ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τίτλος Μαθήματος: Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Ενότητα: Η Κανονική Μορφή Jordan - II

Διδάσκων: Καθηγητής Νικόλαος Μαρμαρίδης, Καθηγητής Ιωάννης Μπεληγιάννης

Τμήμα: Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

9. **Η Κανονική Μορφή Jordan - II**

Στην παρούσα παράγραφό θα δούμε μια διαφορετική προσέγγιση στην Κανονική Μορφή Jordan.

9.1. **Αναλλοίωτοι και κυκλικοί υπόχωροι.**

Έστω ότι $\mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος υπεράνω ενός σώματος $\mathbb{K}$ και ότι $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός ενδομορφισμός του.

Ορισμός 9.1. *Ένας υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathcal{E}$ ονομάζεται f-αναλλοίωτος, αν $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$.*

Αν $\mathcal{V}$ είναι ένας f-αναλλοίωτος υπόχωρος τού $\mathcal{E}$, τότε ο περιορισμός $f_{|\mathcal{V}} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{E}$ του f στον υπόχωρο $\mathcal{V}$ αποτελεί έναν ενδομορφισμό του $\mathcal{V}$, αφού $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$, δηλαδή $f_{|\mathcal{V}} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$.

Παράδειγμα 9.2. *Δοθέντος ενός ενδομορφισμού $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, οι προφανείς υπόχωροι $\{\vec{0}\}$ και $\mathcal{E}$ είναι f-αναλλοίωτοι. Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οι υπόχωροι $\mathsf{Ker}(f^n)$ και $\mathsf{Im}(f^n)$ είναι επίσης f-αναλλοίωτοι υπόχωροι του $\mathcal{E}$. (Γιατί;)*

Αν $\vec{v}$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα του $\mathcal{E}$, τότε ενδιαφερόμαστε για τον «μικρότερο»[2] f-αναλλοίωτο υπόχωρο του $\mathcal{E}$ που περιέχει το $\vec{v}$.

Λήμμα 9.3. *Ο υπόχωρος τού $\mathcal{E}$ που παράγεται από το σύνολο των διανυσμάτων*

$$\left\{f^i(\vec{v}) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} = \left\{\vec{v} = f^0(\vec{v}), f(\vec{v}), f^2(\vec{v}), \dots, f^n(\vec{v}), f^{(n+1)}(\vec{v}), \dots\right\}$$

είναι ο μικρότερος f-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathcal{E}$ που περιέχει το διάνυσμα $\vec{v}$.

Απόδειξη. Αν $\vec{w}$ είναι ένα στοιχείο του υπόχωρου $\langle\{f^i(\vec{v}) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\rangle$, τότε είναι ένας πεπερασμένος $\mathbb{K}$-γραμμικός συνδυασμός κάποιων δυνάμεων $f^i(\vec{v}), i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Έστω ότι $\vec{w} = a_1 f^{i_1}(\vec{v}) + a_2 f^{i_2}(\vec{v}) + \cdots + a_s f^{i_s}(\vec{v}), a_j \in \mathbb{K}, \forall j, 1 \le j \le s$.

Εφαρμόζοντας στο $\vec{w}$ τον f προκύπτει το διάνυσμα:

$$f(\vec{w}) = f(a_1 f^{i_1}(\vec{v}) + a_2 f^{i_2}(\vec{v}) + \cdots + a_s f^{i_s}(\vec{v})) = a_1 f^{i_1+1}(\vec{v}) + a_2 f^{i_2+1}(\vec{v}) + \cdots + a_s f^{i_s+1}(\vec{v}),$$

το οποίο είναι γραμμικός συδυασμός των $f^{i_1+1}(\vec{v}), f^{i_2+1}(\vec{v}), \dots, f^{i_s+1}(\vec{v})$ και συνεπώς ανήκει στον $\langle\{f^i(\vec{v}) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\rangle$. Επομένως, ο $\langle\{f^i(\vec{v}) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\rangle$ είναι ένας f-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathcal{E}$.

Αν τώρα, $\mathcal{V}$ είναι ένας f-αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχει το συγκεκριμένο διάνυσμα $\vec{v}$, τότε οφείλει να περιέχει και κάθε δύναμη $f^n(\vec{v}), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, αφού είναι f-αναλλοίωτος. Συνεπώς, περιέχει και το σύνολο $\left\{f^i(\vec{v}) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$, που είναι ακριβώς το σύνολο των γεννητόρων τού $\langle\{f^i(\vec{v}) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\rangle$. Επομένως, $\langle\{f^i(\vec{v}) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\rangle \subseteq \mathcal{V}$. Ώστε, ο $\langle\{f^i(\vec{v}) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\rangle$ είναι ο μικρότερος f-αναλλοίωτος υπόχωρος του $\mathcal{E}$ που περιέχει το διάνυσμα $\vec{v}$. □

Ορισμός 9.4. *Έστω ότι $\mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος, ότι $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός ενδομορφισμός και ότι $\vec{v}$ είναι ένα διάνυσμα τού $\mathcal{E}$. Ο υπόχωρος $\langle\{f^i(\vec{v}) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}\rangle$ καλείται ο f-κυκλικός υπόχωρος που παράγεται από το ζεύγος $(f, \vec{v})$ και συμβολίζεται με $C(f; \vec{v})$.*

Λήμμα 9.5. *Έστω ότι $\mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος, ότι $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός ενδομορφισμός και ότι $\vec{v}$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα τού $\mathcal{E}$.*

Το $\vec{v}$ είναι ιδιοδιάνυσμα τού f, αν και μόνο αν, η $\mathbb{K}$-διάσταση τού f-κυκλικού υπόχωρου $C(f; \vec{v})$ ισούται με 1.

