ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Η Κανονική Μορφή Jordan - Ι

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης

Τμήμα: Μαθηματικών

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

7. **Η Κανονική Μορφή Jordan - I**

Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε μια σημαντική κανονική μορφή πινάκων οι οποίοι έχουν την ιδιότητα ότι το χαρακτηριστικό τους πολυώνυμο αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβαθμίων, όχι κατ' ανάγκη διακεκριμμένων, παραγόντων.

Έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα.

Ορισμός 7.1. *Έστω $n \geq 1$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας*

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

καλείται ο **στοιχειώδης** *$n \times n$* **πίνακας Jordan** *ο οποίος αντιστοιχεί στο λ.*

Ένας πίνακας $n \times n$ πινακας J καλείται **πίνακας Jordan** *αν είναι το ευθύ άθροισμα στοιχειωδών πινάκων Jordan:*

$$J = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k)$$

όπου $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq k$, και $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Στην παρούσα παράγραφο θα αποδείξουμε ότι κάθε $n \times n$ πίνακας A με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$, ο οποίος έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο $\mathbb{K}$ είναι όμοιος με έναν πίνακα Jordan.

7.1. **Μηδενοδύναμες Γραμμικές Απεικονίσεις.** Στην παρούσα παράγραφο συμβολίζουμε με $\mathbb{K}$ ένα σώμα.

Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και

$$f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

μια γραμμική απεικόνιση.

Θεώρημα 7.2. *Υποθέτουμε ότι η f είναι μηδενοδύναμη: $f^m = 0$. Τότε υπάρχουν διανύσματα*

$$\vec{z}_1,\ \vec{z}_2,\ \cdots,\ \vec{z}_k\ \in\ \mathcal{E}$$

και φυσικοί αριθμοί

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \cdots,\ \rho_k\ \geq\ 1$$

έτσι ώστε: $f^{\rho_1}(\vec{z}_1) = f^{\rho_2}(\vec{z}_2) = \cdots = f^{\rho_k}(\vec{z}_k) = \vec{0}$, δηλαδή:

$$f^{\rho_i}(\vec{z}_i) = \vec{0}, \qquad 1 \leq i \leq k$$

και το σύνολο

$$\mathcal{B} = \big\{\vec{z}_1, f(\vec{z}_1), \cdots, f^{\rho_1 - 1}(\vec{z}_1),\ \ \vec{z}_2, f(\vec{z}_2), \cdots, f^{\rho_2 - 1}(\vec{z}_2),\ \ \cdots,\ \ \vec{z}_k, f(\vec{z}_k), \cdots, f^{\rho_k - 1}(\vec{z}_k)\big\}$$

να είναι βάση του $\mathcal{E}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στην διάσταση $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} := n$.

Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = 0$, τότε $\mathcal{E} = \{\vec{0}\}$ και $f = 0$. Το συμπέρασμα τότε ισχύει τετριμμένα.

1. Υποθέτουμε ότι $\boxed{n = 1}$. Θεωρούμε μιά βάση $\{\vec{e}\}$ του $\mathcal{E}$, και τότε $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$, θα έχουμε $\vec{x} = k\vec{e}$ και άρα: $f(\vec{x}) = f(k\vec{e}) = kf(\vec{e})$. Έτσι θέτοντας $f(\vec{e}) = \vec{\varepsilon} \in \mathbb{K}$, έπεται ότι $\vec{\varepsilon} = \lambda\vec{e}$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{K}$, και άρα θα έχουμε: $f(\vec{x}) = k\vec{\varepsilon} = k\lambda\vec{e} = \lambda\vec{x}$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{E}$. Επειδή $f^m = 0$, έπεται ότι: $f^m(\vec{x}) = \lambda^m\vec{x} = \vec{0}$. Ιδιαίτερα $f^m(\vec{e}) = \lambda^m\vec{e} = \vec{0}$ και άρα $\lambda^m = 0$ διότι $\vec{e} \neq \vec{0}$. Επομένως $\lambda = 0$ και άρα $f = 0$. Τότε θέτοντας $k = 1$, $\rho_1 = 1$, και $\vec{z}_1 = \vec{e}$, έπεται ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{e}\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$ με την επιθυμιτή ιδιότητα.

2. Επαγωγική Υπόθεση: Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει για όλους τους $\mathbb{K}$-διανυσματικούς χώρους $\mathcal{F}$ με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} < n$ και κάθε μηδενοδύναμη γραμμική απεικόνιση $g : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$.

