ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ανοικτάμαθήματα
opencourses

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Ταυτόχρονη Διαγωνοποίηση

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

6. **Ταυτόχρονη Διαγωνοποίηση**

6.1. **Ταυτόχρονη Διαγωνοποίηση Πινάκων.** Έστω $A, B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$.

Ορισμός 6.1. *Οι πίνακες A, B καλούνται* **ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι** *αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:*

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta_1 \qquad \textit{και} \qquad P^{-1} \cdot B \cdot P = \Delta_2$$

όπου οι πίνακες Δ_1 και Δ_2 είναι διαγώνιοι. Δηλαδή αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ο οποίος διαγωνοποιεί ταυτόχρονα τους A, B.

Σκοπός μας στην παρούσα παράγραφο είναι να αποδείξουμε το ακόλουθο κριτήριο ταυτόχρονης διαγωνοποίησης:

Θεώρημα 6.2. *Έστω $A, B \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ δύο $n \times n$ πίνακες με στοιχερία από το σώμα $\mathbb{K}$. Τότε τα ακόλυθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Οι πίνακες A, B είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι.*
2. *Οι πίνακες A, B είναι διαγωνοποιήσιμοι και: $A \cdot B = B \cdot A$.*

Απόδειξη. **1.** $\Longrightarrow$ **2.** Υποθέτουμε ότι οι πίνακες A, B είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι. Τότε οι πίνακες είναι διαγωνοποιήσιμοι και υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτις ώστε:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta_1 \qquad \text{και} \qquad P^{-1} \cdot B \cdot P = \Delta_2$$

όπου οι πίνακες Δ_1 και Δ_2 είναι διαγώνιοι. Τότε θα έχουμε:

$$P^{-1} \cdot (A \cdot B) \cdot P = P^{-1} \cdot A \cdot B \cdot P = P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} \cdot B \cdot P = \Delta_1 \cdot \Delta_2$$

$$P^{-1} \cdot (B \cdot A) \cdot P = P^{-1} \cdot B \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot B \cdot P \cdot P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta_2 \cdot \Delta_1$$

Επειδή προφαβώς διαγώνιοι πίνακες μετατίθενται, θα έχουμε $\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \Delta_2 \cdot \Delta_1$. Τότε

$$P^{-1} \cdot (A \cdot B) \cdot P = P^{-1} \cdot (B \cdot A) \cdot P \implies (A \cdot B) \cdot P = (B \cdot A) \cdot P \implies A \cdot B = B \cdot A$$

2. $\Longrightarrow$ **1.** Για τη απόδειξη αυτής της κατεύθυνσης χρειαζόμαστε κάποια προεργασία. Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί στο Πόρισμα 6.8 στο τέλος της παραγράφου. □

Λήμμα 6.3. *Έστω $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Υποθέτουμε ότι*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \qquad \textit{και} \qquad f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$$

Θεωρούμε την επαγόμενη γραμμική απεικόνιση $f_{\mathcal{V}} = f|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, όπου $f|_{\mathcal{V}}$ είναι ο περιορισμός της f στον υπόχωρο $\mathcal{V}$. Τότε το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_{f_{\mathcal{V}}}(t)$ της $f_{\mathcal{V}}$ διαιρεί το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ της f:

$$Q_{f_{\mathcal{V}}}(t) / Q_f(t)$$

Απόδειξη. Έστω $Q_f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots a_{m-1} t^{m-1} + t^m$ το ελάχιστο πολυώνυμο της f, και θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση

$$Q_f(f_{\mathcal{V}}) = a_0 \mathsf{Id}_{\mathcal{V}} + a_1 f_{\mathcal{V}} + \cdots + a_{m-1}(f_{\mathcal{V}})^{m-1} + (f_{\mathcal{V}})^m : \mathcal{V} \longrightarrow V$$