[2] ως προς τη σχέση του υποσυνόλου "$\subseteq$"

Απόδειξη. «$\Longrightarrow$» Αν το $\vec{v}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα τού f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, τότε κάθε ένας από τους γεννήτορες $f^i(\vec{v}), i > 0$ του $C(f;\vec{v})$ ισούται με $f^i(\vec{v}) = \lambda^i\vec{v}$, αφού $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Σύμφωνα με την υπόθεση, το $\vec{v} \neq \vec{0}$, επομένως, $\dim C(f;\vec{v}) = 1$.

«$\Longleftarrow$» Αν $\dim C(f;\vec{v}) = 1$, τότε το σύνολο που αποτελείται από οποιονδήποτε μη μηδενικό γεννήτορα τού $C(f;\vec{v})$ είναι και μια βάση του. Γι' αυτό το $\{\vec{v}\}$ είναι μια βάση τού $C(f;\vec{v})$. Το $f(\vec{v}) \in C(f;\vec{v})$ είναι γραμμικά εξαρτημένο από το $\vec{v}$. Συνεπώς, υπάρχει κάποιο $\lambda \in \mathbb{K}$ με $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ και γι'αυτό το $\vec{v}$ είναι ιδιοδιάνυσμα. □

Παρατήρηση 9.6. *Η διάσταση τού f-κυκλικού υπόχωρου $C(f;\vec{v})$ «μετρά» το πόσο «απέχει» ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{v}$ από το να είναι ιδιοδιάνυσμα.*

Ας στρέψουμε τώρα την προσοχή μας σε πεπερασμένης διάστασης διανυσματικούς χώρους.

Ας είναι $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$–διανυσματικός χώρος με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ας είναι $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$–γραμμικός ενδομορφισμός, ας είναι $\vec{v}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα τού $\mathcal{E}$ και τέλος ας είναι $C(f;\vec{v})$ ο αντίστοιχος f–κυκλικός υπόχωρος. Επειδή, $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n$, θα είναι επίσης $\dim_{\mathbb{K}} C(f;\vec{v}) \leq n$.

Υπενθυμίζουμε, ότι δοθέντος οποιουδήποτε πολυωνύμου $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_s t^s \in \mathbb{K}[t]$ μπορούμε να σχηματίσουμε τον γραμμικό ενδομορφισμό $P(f) := a_0 \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} + a_1 f + \cdots + a_s f^s$, όπου $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ είναι ο ταυτοτικός ενδομορφισμός τού $\mathcal{E}$. Εφαρμόζοντας τον $P(f)$ στο διάνυσμα $\vec{v}$, παίρνουμε $P(f)(\vec{v}) := a_0\vec{v} + a_1 f(\vec{v}) + \cdots + a_s f^s(\vec{v})$.

Παρατηρούμε ότι το σύνολο των πολυωνύμων $S_{(f;v)} = \{P(t) \in \mathbb{K}[t] \mid P(t) \neq 0, P(f)(\vec{v}) = \vec{0}\}$ είναι μη κενό. Πράγματι, το $S_{(f;v)}$ περιέχει το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ τού f, επειδή το $Q_f(t) \neq 0$, ενώ ο ενδομορφισμός $Q_f(f)$ ισούται με τον μηδενικό ενδομορφισμό $\zeta_{\mathcal{E}}$ του $\mathcal{E}$ και γι'αυτό $Q_f(f)(\vec{v}) = \vec{0}$.

Όπως και στην περίπτωση τού ελαχίστου πολυωνύμου ενός ενδομορφισμού, μπορούμε να ορίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο τού f–κυκλικού υπόχωρου ως εξής:

(1) Μεταξύ των πολυωνύμων του $S_{(f;v)}$ θεωρούμε κάποιο πολυώνυμο με τον μικρότερο βαθμό.
(2) Πολλαπλασιάζοντας αυτό το πολυώνυμο με τον αντίστροφο τού συντελεστή τού μεγιστοβαθμίου όρου προκύπτει ένα πολυώνυμο που ανήκει στο $S_{(f;v)}$ που έχει τον μικρότερο βαθμό μεταξύ των πολυωνύμων τού $S_{(f;v)}$.
(3) Αποδεικνύεται ότι αυτό το πολυώνυμο είναι μοναδικό, το ονομάζουμε το *ελάχιστο πολυώνυμο* του f–κυκλικού υπόχωρου $C(f;\vec{v})$ και το συμβολίζουμε με $Q_{(f;v)}(t)$.
(4) Τέλος, αποδεικνύεται ακριβώς όπως και στην περίπτωση τού ελαχίστου πολυωνύμου ενός ενδομορφισμού, ότι κάθε πολυώνυμο τού $S_{(f;v)}$ είναι πολλαπλάσιο τού $Q_{(f;v)}(t)$.