3. Γενική Περίπτωση: Υποθέτουμε, όπως στην εκφώνηση του Θεωρήματος, ότι $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n \geq 1$ και η $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι μηδενοδύναμη: $f^m = 0$, για κάποιον φυσικό $m \geq 1$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι $f \neq 0$, διότι αν $f = 0$, τότε το συμπέρασμα ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.

Θέτουμε $\mathcal{F} := \mathsf{Im}(f) = f(\mathcal{E})$.

<u>Ισχυρισμός 1:</u> $0 < \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} < n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$.

Πραγματικά: Αν $0 = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F}$, τότε $\mathcal{F} = f(\mathcal{E}) = \{\vec{0}\}$, δηλαδή: $f(\vec{x}) = \vec{0}$, και άρα $f = 0$ και το συμπέρασμα ισχύει.

Αν $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{F} < n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$, τότε προφανώς θα έχουμε $\mathcal{F} = \mathsf{Im}(f) = \mathcal{E}$ και επομένως επειδή $f^m = 0$, θα καταλήξουμε στο άτοπο:

$$f^2(\mathcal{E}) = f(f(\mathcal{E})) = f(\mathcal{E}) = \mathcal{E}, \quad \cdots, \quad \{\vec{0}\} = f^m(\mathcal{E}) = f^{m-1}(f(\mathcal{E})) = f^{m-1}(\mathcal{E}) = \cdots = f(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$$

Συμφωνα με τον παραπάνω Ισχυρισμό 1, θα έχουμε $\{\vec{0}\} \neq \mathcal{F} \neq \mathcal{E}$.

Από την άλλη πλευρά είναι προφανές ότι η μηδενοδύναμη γραμμική απεικόνιση $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ επάγει μια γραμμική απεικόνιση

$$g : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}, \qquad g = f|_{\mathcal{F}}, \qquad \text{δηλαδή} \qquad g(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{F}$$

Προφανώς η g είναι μηδενοδύναμη, διότι η f είναι μηδενοδύναμη, και άρα από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχουν διανύσματα

$$\vec{w}_1,\ \vec{w}_2,\ \cdots,\ \vec{w}_l \ \in \ \mathcal{F}$$

και φυσικοί αριθμοί

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_l \ \geq \ 1$$

έτσι ώστε: $g^{\sigma_1}(\vec{w}_1) = g^{\sigma_2}(\vec{w}_2) = \cdots = g^{\sigma_l}(\vec{w}_l) = \vec{0}$, δηλαδή:

$$g^{\sigma_i}(\vec{w}_i) = \vec{0}, \qquad 1 \leq i \leq l$$

και το σύνολο

$$\mathcal{C} = \left\{\vec{w}_1, g(\vec{w}_1), \cdots, g^{\sigma_1-1}(\vec{w}_1),\ \ \vec{w}_2, g(\vec{w}_2), \cdots, g^{\sigma_2-1}(\vec{w}_2),\ \ \cdots,\ \ \vec{w}_l, g(\vec{w}_l), \cdots, g^{\sigma_l-1}(\vec{w}_l)\right\}$$

να είναι βάση του $\mathcal{F}$.

Επειδή $f(\mathcal{E}) = \mathcal{F} \neq \mathcal{E}$, έπεται ότι για τα διανύσματα $\vec{w}_i \in \mathcal{F}$, $1 \leq i \leq l$, υπάρχουν διανύσματα $\vec{z}_i \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε:

$$f(\vec{z}_i) = \vec{w}_i, \qquad 1 \leq i \leq l$$

Παρατηρούμε ότι επειδή

$$g^{\sigma_i}(\vec{w}_i) = f^{\sigma_i}(\vec{w}_i) = \vec{0}, \qquad 1 \leq i \leq l$$

έπεται ότι τα διανύσματα

$$f^{\sigma_i-1}(\vec{w}_i) \ \in \ \mathsf{Ker}(f), \qquad 1 \leq i \leq l$$

<u>Ισχυρισμός 2:</u> Το σύνολο

$$\{f^{\sigma_1-1}(\vec{w}_1),\ \cdots,\ f^{\sigma_l-1}(\vec{w}_l)\} \qquad \text{είναι γραμμικά ανεξάρτητο}$$

Πραγματικά: αυτό προκύπτει διότι τα παραπάνω διανύσματα είναι στοιχεία της βάσης $\mathcal{C}$.