Τότε, $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}$: $Q_f(f_{\mathcal{V}})(\vec{v}) = a_0(\vec{v}) + a_1 f_{\mathcal{V}}(\vec{v}) + \cdots + a_{m-1}(f_{\mathcal{V}})^{m-1}(\vec{v}) + (f_{\mathcal{V}})^m(\vec{v})$. Επειδή $f_{\mathcal{V}}(\vec{v}) = f(\vec{v})$, $\forall \vec{v} \in \mathcal{V}$, έπεται ότι θα έχουμε: $Q_f(f_{\mathcal{V}})(\vec{v}) = a_0(\vec{v}) + a_1 f(\vec{v}) + \cdots + a_{m-1} f^{m-1}(\vec{v}) + f^m(\vec{v}) = (a_0 \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} + a_1 f + \cdots a_{m-1} f^{m-1} + f^m)(\vec{v}) = Q_f(f)(\vec{v}) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $Q_f(t)$ μηδενίζει την $f_{\mathcal{V}}$. Τότε όμως το $Q_f(t)$ θα διαιρείται από το ελάχιστο πολυώνυμο της $f_{\mathcal{V}}$: $Q_{f_{\mathcal{V}}}(t) / Q_f(t)$. □

Πόρισμα 6.4. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Υποθέτουμε ότι*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \qquad \textit{και} \qquad f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$$

Θεωρούμε την επαγόμενη γραμμική απεικόνιση $f_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$, όπου $f_{\mathcal{V}} = f|_{\mathcal{V}}$ είναι ο περιορισμός της f στον υπόχωρο $\mathcal{V}$. Τότε:

$$f \;\; \textit{είναι διαγωνοποιήσιμη} \quad \Longrightarrow \quad f_{\mathcal{V}} \;\; \textit{είναι διαγωνοποιήσιμη}$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 6.3, έχουμε $Q_{f_{\mathcal{V}}}(t) / Q_f(t)$. Επειδή η f είναι διαγωνοπιήσιμη, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ της f αναλύεται σε γινόμενο διακεκριμμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο της $f_{\mathcal{V}}$ είναι διαιρέτης του $Q_f(t)$, έπεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_{f_{\mathcal{V}}}(t)$ της $f_{\mathcal{V}}$ αναλύεται σε γινόμενο διακεκριμμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων. Επομένως η $f_{\mathcal{V}}$ είναι διαγωνοποιήσιμη. □

Πόρισμα 6.5. *Έστω $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια γραμμική απεικόνιση, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Υποθέτουμε ότι*

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_k \qquad \textit{και} \qquad f(\mathcal{V}_i) \subseteq \mathcal{V}_i, \;\; 1 \leq i \leq k$$

Θεωρούμε τις επαγόμενες γραμμικές απεικόνισεις $f_{\mathcal{V}_i}\colon \mathcal{V}_i \longrightarrow \mathcal{V}_i$, όπου $f_{\mathcal{V}_i} = f|_{\mathcal{V}_i}$ είναι ο περιορισμός της f στον υπόχωρο $\mathcal{V}_i$. Τότε:

$$f \;\; \textit{είναι διαγωνοποιήσιμη} \quad \Longleftrightarrow \quad f_{\mathcal{V}_i} \;\; \textit{είναι διαγωνοποιήσιμη}, \quad 1 \leq i \leq k$$

Απόδειξη. “$\Longrightarrow$” Έπεται άμεσα από το Πόρισμα 6.4.

“$\Longleftarrow$” Έστω $\mathcal{B}_i$ μια βάση του $\mathcal{V}_i$, $1 \leq i \leq k$, η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f_i. Από το ορισμό των απεικονίσεων f_i, έπεται προφανώς ότι τα διανύσματα κάθε βάσης $\mathcal{B}_i$ είναι και ιδιοδιανύσματα της f. Επειδή το άθροισμα $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_k$ είναι ευθύ και μας δίνει τον χώρο $\mathcal{E}$, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$$

είναι μια βάση του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f. Άρα η f είναι διαγωνοποιήσιμη. □

Θεώρημα 6.6. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις. Υποθέτουμε ότι οι f, g είναι διαγωνοποιήσιμες και $f \circ g = g \circ f$. Τότε υπάρχει βάση $\mathcal{C}$ του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f και της g.*

Απόδειξη. Επειδή η g είναι διαγωνοποιήσιμη, όπως γνωρίζουμε θα έχουμε:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_g(\lambda_1) \oplus \mathcal{V}_g(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_g(\lambda_k)$$