Θεώρημα 9.7. *Έστω ότι $\mathcal{E}$ είναι ένας πεπερασμένης διάστασης $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος, ότι $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός ενδομορφισμός, ότι $\vec{v}$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα τού $\mathcal{E}$ και ότι $C(f;\vec{v})$ είναι ο αντίστοιχος f-κυκλικός υπόχωρος με ελάχιστο πολυώνυμο το $Q_{(f;v)}(t)$.*

(1) *Ο βαθμός τού $Q_{(f;v)}(t)$ ισούται με $m \in \mathbb{N}$, αν και μόνο αν, το σύνολο $\{\vec{v} = f^0(\vec{v}), f(\vec{v}), f^2(\vec{v}), \ldots, f^{(m-1)}(\vec{v})\}$ είναι βάση τού f-κυκλικού υπόχωρου $C(f;\vec{v})$.*
(2) *Το ελάχιστο πολυώνυμο τού περιορισμού $f_{|C(f;\vec{v})}$ τού f στον f-κυκλικό υπόχωρο $C(f;\vec{v})$ συμπίπτει με το $Q_{(f;v)}(t)$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ένας πεπερασμένος $\mathbb{K}$–γραμμικός συνδυασμός

$$\vec{w} = \sum_{j=1}^{s} a_{i_j} f^{i_j}(\vec{v}), i_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \forall j, 1 \leq j \leq s \tag{*}$$

διανυσμάτων τού $C(f;\vec{v})$ προκύπτει ως εικόνα τού ενδομορφισμού $P(f)$ εφαρμοσμένη πάνω στο διάνυσμα $\vec{v}$, όπου $P(t)$ είναι το πολυώνυμο $\sum_{j=1}^{s} a_{i_j} t^{i_j}$, δηλαδή $\vec{w} = P(f)(\vec{v})$. (Υπενθυμίζουμε ότι $t^0 = 1_{\mathbb{K}}$.)

(1) «$\Longrightarrow$» Αν ήταν τα διανύσματα $\vec{v} = f^0(\vec{v}), f(\vec{v}), f^2(\vec{v}), \ldots, f^{(m-1)}(\vec{v})$, γραμμικά εξαρτημένα, τότε θα υπήρχαν $a_i \in \mathbb{K}, 0 \leq i \leq m-1$, όχι όλα ίσα με 0, τέτοια ώστε, $\sum_{i=0}^{m-1} a_i f^i(\vec{v}) = \vec{0}$. Τότε το μη μηδενικό πολυώνυμο $R(t) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i t^i$, που έχει βαθμό γνήσια μικρότερο από τον βαθμό m του $Q_{(f;v)}(t)$, ικανοποιεί την $R(f)(\vec{v}) = \vec{0}$. Συνεπώς, το $R(t)$ ανήκει στο σύνολο $S_{(f;v)} = \{P(t) \in \mathbb{K}[t] \mid P(t) \neq 0, P(f)(\vec{v}) = \vec{0}\}$. Αυτό είναι άτοπο, αφού το $Q_{(f;v)}(t)$ είναι ένα πολυώνυμο που έχει τον μικρότερο βαθμό m μεταξύ των πολυωνύμων τού $S_{(f;v)}$. Ώστε το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{v} = f^0(\vec{v}), f(\vec{v}), f^2(\vec{v}), \ldots, f^{(m-1)}(\vec{v})\}$ αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{B}$ είναι επίσης σύνολο γεννητόρων του $C(f;\vec{v})$ και συνεπώς μια βάση του. Αν $\vec{w} \in C(f;\vec{v})$, τότε $\vec{w} = \sum_{j=1}^{s} a_{i_j} f^{i_j}(\vec{v})$, βλ. (*). Επομένως, $\vec{w} = P(f)(\vec{v})$ με $P(t) = \sum_{j=1}^{s} a_{i_j} t^{i_j}$. Εκτελώντας την ευκλείδεια διαίρεση $P(t)$ δια $Q_{(f;v)}(t)$ προκύπτει

$$P(t) = L(t)Q_{(f;v)}(t) + R(t), \text{ όπου ή } R(t) = 0 \text{ ή βαθμός } R(t) < m = \text{ βαθμός } Q_{(f;v)}(t).$$

Συνεπώς, το πολυώνυμο $R(t)$ έχει τη γενική μορφή $R(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{m-1}t^{m-1}$ με $a_i \in \mathbb{K}, \forall i, 0 \leq i \leq m-1$, όπου κάποια ή και όλα τα a_i είναι ίσα με το $0 \in \mathbb{K}$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\vec{w} &= P(f)(\vec{v}) = L(f) \circ Q_{(f;v)}(f)(\vec{v}) + R(f)(\vec{v}) = L(f)(Q_{(f;v)}(f)(\vec{v})) + R(f)(\vec{v}) = L(f)(\vec{0}) + R(f)(\vec{v}) \\ &= a_0\vec{v} + a_1 f(\vec{v}) + \cdots + a_{m-1} f^{m-1}(\vec{v}).\end{aligned}$$

Επομένως, το $\vec{w}$ είναι ένας $\mathbb{K}$–γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων τού συνόλου $\mathcal{B}$. Ώστε το $\mathcal{B}$ αποτελεί μια βάση τού $C(f;\vec{v})$.