Συμπληρώνουμε το σύνολο $\{f^{\sigma_1-1}(\vec{w}_1),\ \cdots,\ f^{\sigma_l-1}(\vec{w}_l)\}$ σε μια βάση του $\mathsf{Ker}(f)$:

$$\mathcal{D} = \left\{f^{\sigma_1-1}(\vec{w}_1),\ \cdots,\ f^{\sigma_l-1}(\vec{w}_l),\ \ \vec{y}_1,\ \vec{y}_2,\ \cdots,\ \vec{y}_t\right\}$$

Επομένως

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\,\mathsf{Ker}(f) = l + t$$

Από την άλλη πλευρά θα έχουμε

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{F} = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\,\mathsf{Im}(f) = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots \sigma_l$$

διότι το σύνολο $\mathcal{D}$ είναι βάση του $\mathcal{F}$ και $|\mathcal{D}| = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots \sigma_l$.

Από την Θεμελιώδη εξίσωση διαστάσεων για την γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ θα έχουμε

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{E} = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\,\mathsf{Ker}(f) + \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\,\mathsf{Im}(f) = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots \sigma_l + l + t$$

<u>Ισχυρισμός 3:</u> Το σύνολο

$$\mathcal{B} = \left\{\vec{z}_1, f(\vec{z}_1), \cdots, f^{\sigma_1}(\vec{z}_1),\ \ \vec{z}_2, f(\vec{z}_2), \cdots, f^{\sigma_2}(\vec{z}_2),\ \ \cdots,\ \ \vec{z}_l, f(\vec{z}_l), \cdots, f^{\sigma_l}(\vec{z}_l),\ \ y_1,\, y_2,\, \cdots,\, y_t\right\}$$

είναι μια βάση του $\mathcal{E}$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 3: Πρώτα παρατηρούμε ότι:

$$|\mathcal{B}| = (\sigma_1 + 1) + (\sigma_2 + 1) + \cdots (\sigma_l + 1) + t = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots \sigma_l + l + t = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\mathcal{E}$$

Άρα για να είναι το σύνολο $\mathcal{B}$ βάση του $\mathcal{E}$, αρκεί να είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Υποθέτουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \lambda_0\vec{z}_1 + \lambda_1 f(\vec{z}_1) + \cdots + \lambda_{\sigma_1} f^{\sigma_1}(\vec{z}_1) \\
&= \mu_0\vec{z}_2 + \mu_1 f(\vec{z}_2) + \cdots + \mu_{\sigma_2} f^{\sigma_2}(\vec{z}_2) \\
&\vdots \\
&= \nu_0\vec{z}_l + \nu_1 f(\vec{z}_l) + \cdots + \nu_{\sigma_l} f^{\sigma_l}(\vec{z}_l) \\
&= \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \cdots \xi_t y_t
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την f στην παραπάνω σχέση και χρησιμοποιώντας ότι $y_i \in \mathsf{Ker}(f)$, $1 \le i \le t$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \lambda_0 f(\vec{z}_1) + \lambda_1 f^2(\vec{z}_1) + \cdots + \lambda_{\sigma_1} f^{\sigma_1+1}(\vec{z}_1) \\
&= \mu_0 f(\vec{z}_2) + \mu_1 f^2(\vec{z}_2) + \cdots + \mu_{\sigma_2} f^{\sigma_2+1}(\vec{z}_2) \\
&\vdots \\
&= \nu_0 f(\vec{z}_l) + \nu_1 f^2(\vec{z}_l) + \cdots + \nu_{\sigma_l} f^{\sigma_l+1}(\vec{z}_l)
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Όμως

$$f(\vec{z}_i) = \vec{w}_i, \qquad 1 \le i \le l$$

και επομένως η τελευταία σχέση γράφεται:

$$
\begin{aligned}
\vec{0} &= \lambda_0 \vec{w}_1 + \lambda_1 f(\vec{w}_1) + \cdots + \lambda_{\sigma_1} f^{\sigma_1}(\vec{w}_1) \\
&= \mu_0 \vec{w}_2 + \mu_1 f(\vec{w}_2) + \cdots + \mu_{\sigma_2} f^{\sigma_2}(\vec{w}_2) \\
&\vdots \\
&= \nu_0 \vec{w}_l + \nu_1 f(\vec{w}_l) + \cdots + \nu_{\sigma_l} f^{\sigma_l}(\vec{w}_l)
\end{aligned} \tag{7.2}
$$

Επειδή τα διανύσματα $\vec{w}_i$ ανήκουν στον υπόχωρο $\mathcal{F} = \mathsf{Im}(f)$ και $g(\vec{x}) = f(\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in \mathcal{F}$, η τελευταία σχέση είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{C}$ του $\mathcal{F}$. Επομένως θα έχουμε:

$$\lambda_0 = \cdots = \lambda_{\sigma_1} = \ \cdots \ = \mu_0 = \cdots = \mu_{\sigma_2} = \ \cdots \ = \nu_0 = \cdots = \nu_{\sigma_l}$$

και άρα το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Καταλήγουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι μια βάση του $\mathcal{E}$.

