ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Κανονική Μορφή Fitting

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

5. Κανονική Μορφή Fitting

Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας πίνακας. Σκοπός μας στην παρούσα παράγραφο είναι η απόδειξη του ακόλουθου Θεωρήματος:

Θεώρημα 5.1. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας πίνακας. Τότε ο A είναι όμοιος με έναν πίνακα της μορφής*

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{N} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \boxed{P} \end{pmatrix}$$

όπου ο P είναι αντιστρέψιμος και ο N είναι μηδενοδύναμος.

Η παραπάνω μορφή καλείται *μορφή Fitting του πίνακα A.*

Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

μια γραμμική απεικόνιση.

Συμβολίζουμε με $f^k = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (k-φορές) την σύνθεση της f με τον εαυτό της k-φορές, $\forall k \geq 1$. Υπενθυμίζουμε ότι η f καλείται *μηδενοδύναμη* αν $f^k = 0$.

5.1. **Αποσύνθεση Fitting.**
Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 5.1 χρειαζόμαστε πρώτα κάποια προεργασία.

Πρόταση 5.2. (1) *Υπάρχει μια (αύξουσα) ακολουθία υπόχωρων του $\mathcal{E}$:*

$$\{\vec{0}\} \subseteq \mathsf{Ker}(f) \subseteq \mathsf{Ker}(f^2) \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{Ker}(f^k) \subseteq \mathsf{Ker}(f^{k+1}) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{E} \tag{5.1}$$

και φυσικός αριθμός $\mu \geq 0$ έτσι ώστε: $\mathsf{Ker}(f^\mu) = \mathsf{Ker}(f^{\mu+1}) = \mathsf{Ker}(f^{\mu+2}) = \cdots$.

(2) *Υπάρχει μια (φθίνουσα) ακολουθία υποχώρων του $\mathcal{E}$:*

$$\{\vec{0}\} \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{Im}(f^{k+1}) \subseteq \mathsf{Im}(f^k) \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{Im}(f^2) \subseteq \mathsf{Im}(f) \subseteq \mathcal{E} \tag{5.2}$$

και φυσικός αριθμός $\lambda \geq 0$ έτσι ώστε: $\mathsf{Im}(f^\lambda) = \mathsf{Im}(f^{\lambda+1}) = \mathsf{Im}(f^{\lambda+2}) = \cdots$.

Απόδειξη. (1) Δείχνουμε πρώτα ότι

$$\mathsf{Ker}(f^k) \subseteq \mathsf{Ker}(f^{k+1}), \quad \forall k \geq 0$$

Έστω $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(f^k)$, δηλαδή $f^k(\vec{x}) = \vec{0}$. Τότε $f(f^k(\vec{x})) = \vec{0}$ και άρα $(f \circ f^k)(\vec{x}) = f^{k+1}(\vec{x}) = \vec{0}$. Άρα $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(f^{k+1}(\vec{x}) = \vec{0}$ και επομένως $\mathsf{Ker}(f^k) \subseteq \mathsf{Ker}(f^{k+1})$. Έτσι έχουμε την ακολουθία υπόχωρων (5.1). Τότε όμως θα έχουμε και

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f^k) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f^{k+1}), \quad \forall k \geq 0$$

Τότε η ακολουθία υπόχωρων (5.1) επάγει την αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών

$$0 \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f^2) \leq \cdots \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f^k) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f^{k+1}) \leq \cdots \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$$

Επειδή $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$, έπεται το σύνολο φυσικών αριθμών $\big\{\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f^k),\ k \geq 0\big\}$ είναι πεπερασμένο. Άρα υπάρχει φυσικός $\mu \geq 0$ έτσι ώστε: $\dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f^\mu) = \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f^{\mu+1}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathsf{Ker}(f^{\mu+2}) = \cdots$. Επειδή από την ακολουθία (5.1) έχουμε $\mathsf{Ker}(f^\mu) \subseteq \mathsf{Ker}(f^{\mu+1}) \subseteq \mathsf{Ker}(f^{\mu+2}) \subseteq \cdots$, έπεται ότι:

$$\mathsf{Ker}(f^\mu) = \mathsf{Ker}(f^{\mu+1}) = \mathsf{Ker}(f^{\mu+2}) = \cdots$$