(1) «$\Longleftarrow$» Επειδή το σύνολο $\mathcal{B} = \{\vec{v} = f^0(\vec{v}), f(\vec{v}), f^2(\vec{v}), \ldots, f^{(m-1)}(\vec{v})\}$ είναι βάση τού f–κυκλικού υπόχωρου $C(f;\vec{v})$, το σύνολο $\mathcal{B} \cup \{f^m(\vec{v})\} = \{\vec{v} = f^0(\vec{v}), f(\vec{v}), f^2(\vec{v}), \ldots, f^{(m-1)}(\vec{v}), f^m(\vec{v})\}$ αποτελείται από γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα. Επομένως, υπάρχουν $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$, όχι όλα ίσα με μηδέν, τέτοια ώστε

$$a_0\vec{v} + a_1 f(\vec{v}) + a_2 f^2(\vec{v}) + \cdots + a_{m-1} f^{(m-1)}(\vec{v}) + a_m f^m(\vec{v}) = \vec{0}. \qquad (**)$$

Επιπλέον, ο συντελεστής a_m οφείλει να μην ισούται με μηδέν, αφού αν $a_m = 0$, τότε από την (**) έπεται ότι το $\mathcal{B}$ αποτελείται απο γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα, πράγμα άτοπο. Ώστε το πολυώνυμο $P(f) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$ έχει βαθμό m και ανήκει στο σύνολο $S_{(f;v)}$. Επομένως, το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_{(f;v)}(t)$ έχει βαθμό $\leq m$. Αν ο βαθμός s τού $Q_{(f;v)}(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + t^s$ ήταν γνήσια μικρότερος από m, τότε από $\vec{0} = Q_{(f;v)}(f)(\vec{v}) = b_0\vec{v} + b_1 f(\vec{v}) + \cdots + f^s(\vec{v})$ έπεται ότι τα διανύσματα $\vec{v}, f(\vec{v}), \ldots, f^s(\vec{v})$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αφού τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές b_i (του μη μηδενικού πολυωνύμου $Q_{(f;v)}(t)$) είναι διάφορος τού μηδενός. Αλλά αυτό είναι άτοπο, αφού τα $\vec{v}, f(\vec{v}), \ldots, f^s(\vec{v})$ με $s \leq m$, ανήκουν στη βάση $\mathcal{B}$. Ώστε ο βαθμός τού $Q_{(f;v)}(t)$ ισούται με m.

(2) Θεωρούμε τον περιορισμό τού f στον f–αναλλοίωτο υπόχωρο $C(f;\vec{v})$, δηλαδή τον ενδομορφισμό $f_{|C(f;\vec{v})} : C(f;\vec{v}) \longrightarrow C(f;\vec{v})$ και ας είναι $R(t)$ το ελάχιστο πολυώνυμο τού $f_{|C(f;\vec{v})}$. Επειδή το $R(t)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο τού $f_{|C(f;\vec{v})}$, ο ενδομορφισμός $R(f_{|C(f;\vec{v})})$ είναι ο μηδενικός ενδομορφισμός τού $C(f;\vec{v})$ και γι'αυτό $R(f_{|C(f;\vec{v})})(\vec{v}) = \vec{0}$. Επομένως, το $Q_{(f;v)}(t)$ διαιρεί το $R(t)$.

Έστω $P(t)$ οποιοδήποτε πολυώνυμο και $P(f)$ ο αντίστοιχος ενδομορφισμός τού $\mathcal{E}$. Επειδή ο $C(f;\vec{v})$ είναι ένας f–αναλλοίωτος υπόχωρος, ο ενδομορφισμός $P(f)$ περιορισμένος στον $C(f;\vec{v})$ αποτελεί έναν ενδομορφισμό τού $C(f;\vec{v})$.

Έστω ότι το ελάχιστο πολυώνυμο τού f–κυκλικού υπόχωρου $C(f;\vec{v})$ είναι το $Q_{(f;v)}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{m-1} t^{(m-1)} + t^m$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε διάνυσμα $f^i(\vec{v}), 1 \leq i \leq m-1$, της βάσης $\mathcal{B}$ του $C(f;\vec{v})$, έχουμε:

$$\begin{aligned} Q_{(f;v)}(f)(f^i(\vec{v})) &= a_0 f^i(\vec{v}) + a_1 f(f^i(\vec{v})) + a_2 f^2(f^i(\vec{v})) + \cdots + a_{m-1} f^{(m-1)}(f^i(\vec{v})) + f^m(f^i(\vec{v})) \\ &= f^i(a_0\vec{v} + a_1 f(\vec{v}) + a_2 f^2(\vec{v}) + \cdots + a_{m-1} f^{(m-1)}(\vec{v}) + f^m(\vec{v})) \\ &= f^i(Q_{(f;v)}(f)(\vec{v})) = f^i(\vec{0}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Επομένως, ο ενδομορφισμός $Q_{(f;v)}(f)$ περιορισμένος στον υπόχωρο $C(f;\vec{v})$ ισούται με τον μηδενικό ενδομορφισμό τού $C(f;\vec{v})$, αφού η τιμή τού $Q_{(f;v)}(f)$ ισούται με το μηδενικό διάνυσμα πάνω σε κάθε στοιχείο τής βάσης $\mathcal{B}$. Γι'αυτό το ελάχιστο πολυώνυμο $R(t)$ τού $f_{|C(f;\vec{v})})$ διαιρεί το $Q_{(f;v)}(t)$.