Η βάση $\mathcal{B}$ έχει την επιθυμιτή ιδιότητα της εκφώνησης, θέτοντας:

$$k = l + t, \quad \rho_1 = \sigma_1 + 1, \cdots, \rho_l = \sigma_l + 1,\ \rho_{l+1} = 1, \cdots, \rho_k = 1$$

και

$$\vec{z}_{l+1} = \vec{y}_1,\ \cdots,\ \vec{z}_k = \vec{y}_k$$

□

Θεώρημα 7.3. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διαννσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και $f \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ μια μηδενοδύναμη γραμμική απεικόνιση. Τότε υπάρχει μια βάση του $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$ στην οποία ο πίνακας της f είναι ένας πίνακας Jordan της μορφής:*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = J_{\rho_1}(0) \oplus J_{\rho_2}(0) \oplus \cdots \oplus J_{\rho_k}(0)$$

όπου $\rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_k = n$ και:

$$J_{n_i}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.2 υπάρχει βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$ της μορφής

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$$

όπου

$$\mathcal{B}_i = \left\{ f^{\rho_i - 1}(\vec{z}_i),\ f^{\rho_i - 2}(\vec{z}_i),\ \cdots,\ f(\vec{z}_i),\ \vec{z}_i \right\}, \qquad 1 \ \le \ i \ \le k$$

και

$$f^{\rho_i}(\vec{z}_i) = \vec{0}, \qquad 1 \ \le \ i \ \le k$$

Είναι προφανές από τις παραπάνω σχέσεις ότι ο πίνακας της f στην παραπάνω βάση $\mathcal{B}$ είναι ο ζητούμενος.

Αναλυτικότερα: θέτουμε $\mathcal{V}_i$ να είναι ο υπόχωρος του $\mathcal{E}$ ο οποίος παράγεται από το σύνολο $\mathcal{V}_i$:

$$\mathcal{V}_i = \langle \mathcal{B}_i \rangle = \left\langle f^{\rho_i - 1}(\vec{z}_i),\ f^{\rho_i - 2}(\vec{z}_i),\ \cdots,\ f(\vec{z}_i),\ \vec{z}_i \right\rangle, \quad 1 \ \le \ i \ \le k$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}_i$ είναι βάση του $\mathcal{V}_i$ και επιπλέον $f(\mathcal{V}_i) \subseteq \mathcal{V}_i$. Επομένως η $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ επάγει για κάθε $i = 1, 2, \cdots, k$, γραμμικές απεικονίσεις

$$f_i := f|_{\mathcal{V}_i} : \mathcal{V}_i \longrightarrow \mathcal{V}_i, \quad f_i(\vec{x}) = f(\vec{x}), \quad \forall\, \vec{x} \in \mathcal{V}_i$$

Επειδή $f^{\rho_i}(\vec{z}_i) = f_i^{\rho_i}(\vec{z}_i) = \vec{0}$, έπεται ότι ο πίνακας της f_i στην βάση $\mathcal{B}_i$ είναι ο στοιχειώδης πίνακας Jordan $J_{\rho_i}(0)$:

$$M_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}(f_i) = J_{\rho_i}(0)$$

Επειδή το σύνολο $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ είναι βάση του $\mathcal{E}$, έπεται ότι το άθροισμα υπόχωρων $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \cdots + \mathcal{V}_k$ είναι ευθύ και μας δίνει τον $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_k$$

και η γαρμμική απεικόνιση f είναι το ευθύ άθροισμα των f_i:

$$f = f_1 \oplus f_2 \oplus \cdots \oplus f_k$$

Τότε όμως ο πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ της f στην βάση $\mathcal{B}$ είναι το ευθύ άθροισμα των πινάκων $M_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}(f_i) = J_{\rho_i}(0)$ της f_i στην βάση $\mathcal{B}_i$ του $\mathcal{V}_i$:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = J_{\rho_1}(0) \oplus J_{\rho_2}(0) \oplus \cdots \oplus J_{\rho_k}(0) \qquad \square$$