(2) Δείχνουμε πρώτα ότι

$$\mathsf{Im}(f^{k+1}) \subseteq \mathsf{Im}(f^k), \quad \forall k \geq 0$$

Έστω $\vec{x} \in \mathsf{Im}(f^{k+1})$, δηλαδή υπάρχει $\vec{y} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f^{k+1}(\vec{y}) = \vec{x}$. Τότε $f^{k+1}(\vec{y}) = (f^k \circ f)(\vec{y}) = f^k(f(\vec{y})) = \vec{x}$, και άρα $\vec{x} \in \mathsf{Im}(f^k)$. Έτσι $\mathsf{Im}(f^{k+1}) \subseteq \mathsf{Im}(f^k)$. Έτσι έχουμε την ακολουθία υπόχωρων (5.2). Τότε όμως θα έχουμε και

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f^{k+1}) \ \leq\ \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f^k), \quad \forall k \geq 0$$

Τότε η ακολουθία υπόχωρων (5.2) επάγει την αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών

$$0 \ \leq\ \cdots \ \leq\ \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f^{k+1}) \ \leq\ \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f^k) \ \leq\ \cdots \ \leq\ \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f^2) \ \leq\ \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f) \ \leq\ \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$$

Επειδή $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$, έπεται το σύνολο φυσικών αριθμών $\big\{ \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f^k),\ k \geq 0 \big\}$ είναι πεπερασμένο. Άρα υπάρχει φυσικός $\lambda \geq 0$ έτσι ώστε: $\cdots = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f^{\lambda+2}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f^{\lambda+1}) = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f^{\lambda})$. Επειδή από τη ακολουθία (5.2) έχουμε $\cdots \subseteq \mathsf{Im}(f^{\lambda+2}) \subseteq \mathsf{Im}(f^{\lambda+1}) \subseteq \mathsf{Im}(f^{\lambda})$, έπεται ότι:

$$\cdots = \mathsf{Im}(f^{\lambda+2}) = \mathsf{Im}(f^{\lambda+1}) = \mathsf{Im}(f^{\lambda})$$

□

Λήμμα 5.3. *Με τους συμβολισμούς της Πρότασης* 5.2*, έστω* $m := \mathsf{max}\{\mu, \lambda\}$.

1. $f(\mathsf{Ker}(f^m) \ \subseteq\ \mathsf{Ker}(f^m)$ *και άρα η* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *επάγει μια γραμμική απεικόνιση:*

$$f_1:\ \mathsf{Ker}(f^m) \ \longrightarrow\ \mathsf{Ker}(f^m), \quad f_1(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Επιπλέον η f_1 *είναι μηδενοδύναμη, δηλαδή* $f_1^r = 0$*, για κάποιον* $r \geq 1$.

2. $f(\mathsf{Im}(f^m) \ \subseteq\ \mathsf{Im}(f^m)$ *και άρα η* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *επάγει μια γραμμική απεικόνιση:*

$$f_2:\ \mathsf{Im}(f^m) \ \longrightarrow\ \mathsf{Im}(f^m), \quad f_2(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Επιπλέον η f_2 *είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. (1) Για το **1.** θα έχουμε:

(α) Έστω $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(f^m)$, δηλαδή $f^m(\vec{x}) = \vec{0}$. Τότε $f(f^m(\vec{x})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$ και άρα $f^{m+1}(\vec{x}) = \vec{0}$, δηλαδή $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(f^{m+1})$. Όμως επειδή $m \geq \mu$, έχουμε $\mathsf{Ker}(f^{m+1}) = \mathsf{Ker}(f^m)$ και άρα $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(f^m$. Επομένως $f(\mathsf{Ker}(f^m)) \subseteq \mathsf{Ker}(f^m)$. Προφανώς τότε η f επάγει μια γραμμική απεικόνιση $f_1\colon\ \mathsf{Ker}(f^m) \ \longrightarrow\ \mathsf{Ker}(f^m)$, ορίζοντας $f_1(\vec{x}) = f(\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in \mathsf{Ker}(f^m)$.

(β) Έστω $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(f^m)$, δηλαδή $f^m(\vec{x}) = \vec{0}$. Τότε $f_1^{m+1}(\vec{x} = f^{m+1}(\vec{x}) = f(f^m(\vec{0}) = f(\vec{0}) = \vec{0}$. Άρα θέτοντας $r = m+1$ έχουμε $f_1^r(\vec{x}) = 0$, $\forall \vec{x} \in \mathsf{Ker}(f^m)$ και επομένως $f_1^r = 0$, δηλαδή η f_1 είναι μηδενοδύναμη.