Συνεπώς το $Q_{(f;v)}(t)$ διαιρεί το $R(t)$ και το $R(t)$ διαιρεί το $Q_{(f;v)}(t)$. Τέλος, επειδή ο συντελεστής των μεγιστοβαθμίων όρων και των δύο πολυωνύμων ισούται με 1, έπεται $Q_{(f;v)}(t) = R(t)$. □

Παρατήρηση 9.8. *Ας είναι $\mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ας είναι $f\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός ενδομορφισμός, ας είναι $\vec{v}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα τού $\mathcal{E}$, ας είναι $C(f;\vec{v})$ ο αντίστοιχος f-κυκλικός υπόχωρος και τέλος ας είναι $Q_{(f;v)}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{m-1} t^{(m-1)} + t^m$ το ελάχιστο πολυώνυμο τού $C(f;\vec{v})$. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα, βλέπουμε ότι ο $m \times m$ πίνακας $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_{|C(f;\vec{v})})$ που παριστάνει τον ενδομορφισμό*
$f_{|C(f;\vec{v})} : C(f;\vec{v}) \longrightarrow C(f;\vec{v})$ ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{\vec{v}, f(\vec{v}), f^2(\vec{v}), \ldots, f^{(m-1)}(\vec{v})\}$ είναι ο

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_{|C(f;\vec{v})}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & -a_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Πράγματι, για κάθε $f^i(\vec{v}), 0 \leq i \leq m-2$, τής βάσης $\mathcal{B}$ έχουμε $f(f^i(\vec{v})) = f^{i+1}(\vec{v})$. Για το διάνυσμα $f^{m-1}(\vec{v})$ έχουμε

$$f(f^{m-1}(\vec{v})) = f^m(\vec{v}) = (-a_0)\vec{v} + (-a_1) f(\vec{v}) + (-a_2) f^2(\vec{v}) + \cdots + (-a_{m-1}) f^{(m-1)}(\vec{v}),$$

αφού $Q_{(f;v)}(\vec{v}) = a_0\vec{v} + a_1 f(\vec{v}) + a_2 f^2(\vec{v}) + \cdots + a_{m-1} f^{(m-1)}(\vec{v}) + f^m(\vec{v}) = \vec{0}$.

9.2. **Μηδενοδύναμοι ενδομορφισμοί–κυκλικοί υπόχωροι.**

Υπενθυμίζουμε ότι ένας ενδομορφισμός $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, ονομάζεται μηδενοδύναμος, αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με f^n ίσο με τον μηδενικό ενδομορφισμό $\zeta_{\mathcal{E}}$ τού $\mathcal{E}$. Ονομάζουμε *δείκτη μηδενοδυναμικότητας* τον μικρότερο $k \in \mathbb{N}$ με $f^k = \zeta_{\mathcal{E}}$.

Πρόταση 9.9. *Έστω ότι $\mathcal{E}$ είναι ένας πεπερασμένης διάστασης $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \geq 1$ και ότι $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας μηδενοδύναμος ενδομορφισμός με δείκτη μηδενοδυναμικότητας k. Τότε υπάρχει ένας f-κυκλικός υπόχωρος $C(f;\vec{v})$ με $\dim_{\mathbb{K}} C(f;\vec{v}) = k$.*

Απόδειξη. Αν $k = 1$, τότε ο $f = f^1$ είναι ο μηδενικός ενδομορφισμός $\zeta_{\mathcal{E}}$ και για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{v} \neq \vec{0}$ έχουμε $f(\vec{v}) = \vec{0}$. Γι' αυτό, ο υπόχωρος $C(f;\vec{v}) = \langle \vec{v}, f(\vec{v}) \ldots, f^i(\vec{v}), f^{i+1}(\vec{v}), \ldots \rangle = \langle \vec{v} \rangle$ είναι διάστασης 1.
Ας δούμε τώρα την περίπτωση $k \geq 2$. Αφού ο f^k είναι ο μηδενικός ενδομορφισμός $\zeta_{\mathcal{E}}$ του $\mathcal{E}$, ενώ $f^{k-1} \neq \zeta_{\mathcal{E}}$, υπάρχει κάποιο $\vec{v} \in \mathcal{E}$ με $f^{k-1}(\vec{v}) \neq \vec{0}$. Θεωρούμε τον υπόχωρο $C(f;\vec{v}) = \langle \vec{v}, f(\vec{v}) \ldots, f^{k-1}(\vec{v}) \rangle$. Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_{(f;v)}(t)$ τού $C(f;\vec{v})$ διαιρεί το πολυώνυμο $P(t) = t^k$, αφού $P(f)(v) = f^k(\vec{v})$. Συνεπώς, $Q_{(f;v)}(t) = t^s$, όπου $s \geq k$. Αλλά, αν $s < k$, δηλαδή αν $k - s \geq 1$, τότε $Q_{(f;v)}(f)(\vec{v}) =$