όπου $\lambda_1, \cdots \lambda_k$ είναι οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές της g και $\mathcal{V}_g(\lambda_i)$ είναι οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι:

$$\mathcal{V}_g(\lambda_i) = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid g(\vec{x}) = \lambda_i \vec{x}\}, \qquad 1 \leq i \leq k$$

Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}_g(\lambda_i)$. Τότε $g(\vec{x}) = \lambda_i \vec{x}$ και επομένως, $\forall i = 1, 2, \cdots, k$:

$$f(g(\vec{x})) = f(\lambda_i \vec{x}) \implies (f \circ g)(\vec{x}) = \lambda_i f(\vec{x}) \implies (g \circ f)(\vec{x}) = \lambda_i f(\vec{x}) \implies g(f(\vec{x})) = \lambda_i f(\vec{x})$$

Επομένως το διάνυσμα $f(\vec{x}) \in \mathcal{V}_g(\lambda_i)$, και άρα: $f(\mathcal{V}_g(\lambda_i) \subseteq \mathcal{V}_g(\lambda_i)$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να περιορίσουμε την f σε μια γραμμική απεικόνιση

$$f_i := f|_{\mathcal{V}_g(\lambda_i)} : \; \mathcal{V}_g(\lambda_i) \longrightarrow \mathcal{V}_g(\lambda_i), \quad f_i(\vec{x}) = f(\vec{x})$$

Επειδή η f είναι διαγωνοποιήσιμη, από το Πόρισμα 6.5 έπεται ότι η απεικόνιση f_i είναι διαγωνοποιήσιμη, για κάθε $i = 1, 2, \cdots, k$. Έστω $\mathcal{B}_i$ μια βάση του $\mathcal{V}_g(\lambda_i)$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f_i. Από το ορισμό των απεικονίσεων f_i, έπεται προφανώς ότι τα διανύσματα κάθε βάσης $\mathcal{B}_i$ είναι και ιδιοδιανύσματα της f. Επειδή το άθροισμα $\mathcal{V}_g(\lambda_1) + \mathcal{V}_g(\lambda_2) + \cdots + \mathcal{V}_g(\lambda_k)$ είναι ευθύ και μας δίνει τον χώρο $\mathcal{E}$, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{C} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$$

είναι μια βάση του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f. Επειδή $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{V}_g(\lambda_i)$ έπεται ότι τα διανύσματα κάθε βάσης $\mathcal{B}_i$ είναι και ιδιοδιανύσματα της g. Καταλήγουμε ότι η βάση $\mathcal{C}$ του $\mathcal{E}$ αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f και της g. $\square$

6.2. **Ταυτόχρονη διαγωνοποίηση Γραμμικών Απεικονίσεων.**

Ορισμός 6.7. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις. Τότε οι f, g καλούνται* **ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμες**, *αν υπάρχει βάση $\mathcal{C}$ του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f και της g.*

Θεώρημα 6.8. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f, g\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ δύο γραμμικές απεικονίσεις. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Οι f, g είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμες.*
(2) *Οι f, g είναι διαγωνοποιήσιμες και $f \circ g = g \circ f$.*

Απόδειξη. (2) $\Longrightarrow$ (1) Η κατεύθυνση αυτή αποδείχθηκε στο Θεώρημα 6.6.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Έστω ότι οι f, g είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμες, δηλαδή υπάρχει βάση

$$\mathcal{C} = \left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n\right\}$$

του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f και της g, τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ της f και στις ιδιοτιμές $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ της f Τότε:

$$(f \circ g)(\vec{e}_i) = f(g(\vec{e}_i)) = f(\mu_i \vec{e}_i) = \mu_i f(\vec{e}_i) = \mu_i \lambda_i \vec{e}_i$$
$$(g \circ f)(\vec{e}_i) = g(f(\vec{e}_i)) = g(\lambda_i \vec{e}_i) = \lambda_i g(\vec{e}_i) = \lambda_i \mu_i \vec{e}_i$$

Επομένως $(f \circ g)(\vec{e}_i) = (g \circ f)(\vec{e}_i)$, για κάθε διάνυσμα $\vec{e}_i$ της βάσης $\mathcal{C}$. Τότε όμως $f \circ g = g \circ f$. $\square$

Το ακόλουθο Πόρισμα ολοκληρώνει την απόδειξη της κατεύθυνσης **2.** $\Longrightarrow$ **1.** του Θεωρήματος 6.2.