(2) Για το **2.** θα έχουμε:

(α) Έστω $\vec{x} \in f(\mathsf{Im}(f^m))$, δηλαδή υπάρχει $\vec{y} \in \mathsf{Im}(f^m)$ έτσι ώστε: $f(\vec{y}) = \vec{x}$. Επειδή $\vec{y} \in \mathsf{Im}(f^m)$ έπεται ότι υπάρχει $\vec{z} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f^m(\vec{z}) = \vec{y}$. Τότε $\vec{x} = f(\vec{y}) = f(f^m(\vec{z})) = f^{m+1}(\vec{z}$ και άρα $\vec{x} \in \mathsf{Im}(f^{m+1})$. Επειδή $m \geq \lambda$, έπεται ότι θα έχουμε $\mathsf{Im}(f^{m+1}) = \mathsf{Im}(f^m)$ και άρα $\vec{x} \in \mathsf{Im}(f^m$. Επομένως $f(\mathsf{Im}(f^m)) \subseteq \mathsf{Im}(f^m)$. Προφανώς τότε η f επάγει μια γραμμική απεικόνιση $f_1\colon\ \mathsf{Im}(f^m) \ \longrightarrow\ \mathsf{Im}(f^m)$, ορίζοντας $f_2(\vec{x}) = f(\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in \mathsf{Im}(f^m)$.

(β) Έστω $\vec{y} \in \mathsf{Im}(f^m)$. Επειδή $\mathsf{Im}(f^m) = \mathsf{Im}(f^{m+1})$, έπεται ότι $\vec{y} \in \mathsf{Im}(f^{m+1})$ και άρα υπάρχει $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f^{m+1}(\vec{x}) = \vec{y}$. Τότε: $\vec{y} = f^{m+1}(\vec{x}) = f(f^m(\vec{x})$ και θέτοντας $\vec{z} := f^m(\vec{x}) \in \mathsf{Im}(f^m)$ θα έχουμε $\vec{y} = f(\vec{z}) = f_2(\vec{z})$. Αυτό σημαίνει ότι η f_2 είναι επιμορφισμός. Επειδή $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathsf{Im}(f^m) \leq \mathsf{dim}_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$, έπεται ότι η f_2 είναι ισομορφισμός.

□

Θεώρημα 5.4. *Έστω* $\mathcal{E}$ *ένας* $\mathbb{K}$*-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος* $\mathbb{K}$*. Αν* $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε υπάρχει* $m \geq 1$ *έτσι ώστε:*

$$\mathcal{E} = \mathsf{Ker}(f^m) \oplus \mathsf{Im}(f^m)$$

Απόδειξη. Έστω $m = \mathsf{max}\{\mu, \lambda\}$ όπως στην Πρόταση 5.2 ή στο Λήμμα 5.3.

(1) Δείχνουμε πρώτα ότι: $\mathsf{Ker}(f^m) \cap \mathsf{Im}(f^m) = \{\vec{0}\}$.

Έστω $\vec{x} \in \mathsf{Ker}(f^m) \cap \mathsf{Im}(f^m)$. Τότε $f^m(\vec{x}) = \vec{0}$ και υπάρχει $\vec{y} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f^m(\vec{y}) = \vec{x}$. Τότε $f^{2m}(\vec{y}) = f^m(f^m(\vec{y})) = f^m(\vec{x}) = \vec{0}$ και άρα $\vec{y} \in \mathsf{Ker}(f^{2m})$. Επειδή $\mathsf{Ker}(f^{2m}) = \mathsf{Ker}(f^m)$, έπεται ότι $\vec{y} \in \mathsf{Ker}(f^m)$ και άρα $\vec{x} = f^m(\vec{y}) = \vec{0}$. Επομένως $\mathsf{Ker}(f^m) \cap \mathsf{Im}(f^m) = \{\vec{0}\}$.

(2) Δείχνουμε ότι: $\mathcal{E} = \mathsf{Ker}(f^m) + \mathsf{Im}(f^m)$.

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{E}$. Τότε $f^m(\vec{x}) \in \mathsf{Im}(f^m)$. Επειδή $\mathsf{Im}(f^m) = \mathsf{Im}(f^{2m})$ έπεται ότι $f^m(\vec{x}) \in \mathsf{Im}(f^{2m})$ και άρα υπάρχει $\vec{y} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε: $f^m(\vec{x}) = f^{2m}(\vec{y})$. Τότε: $f^m(\vec{x}) = f^{2m}(\vec{y}) = f^m(f^m(\vec{y}))$ και άρα $f^m(\vec{x} - f^m(\vec{y})) = \vec{0}$. Θέτοντας $\vec{z} := \vec{x} - f^m(\vec{y})$ έπεται ότι $\vec{z} \in \mathsf{Ker}(f^m)$ και

$$\vec{x} = \vec{z} + f^m(\vec{y}, \qquad \vec{z} \in \mathsf{Ker}(f^m), \quad f^m(\vec{y}) \in \mathsf{Im}(f^m)$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι: $\mathcal{E} = \mathsf{Ker}(f^m) + \mathsf{Im}(f^m)$.