$f^s(\vec{v}) = \vec{0}$ και γι'αυτό και $f^{k-1}(\vec{v}) = f^{k-s-1}(f^s(\vec{v})) = \vec{0}$. Το τελευταίο είναι άτοπο. Επομένως, το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_{(f;v)}(t)$ τού $C(f;\vec{v})$ ισούται με t^k. Σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα 9.7, $\dim_{\mathbb{K}} C(f;\vec{v}) = k$. □

Παρατήρηση 9.10. *Ο πίνακας $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_{|C(f;\vec{v})})$ που παριστάνει τον περιορισμό $f_{|C(f;\vec{v})}$ του μηδενοδύναμου ενδομορφισμού $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ στον f-κυκλικό υπόχωρο $C(f;\vec{v})$ τής προηγούμενης πρότασης, ως προς τη βάση $\mathcal{B} = \{\vec{v}, f(\vec{v}) \ldots, f^{k-1}(\vec{v})\}$ είναι ο*

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_{|C(f;\vec{v})}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Πρόταση 9.11. *Έστω ότι $\mathcal{E}$ είναι ένας πεπερασμένης διάστασης $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \geq 1$, ότι $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας μηδενοδύναμος ενδομορφισμός με δείκτη μηδενοδυναμικότητας k και ότι $\vec{v} \in \mathcal{E}$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα, όπου ο αντίστοιχος f-κυκλικός υπόχωρος $C(f;\vec{v})$ έχει $\mathbb{K}$-διάσταση k. Τότε υπάρχει ένας f-αναλλοίωτος υπόχωρος W του $\mathcal{E}$ με $\mathcal{E} = C(f;\vec{v}) \oplus W$.*

Απόδειξη. Επαγωγή ως προς τον δείκτη μηδενοδυναμικότητας k.
Αν $k = 1$, τότε ο $f = f^1$ ισούται με τον μηδενικό ενδομορφισμό $\zeta_{\mathcal{E}}$ του χώρου $\mathcal{E}$. Ας είναι $\vec{v}$ οποιοδήποτε μη μηδενικό διάνυσμα τού $\mathcal{E}$. Η $\mathbb{K}$–διάσταση τού χώρου $C(f;\vec{v})$ ισούται με 1 και οποιοδήποτε ευθύ συμπλήρωμα W τού $C(f;\vec{v})$, δηλαδή οποιοσδήποτε υπόχωρος W τού $\mathcal{E}$ με $C(f;\vec{v}) \oplus W = \mathcal{E}$, είναι f–αναλλοίωτος, αφού ο f είναι ο μηδενικός ενδομορφισμός $\zeta_{\mathcal{E}}$.

Ας υποθέσουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό $< k$, θα την αποδείξουμε για τον φυσικό k.
Από την Πρόταση 9.9 γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\vec{v} \in \mathcal{E}, \vec{v} \neq \vec{0}$ τέτοιο, ώστε ο f–κυκλικός υπόχωρος $C(f;\vec{v}) = \langle \vec{v}, f(\vec{v}) \ldots, f^{k-1}(\vec{v}) \rangle$ να έχει διάσταση τον δείκτη μηδενοδυναμικότητας k. Θεωρούμε τον περιορισμό τού f στον f–αναλλοίωτο υπόχωρο $\mathsf{Im}(f) = f(\mathcal{E})$, δηλαδή τον $f_{|f(\mathcal{E})} : f(\mathcal{E}) \longrightarrow f(\mathcal{E})$. Ο δείκτης μηδενοδυναμικότητας τού $f_{|f(\mathcal{E})}$ ισούται με $k-1$, αφού $f^{k-1}(f(\mathcal{E})) = f^k(\mathcal{E}) = \{\vec{0}\}$, ενώ $f^{k-2}(f(\mathcal{E})) = f^{k-1}(\mathcal{E}) \neq \{\vec{0}\}$. Επιπλέον, η εικόνα

$$f(C(f;\vec{v})) = f(\langle \vec{v}, f(\vec{v}) \ldots, f^{k-1}(\vec{v}) \rangle) = \langle f(\vec{v}), f(f(\vec{v})) \ldots, f(f^{k-2}(\vec{v})) \rangle = C(f_{|f(\mathcal{E})}; f(\vec{v}))$$

τού $C(f;\vec{v})$ είναι ένας $f_{|f(\mathcal{E})}$–κυκλικός υπόχωρος με $\dim_{\mathbb{K}} C(f_{|f(\mathcal{E})}; f(\vec{v}))$ ίσο με τον δείκτη μηδενοδυναμικότητας $k-1$ τού $f_{|f(\mathcal{E})}$, αφού τα διανύσματα $f(\vec{v}), f(f(\vec{v})) = f^2(\vec{v}) \ldots, f(f^{k-2}(\vec{v})) = f^{k-1}(\vec{v})$ είναι $\mathbb{K}$–γραμμικώς ανεξάρτητα.
Συνεπώς, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, υπάρχει ένας $f_{|f(\mathcal{E})}$–αναλλοίωτος υπόχωρος W' τού $f(\mathcal{E})$, δηλαδή $f_{|f(\mathcal{E})}(W') = f(W') \subseteq W'$, με $f(\mathcal{E}) = C(f_{|f(\mathcal{E})}; f(\vec{v})) \oplus W'$.
Ας είναι $W_0 = \{\vec{w} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{w}) \in W'\}$. Προφανώς ο W_0 είναι ένας υπόχωρος τού $\mathcal{E}$. Επιπλέον, επειδή ο W' είναι f–αναλλοίωτος, έχουμε $W' \subseteq W_0$, (**) και αφού $f(W_0) \subseteq W'$, έπεται ότι ο W_0 είναι επίσης f–αναλλοίωτος.

