_1(S^{-1}AS) + a_2(S^{-1}AS)^2 + \cdots + a_m(S^{-1}AS)^m = \\ a_0 S^{-1}S + a_1(S^{-1}AS) + a_2 S^{-1}A^2 S + \cdots + a_m S^{-1}A^m S = \\ S^{-1}(a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_m A^m)S = S^{-1}P(A)S. \end{aligned}$$

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης «Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1249.

Σημείωμα Αδειοδότησης