Από τα (1) και (2) έχουμε ότι $\mathcal{E} = \mathsf{Ker}(f^m) \oplus \mathsf{Im}(f^m)$. □

Θεώρημα 5.5. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Αν $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε υπάρχει βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$ έτσι ώστε ο πίνακας της f στην βάση $\mathcal{B}$ να είναι της μορφής:*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{N} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \boxed{P} \end{pmatrix}$$

όπου ο P είναι αντιστρέψιμος και ο N είναι μηδενοδύναμος.

Απόδειξη. Έστω ο φυσικός αριθμός m όπως στο παραπάνω Θεώρημα 5.3. Τότε θα έχουμε $\mathcal{E} = \mathsf{Ker}(f^m) \oplus \mathsf{Im}(f^m)$. Από την άλλη πλευρά από την Πρόταση 5.2 η f επάγει έναν ισομορφισμό

$$f_2\colon\ \mathsf{Im}(f^m) \longrightarrow \mathsf{Im}(f^m), \quad f_2 = f|_{\mathsf{Im}(f^m)}$$

και μια μηδενοδύναμη γραμμική απεικόνιση

$$f_1\colon\ \mathsf{Ker}(f^m) \longrightarrow \mathsf{Ker}(f^m, \quad f_1 = f|_{\mathsf{Ker}(f^m)}$$

Έστω $\mathcal{B}_1$ μια βάση του υπόχωρου $\mathsf{Ker}(f^m)$ και $\mathcal{B}_2$ μια βάση του υπόχωρου $\mathsf{Im}(f^m)$. Τότε ο πίνακας $P := M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}(f_2)$ της f_2 στην βάση $\mathcal{B}_2$ θα είναι αντιστρέψιμος (επειδή η f_2 είναι ισομορφσιμός) και ο πίνακας $N := M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(f_1)$ της f_1 στην βάση $\mathcal{B}_1$ θα είναι μηδενοδύναμος (επειδή η f_1 είναι μηδενοδύναμη.

Επειδή το άθροισμα $\mathsf{Ker}(f^m) + \mathsf{Im}(f^m)$ είναι ευθύ και μας δίνει τον χώρο $\mathcal{E}$, έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$. Τότε προφανώς $f(\mathcal{B}_2) \subseteq \mathsf{Im}(f^m)$ και $f(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathsf{Ker}(f^m)$ και τότε ο πίνακας της f στην βάση $\mathcal{B}$ θα είναι της μορφής

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{N} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \boxed{P} \end{pmatrix}$$

όπου ο P είναι αντιστρέψιμος και ο N είναι μηδενοδύναμος. □

5.2. **Κανονική Μορφή Fitting.** Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα 5.1.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1**:** Θεωρούμε την γραμμική αεπικόνιση

$$f_A\ :\ \mathbb{K}_n \ \longrightarrow\ \mathbb{K}_n, \qquad f_A(X) = A \cdot X$$

Από το Θεώρημα 5.4 έπεται ότι υπάρχει βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbb{K}_n$ έτσι ώστε ο πίνακας της f_A στην βάση $\mathcal{B}$ να είναι της μορφής:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_A) = \begin{pmatrix} \boxed{N} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \boxed{P} \end{pmatrix}$$

Επειδή ο πίνακας της f_A στην κανονική βάση του $\mathbb{K}_n$ είναι ο A έπεται ότι ο πίνακας A είναι όμοιος με τον παραπάνω πίνακα. $\square$

5.3. **Ευθύ Άθροισμα Γραμμικών Απεικονίσεων και Πινάκων.** Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$.

Υποθέτουμε ότι $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ και έστω $f\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ και $g\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις.

Ορισμός 5.6. *Το* **ευθύ άθροισμα** $f \oplus g$ *των γραμμικών απεικονίσεων* f *και* g *ορίζεται να είναι η απεικόνιση*

$$f \oplus g :\ \mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \ \longrightarrow\ \mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}, \quad (f \oplus g)(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + g(\vec{w})$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $f \oplus g$ είναι μια γραμμική απεικόνιση.

Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ και $B \in \mathsf{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ δύο τετραγωνικοί πίνακες, ενδεχομένως διαφορετικού μεγέθους.