7.2. **Μηδενοδύναμοι Πίνακες.** Μια άμεση συνέπεια του Πορίσματος 7.3 είναι το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 7.4. *Κάθε μηδενοδύναμος $n \times n$ πίνακας A είναι όμοιος με έναν πίνακα Jordan της μορφής*

$$J = J_{\rho_1}(0) \oplus J_{\rho_2}(0) \oplus \cdots \oplus J_{\rho_k}(0), \qquad \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_k = n$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το Πόρισμα 7.3 αν το τελευταίο εφαρμοσθεί στην γραμμική απεικόνιση

$$f_A : \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

η οποία είναι προφανώς μηδενοδύναμη. $\square$

7.3. **Βάσεις Jordan.** Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ και υποθέτουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές της ανήκουν στο $\mathbb{K}$. Επομένως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f γράφεται ως εξής:

$$P_f(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{k_1} \cdot (t - \lambda_2)^{k_2} \cdot \quad \cdots \quad (t - \lambda_r)^{k_r}$$

όπου $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ είναι οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές της f με αντίστοιχες πολλαπλότητες $k_1, \cdots, k_r$, όπου: $k_1 + \cdots + k_r = n = \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, \mathcal{E}$.

Θεώρημα 7.5. *Υπάρχει μια βάση $\mathcal{J}$ του $\mathcal{E}$ στην οποία ο πίνακας της f είναι ένας πίνακας Jordan της μορφής:*

$$M_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}(f) = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{n_r}(\lambda_r) \qquad \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$$

όπου $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ είναι οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές της f, και κάθε πίνακας Jordan $J_{n_i}(\lambda_i)$ είναι ευθύ άθροισμα στοιχειωδών πινάκων Jordan κατάλληλων μεγεθών ως προς την ιδιοτιμή λ_i:

$$J_{n_i}(\lambda_i) = J_{n_{i_1}}(\lambda_i) \oplus \cdots \oplus J_{n_{i_k}}(\lambda_i), \qquad n_i = n_{i_1} + \cdots n_{i_k}, \qquad 1 \leq i \leq r$$

Η βάση $\mathcal{J}$ καλείται **βάση Jordan** *του $\mathcal{E}$ για την f.*

Απόδειξη. Επειδή η f έχει όλες τις ιδιοτιμές της στο $\mathbb{K}$, έπεται ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της αναλύεται όπως παραπάνω σε γινόμενο (δυνάμεων) πρωτοβαθμίων παταγόντων:

$$P_f(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{k_1} \cdot (t-\lambda_2)^{k_2} \cdot \ \cdots \ (t-\lambda_r)^{k_r}$$

Θέτουμε:

$$\mathcal{N}_i := \big\{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid (f - \lambda_i \mathrm{Id}_{\mathcal{E}})^{k_i}(\vec{x}) = \vec{0}\big\}, \qquad 1 \ \le \ i \ \le \ r$$

Αν $\vec{x} \in \mathcal{N}_i$, δηλαδή $(f-\lambda_i\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})^{k_i}(\vec{x}) = \vec{0}$, έστω $(f-\lambda_i\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})(\vec{x}) = \vec{y}$. Τότε $(f-\lambda_i\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})^{k_i}(\vec{y}) = (f-\lambda_i\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})^{k_i+1}(\vec{x}) = (f-\lambda_i\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})((f-\lambda_i\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})^{k_i}(\vec{x})) = \vec{0}$. Επομένως $\vec{y} \in \mathcal{N}_i$ και επομένως η γραμμική απεικόνιση $f - \lambda_i\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ επάγει μια γραμμική απεικόνιση

$$f_i := f - \lambda_i\mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \ : \ \mathcal{N}_i \ \longrightarrow \ \mathcal{N}_i, \quad f_i(\vec{x}) = (f-\lambda_i\mathrm{Id}_{\mathcal{E}})(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \lambda_i\vec{x}$$

<u>Ισχυρισμός:</u> Η γραμμική απεικόνιση $f_i \ : \ \mathcal{N}_i \ \longrightarrow \ \mathcal{N}_i$ είναι μηδενοδύναμη και:

$$\mathcal{E} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}_r$$

Πράγματικά: το ότι η f_i είναι μηδενοδύναμη προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του υπόχωρου $\mathcal{N}_i$. Το ότι ο $\mathcal{E}$ είναι το ευθύ άθροισμα των υπόχωρων $\mathcal{N}_i$ προκύπτει ακριβώς όπως στην Πρόταση 4.2, βλέπε και Παρατήρηση 4.3, διότι επειδή οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ είναι διακεκριμμένες, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των πολυωνύμων $(t-\lambda_1)^{k_1}, \cdots, (t-\lambda_r)^{k_r}$ είναι το σταθερό πολυώνυμο 1.

Επειδή η γραμμική επεικόνιση $f_i \colon \mathcal{N}_i \longrightarrow \mathcal{N}_i$ είναι μηδενοδύναμη, από το Θεώρημα 7.3 έπεται ότι υπάρχει βάση $\mathcal{B}_i$ του $\mathcal{N}_i$ στην οποία ο πίνακας της f_i είναι ένας πίνακας Jordan της μορφής

$$M^{\mathcal{B}_i}_{\mathcal{B}_i}(f_i) = M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1}(f_i + \lambda_i\mathrm{Id}_{\mathcal{N}_i}) := J_i = J_{\rho_{i1}}(0) \oplus J_{\rho_{i2}}(0) \oplus \cdots \oplus J_{\rho_{ik}}(0)$$

όπου $\rho_{i1} + \rho_{i2} + \cdots + \rho_{ik} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{N}_i := n_1$ και:

$$J_{ij}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 1 \le j \le k$$

Επειδή $\mathcal{E} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{N}_r$, έπεται ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$$

θα είναι μια βάση του $\mathcal{E}$.

Επειδή $f_i = f - \lambda_i\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, έπεται ότι ο περιορισμός $f|_{\mathcal{N}_i}$ της f στον υπόχωρο $\mathcal{N}_i$ θα είναι της μορφής $f|_{\mathcal{N}_i} = f_i + \lambda_i\mathrm{Id}_{\mathcal{N}_i}$.

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας της $f_i + \lambda_i\mathrm{Id}_{\mathcal{N}_i}$ στην βάση $\mathcal{B}_i$ του $\mathcal{N}_i$ είναι της μορφής

$$M^{\mathcal{B}_i}_{\mathcal{B}_i}(f_i + \lambda_i\mathrm{Id}_{\mathcal{N}_i}) := J_i(\lambda_i) = J_{\rho_{i1}}(\lambda_i) \oplus J_{\rho_{i2}}(\lambda_i) \oplus \cdots \oplus J_{\rho_{ik}}(\lambda_i)$$

όπου $\rho_{i1} + \rho_{i2} + \cdots + \rho_{ik} = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{N}_i = n_i$ και:

$$J_{ij}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}, \qquad 1 \le j \le k$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα παραπάνω, θα έχουμε ότι η f είναι το ευθύ άθροισμα

$$f = f|_{\mathcal{N}_1} \oplus f|_{\mathcal{N}_2} \oplus \cdots \oplus f|_{\mathcal{N}_r} = (f_1 + \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathcal{N}_1}) \oplus (f_2 + \lambda_2 \mathrm{Id}_{\mathcal{N}_2}) \oplus \cdots \oplus (f_r + \lambda_r \mathrm{Id}_{\mathcal{N}_r})$$

και άρα ο πίνακας της f στην βάση $\mathcal{B}$ θα είναι της μορφής:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(f_1 + \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathcal{N}_1}) \oplus M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(f_2 + \lambda_2 \mathrm{Id}_{\mathcal{N}_2}) \oplus \cdots \oplus M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(f_r + \lambda_r \mathrm{Id}_{\mathcal{N}_r})$$

δηλαδή

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{n_r}(\lambda_r)$$

ο οποίος είναι ένας πίνακας Jordan. Αυτό σημαίνει ότι η βάση $\mathcal{B}$ του $\mathcal{E}$ είναι η επιθυμιτή βάση Jordan $\mathcal{J}$ του $\mathcal{E}$ για την f. □

7.4. **Η Κανονική Μορφή Jordan ενός πίνακα.** Μια άμεση συνέπεια του Πορίσματος 7.5 είναι το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 7.6. *Κάθε $n \times n$ πίνακας $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ο οποίος έχει όλες τις διακεκριμμένες ιδιοτιμές του $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ στο $\mathbb{K}$ είναι όμοιος με έναν πίνακα Jordan της μορφής*

$$J = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k), \qquad n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

όπου κάθε πίνακας Jordan $J_{n_i}(\lambda_i)$, $1 \leq i \leq k$, είναι ευθύ άθροισμα στοιχειωδών πινάκων Jordan κατάλληλων μεγεθών που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i:

$$J_{n_i}(\lambda_i) = J_{n_{i_1}}(\lambda_i) \oplus \cdots \oplus J_{n_{i_r}}(\lambda_i), \qquad n_i = n_{i_1} + \cdots n_{i_r}$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το Πόρισμα 7.3 αν το τελευταίο εφαρμοσθεί στην γραμμική απεικόνιση

$$f_A : \mathbb{K}_n \longrightarrow \mathbb{K}_n, \quad f_A(X) = A \cdot X$$

η οποία είναι προφανώς έχει όλες τις ιδιοτιμές της (= ιδιοτιμές του A) στο σώμα $\mathbb{K}$. □

7.5. **Αλγόριθμος Εύρεσης Κανονικής Μορφής Jordan.**

- Έστω $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$-πίνακας με στοιχεία απο το σώμα $\mathbb{K}$.

- Υποθέτουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του A ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$.

Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = J$$

να είναι η κανονική μορφή Jordan J του A.

- Περιγράφουμε έναν αλγόριθμο εύρεσης της κανονικής μορφής Jordan J του πίνακα A:

Βήμα 1. *Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ και βρίσκουμε το σύνολο*

$$\mathsf{Spec}(A) := \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\}$$

των διακεκριμένων ιδιοτιμών του A.

Βήμα 2. *Για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \in \mathsf{Spec}(A)$, υπολογίζουμε τις βαθμίδες των πινάκων:*

$$(A - \lambda \cdot I_n), \quad (A - \lambda \cdot I_n)^2, \ \cdots, \quad (A - \lambda \cdot I_n)^n$$

Βήμα 3. *Για κάθε ιδιοτιμή* $\lambda \in \mathsf{Spec}(A)$ *υπολογίζουμε τον ελάχιστο φυσικό αριθμό* $s := s(\lambda)$ *για τον οποίο ισχύει:*

$$\mathbf{r}(A - \lambda \cdot I_n)^s = \mathbf{r}(A - \lambda \cdot I_n)^{s+1}$$

και θέτουμε:

$$q_m := \mathbf{r}(A - \lambda \cdot I_n)^{m-1} - \mathbf{r}(A - \lambda \cdot I_n)^m, \quad \forall m = 1, 2, \cdots, s+1.$$

Σημειώνουμε ότι:

$$0 \;=\; q_{s+1} \;<\; q_s \;\leq\; q_{s-1} \;\leq\; \cdots \;\leq q_1 \;=\; n - \mathbf{r}(A - \lambda \cdot I_n)$$

Βήμα 4. *Για κάθε ιδιοτιμή* $\lambda \in \mathsf{Spec}(A)$ *και για κάθε* $m = 1, 2, \cdots, s(\lambda)$*, θεωρούμε:*

$q_m - q_{m+1}$ *στοιχειώδεις πίνακες Jordan οι οποίοι είναι* $m \times m$ *και έχουν διαγώνιο στοιχείο τον αριθμό* λ.

Βήμα 5. *Για κάθε ιδιοτιμή* $\lambda \in \mathsf{Spec}\, A$*, θεωρούμε το ευθύ άθροισμα των στοιχειωδών πινάκων Jordan του Βήματος* 4*. Ο πίνακας που προκύπτει είναι η κανονική μορφή Jordan του* A*. (Ως συνήθως διατάσσουμε Jordan blocks έτσι ώστε τα blocks με μεγαλύτερη τάξη να εμφανίζονται πρώτα).*

Παράδειγμα 7.7. *Θεωρούμε τον* 3×3 *πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A *είναι*

$$P_A(t) = (t-2)^3$$

και άρα η μόνη ιδιοτιμή του A *είναι η* $\lambda = 2$ *πολλαπλότητας* 3*. Επομένως*

$$\mathsf{Spec}(A) = \{2\}$$

(1) *Θα έχουμε:*

$$A - 2 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 3 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

και άρα όπως μπορούμε να δούμε εύκολα

$$\mathbf{r}(A - 2 \cdot I_3) = 1$$

(2) *Θα έχουμε*

$$(A - 2 \cdot I_3)^2 = 0$$

και άρα

$$\mathbf{r}(A - 2 \cdot I_3)^2 = \mathbf{r}(A - 2 \cdot I_3)^3 = 0$$

(3) *Επομένως*

$$s = 2, \qquad q_1 = 3 - 1 = 2$$

και

$$q_2 = \mathbf{r}(A - 2 \cdot I_3) - \mathbf{r}(A - 2 \cdot I_3)^2 = 1 - 0 = 1 \qquad \text{και} \qquad q_3 = 0$$

(4) *Για τον πίνακα* A *θα έχουμε:*
- $q_1 - q_2 = 1 - 0 = 1$ *στοιχειώδη πίνακα Jordan ο οποίος θα είναι* 1×1 *και θα έχει το* $\lambda = 2$ *στην διαγώνιο.*
- $q_2 - q_3 = 1 - 0 = 1$ *στοιχειώδη πίνακα Jordan ο οποίος θα είναι* 2×2 *και θα έχει το* $\lambda = 2$ *στην διαγώνιο.*

- *$q_3 - q_4 = 0$ στοιχειώδη πίνακα Jordan ο οποίος θα είναι 3×3 και θα έχει το $\lambda = 2$ στην διαγώνιο.*

Επομένως η κανονική μορφή Jordan του A θα είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι το ευθύ άθροισμα των στοιχειωδών πινάκων Jordan:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus (2)$$

7.6. **Αλγόριθμος Εύρεσης Αντιστρέψιμου Πίνακα P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι η Κανονική Μορφή Jordan του A.**

- Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας $n \times n$-πίνακας με στοιχεία απο το σώμα $\mathbb{K}$.
- Υποθέτουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του A ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$.

Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας

$$P^{-1} \cdot A \cdot P$$

να είναι η κανονική μορφή Jordan του A.

- Περιγράφουμε έναν αλγόριθμο εύρεσης του αντιστρέψιμου πίνακα P:

Βήμα 6. *Για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \in \operatorname{\mathsf{Spec}} A$ $(s = s(\lambda))$:*

(1) *Βρίσκουμε q_s γραμμικά ανεξαρτητες λύσεις του συστήματος εξισώσεων:*

$$(A - \lambda \cdot I_n)^s \cdot X = 0$$

έτσι ώστε να ισχύει:

$$(A - \lambda \cdot I_n)^{s-1} \cdot X \neq 0$$

(2) *Βρίσκουμε $q_{s-1} - q_s$ γραμμικά ανεξαρτητες λύσεις του συστήματος εξισώσεων:*

$$(A - \lambda \cdot I_n)^{s-1} \cdot X = 0$$

έτσι ώστε

$$(A - \lambda \cdot I_n)^{s-2} \cdot X \neq 0$$

έτσι ώστε αυτές οι λύσεις μαζί με τις q_s λυσεις του (1) να αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

(3) *Συνεχίζουμε αυτή την διαδικασία και τελικά βρίσκουμε $q_1 - q_2$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος*

$$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = 0$$

έτσι ώστε αυτές οι λύσεις μαζί με τις q_2 λύσεις που βρέθηκαν προηγούμενα να αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

Βήμα 7. *Έστω $\{X_1, X_2, \cdots, X_k\}$ οι λύσεις που βρέθηκαν στο Βήμα 6. Εκ' κατασκευής οι λύσεις αυτές είναι γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε κάποια ιδιοτιμή λ, δηλαδή ικανοποιούν την σχέση*

$$(A - \lambda \cdot I_n)^t \cdot X = 0 \qquad \text{για κάποιο} \quad t \geq 0$$

Για κάθε $i = 1, 2, \cdots k$, Βρίσκουμε τον φυσικό αριθμό

$$m_i := \min\{t \geq 0 \mid (A - \lambda \cdot I_n)^t \cdot X = 0\}$$

και θεωρούμε τον πίνακα

$$P_i := \big((A-\lambda\cdot I_n)^{m_i-1}\cdot X_i,\ \cdots\ (A-\lambda\cdot I_n)\cdot X_i,\ X_i\big)$$

δηλαδή ο πίνακας P_i έχει σαν στήλες τα διανύσματα

$$(A-\lambda\cdot I_n)^r\cdot X_i, \quad 0\le r\le m_i-1$$

Βήμα 8. *Ο αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να ειναι η Κανονικη Μορφη Jordan του A, είναι τότε ο πίνακας:*

$$P = \big(P_1\ P_2\ \cdots\ P_k\big).$$

Παράδειγμα 7.8. *Θεωρούμε τον 4×4 πίνακα πραγματικών αριθμών*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) *Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A:*

$$P_A(t) = (t-5)^3(t-4)$$

(2) *Άρα θα έχουμε:*

$$\mathsf{Spec}(A) = \{5,4\}$$

(α΄) *Για την ιδιοτιμή $\lambda = 5$, έχουμε:*

$$s=3,\ \ q_3=1,\ \ q_2=1,\ \ q_1=1$$

Άρα υπάρχει ένα Jordan block τάξης 3.

(β΄) *Για την $\lambda=4$, έχουμε:*

$$s=1,\ \ q_1=1$$

Άρα υπάρχει ένα Jordan block τάξης 1.

(3) *Η κανονική μορφή Jordan είναι η*

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \oplus \big(4\big)$$

(4) *Ακολουθώντας την διαδικασία των Βημάτων $6,7,8$ βρίσκουμε ότι:*

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -14 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 7.9. *Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan των ακόλουθων πινάκων πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 7.10. *Να δείξετε ότι η κανονική μορφή Jordan του πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

είναι (ως ευθύ άθροισμα στοιχειωδών πινάκων Jordan):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 7.11. *Θεωρούμε τον ακόλουθο πίνακα πραγματικών αριθμών:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι η κανονική μορφή Jordan του A.

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης «Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1249.

Σημείωμα Αδειοδότησης