Πόρισμα 6.9. *Έστω A και B δύο διαγωνοποιήσιμοι $n \times n$ πίνακες υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Αν $A \cdot B = B \cdot A$, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:*

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta_1 \qquad \textit{και} \qquad P^{-1} \cdot B \cdot P = \Delta_2$$

όπου οι πίνακες Δ_1 και Δ_2 είναι διαγώνιοι.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις

$$f_A,\ f_B : \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \qquad f_A(X) = A \cdot X \quad \text{και} \quad f_B(X) = B \cdot X$$

Επειδή οι πίνακες A και B είναι διαγωνοποιήσιμοι, έπεται ότι και οι γραμμικές απεικονλίσεις f_A και f_B είναι διαγωνοποιήσιμες. Επειδή $A \cdot B = B \cdot A$, έπεται άμεσα ότι $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A$. Τότε από το Θεώρημα 6.5 έπεται ότι υπάρχει βάση $\mathcal{C}$ του $\mathbb{K}_n$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα της f_A και της f_B. Άρα ο πίνακας της f_A στην $\mathcal{C}$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας Δ_1 και ο πίνακας της f_B στην $\mathcal{C}$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας Δ_2. Τότε όμως υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε οι πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P = \Delta_1$ και $P^{-1} \cdot B \cdot P = \Delta_2$. $\square$

Τα παραπάνω γενικεύονται και για παραπάνω από δύο πίνακες.

Ορισμός 6.10. *Έστω $A_1, A_2, \cdots, A_r$ $n \times n$ πίνακες υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Οι πίνακες $A_1, A_2, \cdots, A_r$ καλούνται* **ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι** *αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:*

$$P^{-1} \cdot A_i \cdot P = \Delta_i \qquad 1 \leq i \leq r$$

όπου οι πίνακες Δ_i διαγώνιοι. Δηλαδή αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P ο οποίος διαγωνοποιεί ταυτόχρονα τους $A_1, A_2, \cdots, A_r$.

Ορισμός 6.11. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και $f_1, f_2, \cdots, f_r : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ γραμμικές απεικονίσεις. Οι $f_1, f_2, \cdots, f_r$ καλούνται* **ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμες** *αν υπάρχει βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$ η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα των $f_1, f_2, \cdots, f_r$.*

Με βάση τα Θεωρήματα 6.2 και 6.8 και με χρήση επαγωγής αποδεικνύεται εύκολα και το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 6.12. (1) *Έστω $A_1, A_2, \cdots, A_r$ $n \times n$ πίνακες υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α΄) *Οι πίνακες $A_1, A_2, \cdots, A_r$ είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι.*

(β΄) *Οι πίνακες $A_1, A_2, \cdots, A_r$ είναι διαγωνοποιήσιμοι και $A_i \cdot A_j = A_j \cdot A_i$, $1 \leq i \neq j \leq r$.*

(2) *Έστω $f_1, f_2, \cdots, f_r : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ γραμμικές απεικονίσεις, όπου $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} < \infty$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α΄) *Οι $f_1, f_2, \cdots, f_r$ είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμες.*

(β΄) *Οι $f_1, f_2, \cdots, f_r$ είναι διαγωνοποιήσιμες και $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$, $1 \leq i \neq j \leq r$.*

Άσκηση 6.13. 1. *Να ορισθούν οι έννοιες "ταυτόχρονα τριγωνοποιήσιμοι πίνακες" και "ταυτόχρονα τριγωνοποιήσιμες γραμμικές απεικονίσεις"*

2. *Να εξετασθεί αν το Θεώρημα 6.12 ισχύει αν στην διατύπωσή του έχουμε παντού τριγωνοποιήσιμους πίνακες ή τριγωνοποιήσιμες γραμμικές απεικονίσεις αντί διαγωνοποιήσιμους πίνακες ή διαγωνοποιήσιμες γραμμικές απεικονίσεις.*

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης «Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1249.

Σημείωμα Αδειοδότησης