Ορισμός 5.7. *Το* **ευθύ άθροισμα** $A \oplus B$ *των* $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *και* $B \in \mathsf{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ *ορίζεται να είναι ο* $(n+m)\times(n+m)$ *πίνακας*

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \boxed{A} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \boxed{B} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 5.8. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και υποθέτουμε ότι $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, για κάποιους υπόχωρους $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ του $\mathcal{E}$. Έστω $f\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ και $g\colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις. Αν $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ είναι μαι βάση του $\mathcal{V}$ και $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ είναι μια βάση του $\mathcal{W}$, τότε όπως γνωρίζουμε το σύνολο $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathcal{V}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$.*

Εύκολα βλέπουμε ότι θέτοντας $B = M^{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}}(f)$ και $C = M^{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}}_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}}(g)$, έχουμε:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f \oplus g) = B \oplus C = \begin{pmatrix} \boxed{B} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \boxed{C} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα 5.9. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και υποθέτουμε ότι $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, για κάποιους υπόχωρους $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ του $\mathcal{E}$. Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση.*

Υποθέτουμε ότι: $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$ και $f(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}$.

Τότε ορίζονται οι περιορισμοί της f στους υπόχωρους $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$:

$$f_{\mathcal{V}} :\ \mathcal{V} \ \longrightarrow\ \mathcal{V}, \quad f_{\mathcal{V}}(\vec{v}) = f(\vec{v})$$

$$f_{\mathcal{W}} :\ \mathcal{W} \ \longrightarrow\ \mathcal{W}, \quad f_{\mathcal{W}}(\vec{w}) = f(\vec{w})$$

Προφανώς θα έχουμε:

$$f = f_{\mathcal{V}} \oplus f_{\mathcal{W}}$$

Θεώρημα 5.10. *Έστω $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{E} < \infty$. Τότε η f μπορεί να γραφεί ώς ευθύ άθροισμα*

$$f = g \oplus h$$

κατάλληλων γραμμικών απεικονίσεων $g \colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ και $h \colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$, όπου $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ είναι υπόχωροι του $\mathcal{E}$, και όπου:

(1) *η γραμμική απεικόνιση $g : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ είναι ισομορφισμός.*
(2) *η γραμμική απεικόνιση $h : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$ είναι μηδενοδύναμη, δηλ. $h^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον φυσικό αριθμό m του Θεωρήματος 5.4, και θέτουμε:

$$\mathcal{V} := \mathsf{Im}(f^m) \qquad \text{και} \qquad \mathcal{W} := \mathsf{Im}(f^m)$$

Τότε από το Θεώρημα 5.4 θα έχουμε:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$$

Από το Λήμμα 5.3 έπεται ότι $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$ και η επαγόμενη γραμμική απεικόνιση $f_{\mathcal{V}} \colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ είναι ισομορφισμός, και $f(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}$ και η επαγόμενη γραμμική απεικόνιση $f_{\mathcal{W}} \colon \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$ είναι μηδενοδύναμη. Θέτοντας $g = f_{\mathcal{V}}$ και $h = f_{\mathcal{W}}$, με χρήση του Παραδείγματος 5.9 θα έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 5.11. *Έστω $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός πίνακας. Τότε ο A είναι όμοιος με έναν πίνακα D ο οποίος ώς ευθύ άθροισμα πινάκων:*

$$D = B \oplus C$$

όπου $B \in \mathsf{M}_{k\times k}(\mathbb{K}),\ \ C \in \mathsf{M}_{r\times r}(\mathbb{K})$, όπου $k + r = n$, και:

(1) *ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος.*
(2) *ο πίνακας C είναι μηδενοδύναμος, δηλ. $C^m = 0$, για κάποιο $m \geq 1$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.10 για την γραμμική απεικόνιση

$$f_A : \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \qquad f_A(X) = A \cdot X$$

Υπάρχουν υπόχωροι $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ του $\mathbb{K}_n$ έτσι ώστε:

$$\mathbb{K}_n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$$

και $f_A(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$ και $f_A(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{W}$. Με χρήση του Παραδείγματος 5.8 και του Θεωρήματος 5.11, αν $\mathcal{B}_1$ είναι μια βάση του $\mathcal{V}$ και $\mathcal{B}_2$ είναι μια βάση του $\mathcal{W}$, τότε θέτοντας $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, θα έχουμε μια βάση του $\mathbb{K}_n$ στην οποία ο πίνακας D της f_A θα είναι το ευθύ άθροισμα $B \oplus C$ πινάκων, όπου B είναι ένας αντιστρέψιμος $k \times k$ πίνακας, ο C είναι ένας μηδενοδύναμος $r \times r$ πίνακας, και $k + r = n$. Επομένως ο πίνακας A είναι όμοιος με τον πίνακα $D = B \oplus C$. □

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης «Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1249.