Ισχυριζόμαστε ότι $\mathcal{E} = C(f;\vec{v}) + W_0$. Πράγματι, αν $\vec{x} \in \mathcal{E}$, τότε $f(\vec{x}) \in f(\mathcal{E}) = C(f_{|f(\mathcal{E})}; f(\vec{v})) \oplus W'$ (*). Επομένως, $f(\vec{x}) = \vec{z} + \vec{w}'$, όπου $\vec{z} \in C(f_{|f(\mathcal{E})}; f(\vec{v})) = f(C(f;\vec{v}))$ και $\vec{w}' \in W'$. Συνεπώς, $f(\vec{x}) = f(\vec{s}) + \vec{w}'$, όπου $\vec{z} = f(\vec{s}), \vec{s} \in C(f;\vec{v})$. Τώρα, $\vec{x} = \vec{s} + (\vec{x} - \vec{s})$ με $s \in C(f;\vec{v})$. Επιπλέον, το $\vec{x} - \vec{s}$ ανήκει στο W_0, αφού $f(\vec{x} - \vec{s}) = f(\vec{x}) - f(\vec{s}) = \vec{w}' \in W'$. Συνεπώς, $\mathcal{E} = C(f;\vec{v}) + W_0$.

Ισχυριζόμαστε ότι η τομή $C(f;\vec{v}) \cap W_0$ περιέχεται στον υπόχωρο $C(f_{|f(\mathcal{E})}; f(\vec{v})) = f(C(f;\vec{v}))$. Αν $\vec{x} \in C(f;\vec{v}) \cap W_0$, τότε $f(\vec{v}) \in f(C(f;\vec{v})) \cap f(W_0)$. Αλλά $f(C(f;\vec{v})) = C(f_{|f(\mathcal{E})}; f(\vec{v}))$, $f(W_0) \subseteq W_0$ και $C(f_{|f(\mathcal{E})}; f(\vec{v})) \cap W_0 = \{\vec{0}\}$. Επομένως, $f(\vec{x}) = \vec{0}$. Τώρα, το $\vec{x}$ ως στοιχείο τού $C(f;\vec{v})$, ισούται με

$\vec{x} = a_0\vec{x}+a_1 f(\vec{x})+\cdots+a_{k-1}f^{k-1}(\vec{v})$ και γι' αυτό $\vec{0} = f(\vec{x}) = a_0 f(\vec{x})+a_1 f^2(\vec{x})+\cdots+a_{k-2}f^{k-1}(\vec{v})$. Αλλά, αφού τα $f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \ldots, f^{k-1}(\vec{v})$ είναι $\mathbb{K}$–γραμμικώς ανεξάρτητα, έχουμε $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-2} = 0$ και επομένως το $\vec{x} = a_{k-1}f^{k-1}(\vec{v})$ ανήκει στον υπόχωρο $C(f_{|f(\mathcal{E})}; f(\vec{v})) = f(C(f;\vec{v}))$.

Αφού $C(f;\vec{v}) \cap W_0 \subseteq C(f_{|f(\mathcal{E})}; f(\vec{v}))$ και $W' \cap C(f_{|f(\mathcal{E})}; f(\vec{v})) = \{\vec{0}\}$, λόγω της (*), έχουμε $W' \cap (C(f;\vec{v}) \cap W_0) = \{\vec{0}\}$. Επομένως, το άθροισμα $W' \oplus (C(f;\vec{v}) \cap W_0)$ είναι ευθύ και περιέχεται στο W_0, επειδή το $W' \subseteq W_0$, λόγω τής (**).

Ας είναι W'' ένας υπόχωρος τού $\mathcal{E}$ με $W_0 = W'' \oplus [W' \oplus (C(f;\vec{v}) \cap W_0)]$, (***). Θεωρούμε τον υπόχωρο $W = W'' \oplus W'$. Παρατηρούμε ότι ο W'' είναι f–αναλλοίωτος, ως υπόχωρος τού f–αναλλοίωτου υπόχωρου W_0. Αφού και ο W' είναι f–αναλλοίωτος, έπεται ότι ο W είναι επίσης f–αναλλοίωτος.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη τής πρότασης, αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{E} = C(f;\vec{v}) \oplus W$. Παρατηρούμε ότι η τομή $C(f;\vec{v}) \cap W = C(f;\vec{v}) \cap (W'' \oplus W') \subseteq C(f;\vec{v}) \cap (W'' \oplus W') \cap W_0$, αφού $W'' \oplus W' \subseteq W_0$. Αλλά λόγω τής (***), η τομή $C(f;\vec{v}) \cap (W'' \oplus W') \cap W_0$ ισούται με $\{\vec{0}\}$. Επομένως, $C(f;\vec{v}) \cap W = \{\vec{0}\}$.

Τέλος,

$$\mathcal{E} = C(f;\vec{v}) + W_0 = C(f;\vec{v}) + W'' + W' + (C(f;\vec{v}) \cap W_0) = C(f;\vec{v}) + W'' + W' = C(f;\vec{v}) + W.$$

Ώστε, $\mathcal{E} = C(f;\vec{v}) \oplus W$, όπου ο W είναι ένας f–αναλλοίωτος υπόχωρος τού $\mathcal{E}$. □

Η προηγούμενη πρόταση αποτελεί το επαγωγικό βήμα τού επόμενου ισχυρισμού:

Πρόταση 9.12. *Έστω ότι $\mathcal{E}$ είναι ένας πεπερασμένης διάστασης $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος με $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} \geq 1$, ότι $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας μηδενοδύναμος ενδομορφισμός με δείκτη μηδενοδυναμικότητας k.*
Τότε υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία $k = k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_s$ φυσικών με $k_1 + k_2 + \ldots k_s = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E}$ και μη μηδενικά διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_s$ τέτοια, ώστε

$$\mathcal{E} = C(f;\vec{v}_1) \oplus C(f;\vec{v}_2) \oplus \cdots \oplus C(f;\vec{v}_s),$$

όπου $\dim_{\mathbb{K}} C(f;\vec{v}_i) = k_i, \forall i, 1 \leq i \leq s$.

Απόδειξη. Λόγω των Προτάσεων 9.9 και 9.11, γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένας f–κυκλικός υπόχωρος $C(f;\vec{v}_1) \subseteq \mathcal{E}$ διάστασης $k = k_1$ τέτοιος, ώστε $\mathcal{E} = C(f;\vec{v}_1) \oplus W_1$, όπου ο W_1 είναι ένας f–αναλλοίωτος υπόχωρος διάστασης $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - k_1$. Τώρα, υπάρχει ένας f–κυκλικός υπόχωρος $C(f;\vec{v}_2) \subseteq W_1$ διάστασης k_2 με $W_1 = C(f;\vec{v}_2) \oplus W_2$, όπου ο W_2 είναι ένας f–αναλλοίωτος υπόχωρος διάστασης $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - k_1 - k_2$. Επιπλέον,

$$\mathcal{E} = C(f;\vec{v}_1) \oplus W_1 = C(f;\vec{v}_1) \oplus C(f;\vec{v}_2) \oplus W_2$$

Σχηματίζοντας, για $i = 1, 2, \ldots, j, j+1, \ldots,$ τον f-κυκλικό υπόχωρο $C(f;\vec{v}_i) \subseteq W_{i-1}$ διάστασης k_i και κατόπιν τον f–αναλλοίωτο υπόχωρο $W_i \subseteq W_{i-1}$ έτσι, ώστε $W_{i-1} = C(f;\vec{v}_i) \oplus W_i$, όπου $W_0 = \mathcal{E}$, με $\dim_{\mathbb{K}} W_i = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{E} - k_1 - k_2 - \cdots - k_i, i \geq 1$, διαπιστώνουμε ότι οι διαστάσεις των W_i σχηματίζουν μια φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών που οφείλει να σταματήσει μετά από πεπερασμένα, ας πούμε, s βήματα. Τότε $\dim_{\mathbb{K}} W_s = 0$ και

$$\mathcal{E} = C(f;\vec{v}_1) \oplus C(f;\vec{v}_2) \oplus \cdots \oplus C(f;\vec{v}_s).$$

□

Παρατήρηση 9.13. *Αν $C(f;\vec{v}_i)$ είναι ένας f-κυκλικός υπόχωροςδιάστασης k_i, τότε γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\{\vec{v}_i, f(\vec{v}_i), \ldots, f^{k-1}(\vec{v}_i)\}$ αποτελεί μια βάση του. Συνεπώς, αν $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ είναι ένας μηδενοδύναμος ενδομορφισμός με δείκτη μηδενοδυναμικότητας ίσο με k, τότε, λόγω τής Πρότασης 9.12, ο χώρος $\mathcal{E}$ είναι το ευθύ άθροισμα των $C(f;\vec{v}_i), i = 1, 2, \ldots, s$ και η ένωση των αντίστοιχων βάσεων, δηλαδή το σύνολο*

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, f(\vec{v}_1), \ldots, f^{k_1-1}(\vec{v}_1)\} \cup \{\vec{v}_2, f(\vec{v}_2), \ldots, f^{k_2-1}(\vec{v}_2)\} \cup \cdots \cup \{\vec{v}_s, f(\vec{v}_s), \ldots, f^{k_s-1}(\vec{v}_s)\}$$

αποτελεί μια βάση τού $\mathcal{E}$. *Ο πίνακας που παριστάνει τον ενδομορφισμό* f *ως προς τη συγκεκριμένη βάση, είναι ο*

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & \\ & \boxed{B_2} \end{pmatrix}$$

Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης