ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ανοικτάμαθήματα
opencourses

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Εφαρμογές της Κανονικής Μορφής Jordan

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

8. **Εφαρμογές της Κανονικής Μορφής Jordan**

Στην παρούσα παράγραφο θα δούμε κάποιες εφαρμογές της κανονικής μορφής Jordan. Οι πίνακες $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ με τους οποίους θα ασχοληθούμε θα έχουν όλες οι ιδιοτιμές τους στο σώμα $\mathbb{K}$. Αν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, τότε ως γνωστόν όλοι οι πίνακες $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ έχουν αυτή την ιδιότητα.

8.1. **Κάθε τετραγωνικός πίνακας είναι όμοιος με τον ανάστροφό του.**

Ώς γνωστόν κάθε τετραγωνικός πίνακας A έχει το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο με τον ανάστροφό του ${}^tA$, και άρα οι πίνακες A και ${}^tA$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα δείχνει ότι οι πίνακες A και ${}^tA$ είναι όμοιοι, με την προυπόθεση ότι οι ιδιοτιμές τους ανήκουν στο $\mathbb{K}$.

Θεώρημα 8.1. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός πίνακας, και υποθέτουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του A ανήκουν στο $\mathbb{K}$. Τότε ο A είναι όμοιος με το ανάστροφό του ${}^tA$.*

Απόδειξη. Ώς γνωστόν οι πίνακες A και ${}^tA$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Άρα όλες οι ιδιοτιμές του ${}^tA$ ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$. Τότε οι πίνακες A και ${}^tA$ είναι όμοιοι με πίνακες Jordan J_1 και J_2 αντίστοιχα:

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = J_1 \qquad \text{και} \qquad Q^{-1}\cdot {}^tA\cdot Q = J_2$$

για κατάλληλους αντιστρέψιμους πίνακες P και Q. Τότε:

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = J_1 \quad\Longrightarrow\quad A = P\cdot J_1\cdot P^{-1} \quad\Longrightarrow\quad {}^tA = {}^t(P^{-1})\cdot {}^tJ_1\cdot {}^tP = ({}^tP)^{-1}\cdot {}^tJ_1\cdot {}^tP$$

$$Q^{-1}\cdot {}^tA\cdot Q = J_2 \quad\Longrightarrow\quad {}^tA = Q\cdot J_2\cdot Q^{-1}$$

Άρα:

$$({}^tP)^{-1}\cdot {}^tJ_1\cdot {}^tP = Q\cdot J_2\cdot Q^{-1} \quad\Longrightarrow\quad J_2 = Q^{-1}\cdot ({}^tP)^{-1}\cdot {}^tJ_1\cdot {}^tP\cdot Q$$

και επομένως οι πίνακες ${}^tJ_1$ και J_2 είναι όμοιοι:

$$J_2 = ({}^tP\cdot Q)^{-1}\cdot {}^tJ_1\cdot ({}^tP\cdot Q) \tag{8.1}$$

Για κάθε στοιχειώδη πίνακα Jordan

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ο οποίος εμφανίζεται στον πίνακα Jordan J_1 και αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή λ του A, άρα και του ${}^tA$, θεωρούμε τον $m\times m$ πίνακα

$$T_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι $T_m^2 = T_m$ και άρα $T_m^{-1} = T_m$. Επιπλέον:

$$T_m^{-1} \cdot J_m(\lambda) \cdot T^m = {}^tJ_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Επομένως ο στοιχειώδης πίνακας Jordan $J_m((\lambda)$ είναι όμοιος με τον ανάστροφό του. Θεωρώντας το ευθύ άθροισμα T πινάκων της μορφής T_m για κατάλληλα μεγέθη $m \geq 1$, έπεται ότι ο πίνακας Jordan J_1 είναι όμοιος με τον ανάστροφό του ${}^tJ_1$: υπαρχει αντιστρέωιμος πίνακας R έτσι ώστε:

$$T^{-1} \cdot {}^tJ_1 \cdot T = J_1 \qquad \Longrightarrow \qquad {}^tJ_1 = T \cdot J_1 \cdot T^{-1} \tag{8.2}$$

Επειδή η σχέση ομοιότητας πινάκων είναι μεταβατική, από τις (8.1) και (8.2) έπεται ότι οι πίνακες Jordan J_1 και J_2 είναι όμοιοι. Ακλριβέστερα θα έχουμε:

$$J_2 = (T^{-1} \cdot {}^tP \cdot Q)^{-1} \cdot J_1 \cdot (T^{-1} \cdot {}^tP \cdot Q)$$

Έτσι:

$${}^tA \sim J_2 \quad \text{και} \quad J_2 \sim J_1 \quad \text{και} \quad J_1 \sim A$$

όπου η σχέση $\sim$ υποδηλώνει σχέση ομοιότητας. Λόγω μεταβατικότητας της σχέσης ομοιότητας, έπεται τελικά ότι:

$$A \sim {}^tA$$

και άρα ο A είναι όμοιος με τον A. □

8.2. **Ανάλυση τετραγωνικού πίνακα σε γινόμενο δύο συμμετρικών πινάκων ένας εκ των οποίων είναι αντιστρέψιμος.**

Το βασικό αποτέλεσμα της παρούσης παραγράφου είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 8.2. *Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός πίνακας, και υποθέτουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του A ανήκουν στο $\mathbb{K}$. Τότε υπάρχουν συμμετρικοί πίνακες $B, C \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ έτσι ώστε:*

$$A = B \cdot C$$

και ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος.

Απόδειξη. Επειδή όλες οι ιδιοτιμές του A ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$, έπεται ότι ο A είναι όμοιος με έναν πίνακα Jordan J:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = J \qquad \Longrightarrow \qquad A = P \cdot J \cdot P^{-1}$$

Τότε θα έχουμε:

$${}^tA = {}^tP^{-1} \cdot {}^tJ \cdot {}^tP$$

Αν $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ είναι οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του A, θα έχουμε:

$$J = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k)$$

και κάθε πίνακας Jordan $J_{n_i}(\lambda_i)$, $1 \leq i \leq k$, είναι ευθύ άθροισμα στοιχειωδών πινάκων Jordan κατάλληλων μεγεθών που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i:

$$J_{n_i}(\lambda_i) = J_{n_{i_1}}(\lambda_i) \oplus \cdots \oplus J_{n_{i_r}}(\lambda_i), \qquad n_i = n_{i_1} + \cdots n_{i_r}$$

Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 8.1, θέτοντας

$$T = T_{n_1} \oplus \cdots \oplus T_{n_k}, \qquad n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

όπου

$$T_{n_i} = T_{n_{i_1}} \oplus \cdots \oplus T_{n_{i_r}}, \qquad n_i = n_{i_1} + \cdots n_{i_r}$$

και

$$T_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \forall m \geq 1$$

θα έχουμε:

$$J^t = T^{-1} \cdot J \cdot T$$

και άρα:

$${}^tA = {}^tP^{-1} \cdot {}^tJ \cdot {}^tP = {}^tP^{-1} \cdot T^{-1} \cdot J \cdot T \cdot {}^tP = {}^tP^{-1} \cdot T^{-1}P^{-1} \cdot A \cdot P \cdot T \cdot {}^tP$$

και άρα:

$${}^tA = B^{-1} \cdot A \cdot B, \qquad \text{όπου} \qquad B := P \cdot T \cdot {}^tP$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας B είναι συμμετρικός και αντιστρέψιμος. Πραγματικά επειδή ο P και ο T είναι αντιστρέψιμοι πίνακες και ο T είναι προφανώς συμμετρικός, θα έχουμε:

$${}^tB = {}^t(P \cdot T \cdot {}^tP) = {}^t({}^tP) \cdot {}^tT \cdot {}^tP = P \cdot T \cdot {}^tP$$

Επειδή ο B είναι συμμετρικός, έπεται ότι και ο B είναι συμμετρικός: ${}^t(B^{-1}) = B^{-1}$. Θέτοντας

$$C := B^{-1} \cdot A$$

θα έχουμε:

$${}^tC = {}^t(B^{-1} \cdot A) = {}^tA \cdot {}^t(B^{-1}) = B^{-1} \cdot A \cdot B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A = C$$

Επομένως θα έχουμε:

$$A = B \cdot C, \qquad B: \text{ συμμετρικός και αντιστρέψιμος} \quad \text{και} \qquad C: \text{ συμμετρικός}$$ □

8.3. **Ανάλυση τετραγωνικού πίνακα σε άθροισμα διαγωνοποιήσιμου και μηδενοδύναμου πίνακα.**

Θεώρημα 8.3. *(Ανάλυση Jordan) Έστω $A \in \mathsf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ένας τετραγωνικός πίνακας, και υποθέτουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του A ανήκουν στο $\mathbb{K}$. Τότε ο A μπορεί να γραφεί ως εξής:*

$$A = \widetilde{\Delta} + \widetilde{N}$$

όπου:

(1) *ο $\widetilde{\Delta}$ είναι διαγωνοποιήσιμος.*
(2) *ο $\widetilde{N}$ είναι μηδενοδύναμος.*
(3) $\widetilde{\Delta} \cdot \widetilde{N} = \widetilde{N} \cdot \widetilde{\Delta}, \quad A \cdot \widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta} \cdot A, \quad A \cdot \widetilde{N} = \widetilde{N} \cdot A.$
(4) *Υπάρχουν πολυώνυμα $R(t), S(t) \in \mathbb{K}[t]$ έτσι ώστε:*

$$\widetilde{\Delta} = R(A) \qquad \text{και} \qquad \widetilde{N} = S(A)$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πτώτα ότι ο πίνακας A είναι ένας στοιχειώδης πίνακας Jordan $J_m(\lambda)$ μεγέθους $m \geq 1$ που αντιστοιχεί σε έναν αριθμό $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$A = J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Τότε θέτοντας

$$\Delta_m(\lambda) = \lambda \cdot I_m = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

θα έχουμε:

$$J_m(\lambda) = \Delta_m(\lambda) + N_m$$

και προφανώς:

(1) ο $\Delta_m(\lambda)$ είναι διαγώνιος (ακριβέστερα είναι βαθμωτός, δηλαδή βαθμωτό πολλαπλάσιο του I_m).
(2) ο είναι μηδενοδύναμος: $N_m^m = \mathbb{O}$.

Επιπλέον:

(1)

$$\Delta_m(\lambda) \cdot N_m = \lambda \cdot I_m \cdot N_m = \lambda \cdot N_m = \lambda \cdot N_m \cdot I_m = N_m \cdot \lambda \cdot I_m = N_m \cdot \Delta_m(\lambda)$$

(2)

$$J_m(\lambda) \cdot \Delta_m(\lambda) = (\Delta_m(\lambda) + N_m) \cdot \Delta_m = \Delta_m(\lambda)\Delta_m(\lambda) + N_m \cdot \Delta_m(\lambda) =$$
$$\Delta_m(\lambda)\Delta_m(\lambda) + \Delta_m(\lambda) \cdot N_m = \Delta_m(\lambda) \cdot (\Delta_m(\lambda) + N_m) = \Delta_m(\lambda) \cdot J_m(\lambda)$$

(3)

$$J_m(\lambda) \cdot N_m = (\Delta_m(\lambda) + N_m) \cdot N_m = \Delta_m(\lambda) \cdot N_m + N_m \cdot N_m =$$
$$N_m \cdot \Delta_m(\lambda) + N_m \cdot N_m = N_m \cdot (\Delta_m(\lambda) + N_m) = N_m \cdot J_m(\lambda)$$

Άρα οι πίνακες $\Delta_m(\lambda)$ και N_m μετατίθενται μεταξύ τους και με τον $A = J_m(\lambda)$.

Στην γενική περίπτωση, επειδή ο A έχει όλες τις ιδιοτιμές του στο $\mathbb{K}$, έπεται ότι ο A είναι όμοιος με ένας πίνακα Jordan J, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P έτσι ώστε:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = J$$

όπου, αν $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ είναι οι διακεκριμμένες ιδιοτιμές του A, θα έχουμε:

$$J = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k)$$

και κάθε πίνακας Jordan $J_{n_i}(\lambda_i)$, $1 \leq i \leq k$, είναι ευθύ άθροισμα στοιχειωδών πινάκων Jordan κατάλληλων μεγεθών που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i:

$$J_{n_i}(\lambda_i) = J_{n_{i_1}}(\lambda_i) \oplus \cdots \oplus J_{n_{i_r}}(\lambda_i), \qquad n_i = n_{i_1} + \cdots n_{i_r}$$

Τότε θα έχουμε

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1}$$

και κάθε στοιχειώδης πίνακα Jordan $J_{n_{i_s}}(\lambda_i)$, σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα:

$$J_{n_{i_s}}(\lambda_i) = \Delta_{n_{i_s}}(\lambda_i) + N_{n_{i_s}}$$

Θέτουμε:

$$\Delta_{n_i}(\lambda_i) = \Delta_{n_{i_1}}(\lambda_i) \oplus \cdots \oplus \Delta_{n_{i_r}}(\lambda_i) \qquad \text{και} \qquad \Delta = \Delta_{n_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \Delta_{n_k}(\lambda_k)$$

$$N_{n_i} = N_{n_{i_1}} \oplus \cdots \oplus N_{n_{i_r}} \qquad \text{και} \qquad N = N_{n_1} \oplus \cdots \oplus N_{n_k}$$

Τότε, με χρήση των παραπάνω σχέσεων, εύκολα βλέπουμε ότι θα έχουμε:

$$J = \Delta + N, \quad \Delta \cdot N = N \cdot \Delta, \quad J \cdot N = N \cdot J, \qquad J \cdot \Delta = \Delta \cdot J$$

και ο πίνακας Δ είναι διαγωνοπιήσιμος (ως ευθύ άθροισμα βαθμωτών πινάκων) και ο πίνακας N είναι μηδενοδύναμος (ως ευθύ άθροισμα μηδενοδύναμων πινάκων).

Τότε όμως θα έχουμε:

$$A = P^{-1} \cdot J \cdot P = P^{-1} \cdot (\Delta + N) \cdot P = P^{-1} \cdot \Delta \cdot P + P^{-1} \cdot N \cdot P$$

Τέλος θέτοντας $\widetilde{\Delta} = P^{-1} \cdot \Delta \cdot P$ και $\widetilde{N} = P^{-1} \cdot N \cdot P$, έχουμε έναν διαγωνοποιήσιμο πίνακα $\widetilde{\Delta}$ και έναν μηδενοδύναμο πίνακα $\widetilde{N}$ έτσι ώστε:

$$A = \widetilde{\Delta} + \widetilde{N}$$

και

$$A \cdot \widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta} \cdot A, \qquad A \cdot \widetilde{N} = \widetilde{N} \cdot A, \qquad \widetilde{N} \cdot \widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta} \cdot \widetilde{N}$$

Τέλος έστω ένα πολυώνυμο $R(t) \in \mathbb{K}[t]$ με την ιδιότητα:

$$R(\lambda_i) = \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq k, \qquad \text{και} \qquad R^{(m)}(\lambda_i) = 0, \qquad 1 \leq m \leq n_i$$

όπου n_i είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i (προφανώς τέτοια πολυώνυμα υπάρχουν), και εκ' κατασκευής το $R(t)$ έχει την ιδιότητα:

$$\widetilde{\Delta} = R(A)$$

Θέτοντας $S(t) = t - R(t)$ έχουμε ένα πολυώνυμο $S(t) \in \mathbb{K}[t]$ έτσι ώστε:

$$\widetilde{N} = S(A)$$

□

Ορισμός 8.4. *Η ανάλυση του πίνακα A:*

$$A = \widetilde{\Delta} + \widetilde{N}$$

στο Θεώρημα 8.3 *καλείται* **ανάλυση Jordan** *του* A.

Άσκηση 8.5. *Να δείξετε ότι η ανάλυση Jordan του A είναι μοναδική: Αν*

$$A = \Delta' + N'$$

όπου ο πίνακας Δ' είναι διαγωνοποιήσιμος και ο πίνακας N' είναι μηδενοδύναμος, και οι πίνακες Δ' και N' μετατίθενται μεταξύ τους (άρα και με τον A), τότε:

$$\widetilde{\Delta} = \Delta' \qquad \textit{και} \qquad \widetilde{N} = N'$$

8.4. **Κριτήριο Ομοιότητας Πινάκων.** Το ακόλουθο σημαντικό Θεώρημα μας δίνει ένα χρήσιμο κριτήριο για το πότε δύο πίνακες είναι όμοιοι.

Θεώρημα 8.6. *Έστω A, B δύο τετραγωνικοί πίνακες με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$, και υποθέτουμε ότι οι A, B έχουν όλες τις ιδιοτιμές του στο $\mathbb{K}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Οι πίνακες A και B είναι όμοιοι.*

(2) (α΄) *Οι πίνακες A και B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$.*

(β΄) *Για κάθε $1 \leq j \leq k$ και για κάθε $m \geq 1$:*

$$\mathbf{r}\big(A - \lambda_j I_n\big)^m \;=\; \mathbf{r}\big(B - \lambda_j I_n\big)^m$$

Απόδειξη. □

8.5. **Κριτήριο Διαγωνοποίησης Πινάκων.** Το ακόλουθο σημαντικό Θεώρημα μας δίνει ένα χρήσιμο κριτήριο για το πότε ένας πίνακας είναι διαγωνοποίησιμος.

Θεώρημα 8.7. *Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{K}$, και έστω $s = \deg Q_A(t)$ ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου $Q_A(t)$ του A. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο πίνακας A είναι διαγωνοποίησιμος.*

(2) *Όλες οι ιδιοτιμές του A ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$, και:*

$$\mathsf{Det}\big(\mathsf{Tr}(A^{i+j})\big) \;\neq\; 0, \qquad\qquad 0 \leq i, j \leq s-1$$

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς